УДК. 519.81

Л. З. Лившиц

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ОТСУТСТВИЯ НЕРАЗЛОЖИМЫХ КОМПОНЕНТ У БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНОВ. I, II

Настоящая работа посвящена изучению класса I_{0n} безгранично делимых законов в R^n, имеющих лишь безгранично делимые компоненты.

Описание указанного класса было одной из проблем, выдвинутых Г. Крамером в его известном докладе [11]. В настоящее время в этом направлении, современное состояние которого отражено в [1, 2], получено много разнообразных фактов.

В статье мы получаем необходимые и достаточные условия принадлежности классу I_{0n} одного семейства безгранично делимых законов[1]. Кроме того, доказываются некоторые либо необходимые, либо достаточные условия принадлежности безгранично делимых законов классу I_{0n}.

Работа состоит из трех частей. В первой из них приводятся формулировки основных результатов с кратким обсуждением. Вторая и третья части посвящены доказательствам предлагаемых теорем.

1. Формулировки результатов и некоторых вспомогательных утверждений

Для множеств A и B из R^n примем

$$A + B = \{z \in R^n : z = x + y;\quad x \in A,\quad y \in B\},$$
$$(0)\,A = \{0\},\quad (m)\,A = (m-1)\,A + A,\quad m = 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$M^+(A) = \bigcup_{m=1}^{\infty} (m)\,A.$$

Замыкание, внутренность и выпуклую оболочку множества A обозначаем соответственно через $\bar{A}$, A°, $\mathrm{Co}A$.

В дальнейшем все встречающиеся множества предполагаются борелевскими, а заряды, определенные на них, вполне конечными, если противное не оговорено.

Преобразованием Фурье заряда μ мы называем функцию $\varphi(t;\ \mu)$, определенную при всех $t \in R^n$ равенством[2].

$$\varphi(t;\ \mu) = \int e^{i<t,x>}\,\mu(\mathrm{d}x).$$

Как известно, заряд однозначно определяется своим преобразованием Фурье. Преобразование Фурье от закона распределения (з. р.) называется характеристической функцией (х. ф.) этого з. р.

Сверткой зарядов μ_1 и μ_2 мы называем заряд μ, определяемый равенством

$$\mu(E) = \int \mu_1(E - x)\,\mu_2(\mathrm{d}x).$$

Свертку зарядов μ_1 и μ_2 будем обозначать через $\mu_1 \ast \mu_2$. Соотношение $\mu = \mu_1 \ast \mu_2$ эквивалентно соотношению

$$\varphi(t;\ \mu) = \varphi(t;\ \mu_1)\,\varphi(t;\ \mu_2).$$

Для записи выражения $\mu_1 \ast \mu_2 \ast \cdots \ast \mu_m$, где $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n$, будем использовать обозначение μ^{m*}, считая по определе-

[1] При этом исправляется ошибка, допущенная Р. Кюппаном в [9, теорема 1].

[2] Здесь, как и в дальнейшем, интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса, и область интегрирования не указывается, если ею является все пространство R^n.

нию, что $\mu^{0*} = \varepsilon_0$, где ε_0 — заряд, определяемый равенством $\varepsilon_0(E) = 1$, если $0 \in E$, и $\varepsilon_0(E) = 0$, если $0 \bar{\in} E$.

Будем говорить, что заряд μ сосредоточен на множестве $A \subset R^n$, если для любого $E \subset R^n$

$$\mu(E \setminus A) = 0.$$

Нам понадобится представление Леви [10, с. 220] для х. ф. $\varphi(t;\ P)$ n-мерного безгранично делимого закона (б. д. з.):

$$\varphi(t;\ P) = \exp\left\{i < t,\ \beta > - \sum_{j,\ k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k + \right.$$
$$\left. + \int \left(e^{i<t,\ x>} - 1 - \frac{i < t,\ x>}{1 + |x|^2}\right) \nu_P(\mathrm{d}x)\right\}, \tag{1}$$
$$t = (t_1,\ t_2,\ \dots\ t_n) \in R^n,$$

где $\beta \in R^n$, $\sum \gamma_{j,\ k} t_j t_k$ — неотрицательная квадратичная форма; ν_P — вполне σ-конечная мера, определенная на классе борелевских множеств в R^n и такая, что

$$\int \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} \nu_P(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Мера ν_P в представлении (1) называется спектральной мерой Леви закона P. Если в (1) квадратичная форма отсутствует, то P называется б. д. з. без гауссовой компоненты. Будем обозначать через I_{0n} подкласс n-мерных б. д. з., имеющих лишь безгранично делимые компоненты.

В первых двух теоремах указываются необходимые и достаточные условия принадлежности классу I_{0n} некоторых семейств безгранично делимых законов.

Теорема 1. *Пусть спектральная мера Леви б. д. закона P без гауссовой компоненты представляется в виде*

$$\nu_P(E) = \int_E \rho(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall E \subset R^n,$$

где $\rho(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, такая что

$$\int \rho(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Для того, чтобы закон P принадлежал классу I_{0n}, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathrm{Co}A \cap (2) M^+(A) = \varnothing, \tag{2}$$

в котором

$$A = \{x \in R^n : \rho(x) > 0\}.$$

Р. Кюппан опубликовал один результат [9, теорема 1], в котором в условиях теоремы 1 соотношение (2) заменено соотношением

$B \cap (2) B = \varnothing$, где B определяется как некоторое выпуклое множество, вне которого почти всюду $\rho(x) = 0$. Утверждается, что в этом и только в этом случае вероятностный закон имеет лишь безгранично делимые компоненты.

В смысле достаточности, как легко показать, утверждение Р. Кюппана справедливо.

В одномерном случае утверждение Р. Кюппана верно и в смысле необходимости, ибо если принять в качестве множества B из теоремы Р. Кюппана множество $\mathrm{Co}A$, где A определено в теореме 1, то можно показать, что соотношение $\mathrm{Co}A \cap (2) M^+(A) \neq \varnothing$ следует из условия $\mathrm{Co}A \cap (2) \mathrm{Co}\, A \neq \varnothing$.

В случае размерности $n > 1$ условие $B \cap (2) B = \varnothing$ является более жестким, чем (2), и не является необходимым. И. В. Островский [2, 3] построил пример закона класса I_{02}, в котором это условие не выполняется для множества $B = \mathrm{Co}\{x \in R^2 : \rho(x) > 0\}$ и, следовательно, не выполняется для любого выпуклого множества, вне которого $\rho(x) = 0$.

Теорема 1 является следствием более общей теоремы 2. Прежде чем сформулировать последнюю, введем такие обозначения.

Для $k > 0$ и множества $B \subset R^n$ обозначим через $S(B, k)$ подкласс n-мерных б. д. законов, спектральная мера Леви которых удовлетворяет условию

$$\nu_P(E \cap B) \geqslant k\lambda_n(E \cap B), \quad \forall E \subset R^n,$$

где λ_n — лебегова мера в R^n.

Пусть A — открытое множество в R^n. Будем говорить, что б. д. закон P без гауссовой компоненты принадлежит классу $S(A)$, если: а) спектральная мера Леви закона P конечна и сосредоточена на множестве A; б) для любого открытого множества B, относительно компактного в A, закон P принадлежит классу $S(B, k)$ при некоторой зависящей от B константе $k > 0$.

Теорема 2. *Включение $S(A) \subset I_{0n}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется соотношение* (2).

Следующая теорема содержит необходимое условие принадлежности I_{0n} закона P класса $S(A, k)$. При этом наличие у закона P гауссовой компоненты не исключается.

Теорема 3. *Если n-мерный б. д. закон P класса $S(A, k)$ принадлежит классу I_{0n}, то выполняется условие*

$$\mathrm{Co}A^0 \cap (2) M^+(A^0) = \varnothing.$$

Теорема 3, как будет показано, вытекает из приводимой ниже теоремы 4 и одного общего утверждения, изложенного в [3]. Прежде чем их сформулировать, введем одно условие, связанное с арифметическим сложением множеств.

Следуя [3], будем говорить, что множество $A \subset R^n$ обладает свойством (K), если можно указать непустые, ограниченные, открытые в R^n множества D_1, D_2 и D_3, такие, что a) $D_1 \subset A$; b) $D_1 \cap$

$\bigcap D_3 = \varnothing$; *c*) $\overline{D}_2 \subset D_3$; *d*) для достаточно больших натуральных p выполняется $(p) D_1 = (p)(D_1 \bigcup D_3)$; *e*) для некоторого натурального $q > 2$ выполняется $\overline{D}_2 \subset (q) D_1$.

Утверждение 1 [3]. Пусть $P \in S(A, k)$, где множество A обладает свойством (K).

Тогда $P \overline{\in} I_{0n}$.

Теорема 4. *Для того, чтобы открытое множество* $A \subset R^n$ *обладало свойством* (K), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathrm{Co}\, A \bigcap (2) M^+(A) \neq \varnothing. \tag{2'}$$

В двух следующих теоремах приводятся достаточные условия принадлежности вероятностного закона классу I_{0n}.

Теорема 5. *Пусть P — б. д. закон без гауссовой компоненты, спектральная мера Леви которого вполне конечна и сосредоточена на некотором множестве A типа F_σ, лежащем в полупространстве $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_n > 0\}$. Если з. р. Q является компонентой з. р. P, то его х. ф. $\varphi(t; Q)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$, при $t_i \in R^1$, $i = 1, \ldots, n-1$, аналитична по t_n в полуплоскости $\{t_n \in C^1 : \mathrm{Im}\, t_n > 0\}$. Существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что справедливо представление* ($e_n = (0, \ldots, 1)$)

$$\frac{\varphi(t + i\sigma e_n;\ Q)}{\varphi(i\sigma e_n;\ Q)} = \exp\left\{i\langle t,\ b\rangle + \int\limits_{R^n} (e^{i\langle t,\ x\rangle} - 1)\, \mu_\sigma(dx)\right\},\quad t \in R^n,$$

где $b \in R^n$, μ_σ — заряд, сосредоточенный на множестве $\overline{\mathrm{Co}\, A} \bigcap \bigcap M^+(A)$ и такой, что $\mu_\sigma(E) \geqslant 0$ при $E \bigcap (2) M^+(A) = \varnothing$.

Эта теорема была сформулирована Р. Кюппаном в работе (9), причем утверждается, что представление для $\varphi(t; Q)$ имеет место при любом $\sigma \geqslant 0$. Однако доказательство, приведенное в (9), содержит существенные пробелы.

Из теоремы 5 вытекает такой результат.

Теорема 6. *Если спектральная мера Леви n-мерного б. д. закона P без гауссовой компоненты вполне конечна и сосредоточена на открытом множестве A, для которого выполняется условие* (2), *то*

$$P \in I_{0n}.$$

Теоремы 5 и 6 обобщают результаты И. В. Островского [4, теоремы 1 и 3], в которых дополнительно предполагалось, что множество A ограничено.

Приводимая ниже теорема 7 и следствие из нее относятся к описанию класса множеств, удовлетворяющих условию (2).

Теорема 7. *Пусть множество $A \subset R^n$ удовлетворяет условию* (2). *Тогда вектор* $0 = (0, \ldots, 0)$ *не принадлежит* $\mathrm{Co}\, A$.

Введем обозначение

$$\Omega_k^{(n)} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_k > 0,\quad x_j = 0,\ j > k\},$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следствие. *Если множество $A \subset R^n$ удовлетворяет условию (2), то в R^n можно ввести ортогональную систему координат с началом в 0 так, чтобы выполнялось включение*

$$\operatorname{Co} A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k^{(n)}.$$

Например, приведенное следствие утверждает, что если множество $A \subset R^n$ удовлетворяет условию (2), то при соответствующем выборе ортогональной системы координат с центром в 0 имеют место включения:

при $n = 1$ $\operatorname{Co} A \subset \{x \in R^1 : x > 0\}$; при $n = 2$ $\operatorname{Co} A \subset \{(x, y) \in R^2 : x > 0,\ y = 0\} \cup \{(x, y) \in R^2 : y > 0\}$; при $n = 3$ $\operatorname{Co} A \subset \{(x, y, z) \in$
$$\in R^3 : x > 0,\ y = z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in R^3 : y > 0,\ z = 0\} \cup \cup \{(x, y, z) \in R^3 : z > 0\}.$$

Для вывода этого следствия нам надо показать, что орты координатных осей $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ можно подобрать таким образом, чтобы для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполнялось соотношение

$$\operatorname{Co} A \cap \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_k < 0,\ x_j = 0,\ j > k\} = \varnothing.$$

Применим индукцию по числу выбранных векторов $e_1, \ldots, e_n$.

Пусть единичные векторы $e_{p+1}, \ldots, e_n$ уже выбраны так, чтобы соотношение выполнялось при $k = p + 1, \ldots, n$. Рассмотрим p-мерное подпространство $L_p = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_j = 0,\ j > p\}$. Для множества $A_p = L_p \cap A$ выполняется условие $\operatorname{Co} A_p \cap (2) M^+ (A_p) = \varnothing$ и по теореме 7 точка 0 не принадлежит $\operatorname{Co} A_p$. Следовательно, существует $(p - 1)$-мерное подпространство $L_{p-1} \subset L_p$, проходящее через 0 и такое, что множество $\operatorname{Co} A_p$ целиком содержится в замыкании одной из частей, на которые L_{p-1} делит L_p.

Примем в качестве e_p единичный направляющий вектор подпространства L_{p-1}, лежащий в L_p и направленный в сторону множества A_p. При таком выборе e_p приведенное выше соотношение выполняется и при $k = p$. Следствие доказано.

Будем говорить, что множество $B \subset R^2$ инвариантно относительно поворота на угол α $(0 < \alpha < 2\pi)$, если из $x \in B$ следует, что $xe^{\alpha} \in B$.

И. В. Островский поставил вопрос об изучении принадлежности классу I_{02} законов, спектральная мера Леви которых содержится во множествах, инвариантных относительно поворотов.

В этом направлении мы получили такой результат.

Теорема 8. *Пусть P — закон класса $S(A, k)$ в R^2. Если внутренность A содержит непустое множество B, инвариантное относительно поворота, то $P \bar{\in} I_{02}$.*

Приступим к доказательству сформулированных теорем.

В дальнейшем через C обозначаются различные постоянные, зависящие лишь от функции.

2. Доказательство теорем 3, 4, 8

Теорема 8 выводится из теорем 7 и 3 таким образом. Пусть $x_0 \in B$, где B — множество, фигурирующее в условиях теоремы 8. Тогда точки $x_k = x_0 e^{i\alpha k}$, $k = 0, 1, \ldots, [2\pi/\alpha]$, принадлежат B, и их выпуклая оболочка содержит 0. По теореме 7 имеем $\mathrm{Co}\, B \cap \cap (2) M^+ (B) \neq \varnothing$. Следовательно, $\mathrm{Co}(A^0) \cap (2) M^+ (A^0) \neq \varnothing$. Применение теоремы 3 завершает доказательство.

Выведем теорему 3 из теоремы 4.

Если в условиях теоремы 3 $\mathrm{Co}(A^0) \cap (2) M^+ (A^0) \neq \varnothing$, то по теореме 4, справедливость которой мы предполагаем, множество A^0, а вместе с ним и A, обладают свойством (K). Отсюда, применяя утверждение 1, заключаем, что $P \in \overline{I}_{0n}$. Это противоречие доказывает теорему 3.

Перейдем к доказательству теоремы 4.

Для любого $B \subset R^m$ и $\beta \in R^1$ обозначим через βB множество

$$\beta B = \{y \in R^m : y = \beta x,\ x \in B\}.$$

Необходимость в теореме 4 легко доказывается следующим образом.

Рассмотрим множества $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_3$, фигурирующие в определении свойства (K). При достаточно больших натуральных p имеем

$$\overline{\boldsymbol{D}}_2 \subset \boldsymbol{D}_3 \subset \frac{1}{p}(p)\, \boldsymbol{D}_1 \cup \boldsymbol{D}_3) = \frac{1}{p}(p)\, \boldsymbol{D}_1 \subset \mathrm{Co}\, \boldsymbol{D}_1 \subset \mathrm{Co}\, A.$$

Кроме того, для некоторого $q \geqslant 2\overline{\boldsymbol{D}}_2 \subset (q)\, \boldsymbol{D}_1 \subset (2) M^+ (A)$. Следовательно,

$$\overline{\boldsymbol{D}}_2 \subset \mathrm{Co}\, A \cap (2) M^+ (A).$$

Приступим к доказательству достаточности в теореме 4, представляющему основную трудность.

Лемма 1. *Если выпуклое множество $B \in R^m$ при некотором натуральном p представимо в виде $B = \frac{1}{p}(p) A$, то оно допускает представление $B = \frac{1}{q}(q) A$ при всех натуральных $q \geqslant p$.*

Доказательство. Имеем

$$A \subset \frac{1}{p}(p) A = B,$$

поэтому для всех натуральных q включение $\frac{1}{q}(q) A \subset B$ является следствием выпуклости множества B.

Покажем, что при всех натуральных $q \geqslant p$ имеет место обратное включение.

Запишем q в форме $q = np + r$, где $0 \leqslant r < p$, $n \geqslant 1$ — натуральное число.

Принимая во внимание, что $pB = (p)A$, имеем

$$qB \subset npB + rB = n(p)A + rB \subset \overline{n-1}(p)A + (r)A + (p-r)A + rB.$$

Из выпуклости множества B и включения $A \subset B$ следует, что $(p-r)A + rB \subset pB = (p)A$.

Поэтому

$$qB \subset \overline{n-1}(p)A + (r)A + (p)A \subset (q)A,$$

т. е. $B \subset \frac{1}{q}(q)A$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $A = \{x \in R^1 : 0 \leqslant c < |x| < d\}$. *При всех натуральных* $q \geqslant 2(d+c)/(d-c)$ *имеет место равенство*

$$\frac{1}{q}(q)A = (-d, d).$$

Доказательство. Включение $\frac{1}{q}(q)A \subset (-d, d)$ тривиально для всех $q = 1, 2, \ldots$

Покажем, что при всех сдостаточно больших натуральных q имеет место обратное включение. Предварительно установим, что при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{2^k}(2^k)A \supset \bigcup_{j=0}^{2^k}(a_j^{(k)}, b_j^{(k)}), \tag{3}$$

где

$$a_j^{(k)} = -\left(1 - \frac{j}{2^k}\right)d + \frac{j}{2^k}c, \quad b_j^{(k)} = -\left(1 - \frac{j}{2^k}\right)c + \frac{j}{2^k}d.$$

При $k = 0$ это соотношение очевидно. Предположим теперь, что оно справедливо для некоторого k. Имеем, используя (3),

$$\frac{1}{2^{k+1}}(2^{k+1})A = \frac{1}{2}\frac{1}{2^k}(2)(2^k)A = \frac{1}{2}(2)\frac{1}{2^k}(2^k)A \supset$$

$$\supset \frac{1}{2}(2)\bigcup_{j=0}^{2k}(a_j^{(k)}, b_j^{(k)}) \supset \frac{1}{2}\Big(\bigcup_{j=0}^{2^k}(2a_j^{(k)}, 2b_j^{(k)}) \cup$$

$$\cup \bigcup_{j=0}^{2^k-1}(a_j^{(k)} + a_{j+1}^{(k)}, b_j^{(k)} + b_{j+1}^{(k)})\Big) = \bigcup_{j=0}^{2^k}\left(-\left(1 - \frac{j}{2^k}\right)d + \right.$$

$$\left. + \frac{j}{2^k}c, -\left(1 - \frac{j}{2^k}\right)c + \frac{j}{2^k}d\right) \cup \bigcup_{j=0}^{2^k-1}\left(-\left(1 - \frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)d + \right.$$

$$\left. + \frac{2j+1}{2^{k+1}}c, -\left(1 - \frac{2j+1}{2^{k+1}}\right)c + \frac{2j+1}{2^{k+1}}d\right) =$$

$$= \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}}\left(-\left(1 - \frac{j}{2^{k+1}}\right)d + \frac{j}{2^{k+1}}c, -\left(1 - \frac{j}{2^{k+1}}\right)c + \frac{j}{2^{k+1}}d\right).$$

Соотношение (3) доказано.

Интервалы в правой части (3) расположены в порядке возрастания их концов. Расстояние между правым $b_j^{(k)}$ и левым a_{j+1}^{k} концами соседних интервалов равно

$$b_j^{(k)} - a_{j+1}^{(k)} = -\left(1 - \frac{j}{2^k}\right)c + \frac{j}{2^k}d + \left(1 - \frac{j+1}{2^k}\right)d - \\ - \frac{j+1}{2^k}c = d - c - \frac{1}{2^k}(d+c)$$

положительно при $k \geqslant \left[\log_2 \frac{d+c}{d-c}\right] + 1$. Поэтому при данных значениях k правая часть (3) представляет интервал $(-d,\ d)$.

Положим $p = 2^m$, где $m = \left[\log_2 \frac{d+c}{d-c}\right] + 1$, $B = (-d,\ d)$, $A = \{x \in R^1 : 0 \leqslant c < |x| < d\}$, и применим лемму 1. Получим, что $\eta(q) A = (-d,\ d)$ при $q \geqslant 2^m$.

Для завершения доказательства леммы заметим, что

$$2^{[\log_2\{(d+c)/(d-c)\}]+1} \leqslant 2\frac{d+c}{d-c}.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые утверждения о выпуклых многогранниках в R^n.

Следующие определения эквивалентны [6, с. 101].

Замкнутым выпуклым многогранником называется ограниченное множество, являющееся пересечением конечного числа замкнутых полупространств. Замкнутым выпуклым многогранником называется выпуклая оболочка конечного числа точек из R^n.

Выпуклый многогранник называется n-мерным, если размерность множества его элементов равна n. Крайние точки многогранника называются его вершинами.

Лемма 3. *Пусть $A \subset R^n$, $B \subset R^n$ — ограниченные открытые множества такие, что $\overline{B} \subset \mathrm{Co}\, A$. Тогда существует замкнутый выпуклый n-мерный многогранник с вершинами из A, внутренность которого содержит B.*

Доказательство. Пусть $y \in \overline{B}$. Так как $\overline{B} \subset \mathrm{Co}\, A$, то y является выпуклой комбинацией набора точек $\{x_k\}_{k=1}^{p} \subset A$. Для каждой точки x_k построим замкнутый n-мерный параллелотоп $\Pi_k \subset A$, содержащий x_k. Множество

$$U(y) = \mathrm{Co}\left(\bigcup_{k=1}^{p} \Pi_k\right)$$

имеет непустую внутренность $U^0(y)$, содержащую элемент y.

Семейство $\{U^0(y)\}$, $y \in \overline{B}$, образует открытое покрытие $\overline{B}$. Выберем из него конечное покрытие $\{U^0(y_j)\}_{j=1}^{q}$ множества $\overline{B}$.

Рассмотрим объединение вершин параллелотопов, соответствующих всем точкам y_j, $j = 1, 2, \ldots, q$. Это множество конечно и содержится в A. Его выпуклая оболочка, являющаяся замкнутым выпуклым многогранником, содержит $\bar{B}$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть A и B — открытые множества в R^n, $\bar{B} \subset \mathrm{Co}\, A$. Тогда существует открытое множество $A_1 \subset A$, такое, что*

$$\bar{A}_1 \cap \bar{B} = \varnothing, \tag{4}$$

$$\bar{B} \subset \mathrm{Co}\, A_1, \tag{5}$$

и для всех достаточно больших натуральных q

$$\mathrm{Co}\, A_1 = \frac{1}{q}(q) A_1. \tag{6}$$

Доказательство. Согласно лемме 3, существует замкнутый выпуклый n-мерный многогранник M с вершинами из A, внутренность которого содержит $\bar{B}$. По определению, многогранник M можно представить в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств

$$<\lambda_k, x> \leqslant d_k, \ |\lambda_k| = 1, \ k = 1, \ldots, h. \tag{7}$$

Множество $\{\lambda_k\}_{k=1}^{h}$ обозначим через L.

Известно [6, с. 71], что точка x является вершиной многогранника M в том и только в том случае, если среди векторов λ_k найдется n линейно независимых, для которых в (7) имеет место равенство.

Путем незначительного изменения M можно добиться того, чтобы его вершины удовлетворяли ровно n ограничениям из (7) как точным равенством. Действительно, если некоторая вершина $z \in M$ удовлетворяет более, чем n из равенств

$$<\lambda_k, x> = d_k, \ \lambda_k \in L,$$

то «срежем» эту вершину гиперплоскостью, достаточно близкой к некоторой опорной для M гиперплоскости, проходящей через точку x и не имеющей с M других общих точек. Поступая так с каждой из вершин $x \in M$, удовлетворяющей более, чем n из указанных равенств, получим искомый многогранник.

Подберем теперь $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы выпуклые многогранники M_+ и M_-, определяемые неравенствами

$$<\lambda_k, x> \leqslant d_k + \varepsilon, \ \lambda_k \in L \tag{8}$$

и

$$<\lambda_k, x> \leqslant d_k - \varepsilon, \ \lambda_k \in L \tag{9}$$

содержали $\bar{B}$, а их вершины принадлежали A и удовлетворяли ровно n ограничениям из (8) и (9) как равенствам.

Пусть вершина $z \in M$ удовлетворяет n равенствам из (7)

$$< \lambda_{k_i}, z > = d_{k_i}, \ i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим параллелотоп $\Pi(z)$:

$$\Pi(z) = \{x \in R^n : d_{k_i} - \varepsilon \leqslant < \lambda_{k_i}, x > \leqslant d_{k_i} + \varepsilon, \ i = 1, \dots, n\}.$$

Уменьшив в случае необходимости ε, можно достигнуть того, чтобы параллелотопы $\Pi(z)$, соответствующие всем вершинам из M, принадлежали A и для них выполнялось

$$\Pi(z) \cap \overline{B} = \varnothing. \tag{10}$$

Построим объединение множеств $\Pi(z)$ по всем вершинам многогранника M и покажем, что внутренность этого объединения A_1 удовлетворяет требованиям леммы.

Соотношение (4) следует из (10). Соотношение (5) непосредственно вытекает из способа построения многогранника M и из того, что каждая вершина z из M принадлежит $\Pi^0(z)$.

Покажем, что при достаточно больших q имеет место (6). Легко видеть, что $\mathrm{Co}\, A_1 = M_+^0$. Убедимся, что при всех достаточно больших q любая точка $y \in M_+^0$ представима в виде

$$y = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} x_k, \ x_k \in A_1, \ k = 1, 2, \dots, q.$$

Будем говорить, что $y \in M_+^0$ имеет ранг $r\,(r \in \{0, 1, \dots, n\})$, если y удовлетворяет не менее, чем r неравенствам

$$d_k - \varepsilon << \lambda_k, y >< d_k + \varepsilon, \ \lambda_k \in L.$$

Обозначим через Δ диаметр множества M_+ и покажем, что при

$$p > \frac{\Delta}{\varepsilon} - 1 \tag{11}$$

для любой точки y ранга r имеет место представление

$$y = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{s} x_k, \ x_k \in A_1, \ s = p^{n-r}. \tag{12}$$

При $r = n$ соотношение (12) очевидно, ибо множество элементов ранга n совпадает с A_1.

Предположим, что соотношение (12) верно для точек ранга r, и докажем его справедливость для элементов ранга $r - 1$. Следует рассмотреть лишь **векторы ранга** $r - 1$, не принадлежащие более высокому рангу.

Пусть y имеет ранг $r-1$, но не принадлежит рангу r. Перенумеровав в случае необходимости единичные векторы λ_k из L, получим

$$d_j - \varepsilon < \langle \lambda_j, y \rangle < d_j + \varepsilon, \ j = 1, 2, \ldots, r-1,$$
$$\langle \lambda_j, y \rangle \leqslant d_j - \varepsilon, \ j \geqslant r.$$

Рассмотрим единичный вектор e, параллельный гиперплоскостям, определяемым векторами λ_j, $j = 1, 2, \ldots, r-1$, и построим прямую $y(t) = y + (t - t_0) e$, t, $t_0 \in R^1$, проходящую через точку y. Очевидно, что найдутся числа t_+, t_-, τ_+, τ_-; $t_+ > t_-$, $\tau_+ < \tau_-$, такие, что

$$\langle \lambda_k, y(t_\pm) \rangle = d_k \pm \varepsilon; \ \langle \lambda_m, y(\tau_\pm) \rangle = d_m \pm \varepsilon$$

при некоторых

$$\lambda_k, \lambda_m \in L; \ k, m > r-1.$$

Выберем параметр t_0 так, чтобы $-\tau_- = t_- > 0$.

Имеем

$$|t_+ - t_-| = |y(t_+) - y(t_-)| \geqslant |\langle \lambda_k, y(t_+) - y(t_-) \rangle| = 2\varepsilon.$$

Аналогично,

$$|\tau_+ - \tau_-| \geqslant 2\varepsilon.$$

Обозначим $t_- = -\tau_- = c$, $\min(t_+, -\tau_+) = d$ и применим к множеству $\{t \in R^1 : 0 < c < |t| < d\}$ лемму 2. Так как $c \leqslant \frac{\Delta}{2} - \varepsilon$, $d \leqslant \Delta/2$, $d - c \geqslant 2\varepsilon$, то при $p > \frac{\Delta}{\varepsilon} - 1$ для всех $t \in (-d, d)$ имеет место представление

$$y(t) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} y(t_k), \ c < |t_k| < d.$$

В частности это представление справедливо и для рассматриваемой точки y. Но векторы $y(t)$, $t \in (\tau_+, \tau_-) \cup (t_-, t_+)$ имеют ранг, не меньший, чем r, и для них в силу индуктивного предположения справедливо (12). Поэтому $(s = p^{n-r})$

$$y = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{s} \sum_{m=1}^{s} x_{km} \right) = \frac{1}{ps} \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{s} x_{km} \equiv \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} y_k,$$
где $y_k \in A_1$, $q = ps = p^{n-r+1}$.

Таким образом, (12) справедливо также для элементов ранга $r-1$.

Так как каждый элемент y из M_+^0 имеет некоторый ранг r, $0 \leq r \leqslant n$, то из (12) следует, что

$$y = \left(p^r \sum_{k=1}^{s} x_k\right) \big/ p^n, \quad x_k \in A_1, \quad s = p^{n-r},$$

и, следовательно,

$$y \in \frac{1}{q}(q) A_1, \text{ где } q = p^n, \quad p > \frac{\Delta}{\varepsilon} - 1.$$

Таким образом,

$$M_+^0 = \frac{1}{q}(q) A_1, \text{ где } q = \left[\frac{\Delta}{\varepsilon}\right]^n.$$

Применяя лемму 1, найдем, что последнее соотношение справедливо при всех $q \geqslant \left[\frac{\Delta}{\varepsilon}\right]^n$. Лемма доказана полностью.

Завершим теперь доказательство теоремы 4.

Из условия (2′) следует, что при некотором $q \geq 2$ пересечение $\operatorname{Co} A \cap (q) A$ не пусто. Пусть $y \in \operatorname{Co} A \cap (q) A$. По определению множества $(q) A$ существуют точки $y_1, y_2, \ldots, y_q$ из A, такие, что $y = \sum_{j=1}^{q} y_j$. Так как A является открытым множеством, то можно считать, что $y_j \neq y$, $j = 1, 2, \ldots, q$. Построим открытые шары U_j с центрами в точках y_j, замыкание которых содержится в A. Открытое множество $U_1 + U_2 + \cdots + U_q$ содержит вместе с точкой y некоторую ее окрестность U, для которой $\overline{U} \subset (q) A \cap \operatorname{Co} A$ и $y_j \overline{\in} \overline{U}$, $j = 1, 2, \ldots, q$.

Обозначим через B множество

$$B = U \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q} U_j\right).$$

По лемме 4 существует открытое множество $A_1 \subset A$, для которого выполняются условия (4), (5), (6).

Примем теперь

$$D_1 = A_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q} U_j\right); \quad D_3 = U, \quad D_2 = V,$$

где открытое множество V содержится в U вместе со своим замыканием.

Легко проверяется, что множества D_1, D_2 и D_3 удовлетворяют условиям $a) - e)$, определяющим свойство (K), и, значит, A обладает этим свойством.

Теорема 4 доказана полностью.

Доказательства остальных предложенных в статье теорем будут приведены в следующих выпусках сборника.

Выражаю благодарность И. В. Островскому за внимание к работе и В. Э. Кацнельсону за ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В. Разложения вероятностных законов. Изд-во Ленингр. ун-та, 1960. 263 с.
2. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М., «Наука», 1972. 480 с.
3. Островський Й. В. До теорії розкладань багатовимірних безмежно подільних законів, ДАН УРСР, серія А, 1972, т. 11, с. 997—1000.
4. Островский И. В. О разложениях многомерных безгранично делимых законов без гауссовой компоненты.— «Вестник ХГУ, серия математическая». Вып. 32. Харьков, 1966, с. 51—72.
5. Островский И. В. Некоторые теоремы о разложениях вероятностных законов.—«Тр. мат. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова», 1965, т. 79. с. 198—235.
6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М., Физматгиз, 1963. 776 с.
7. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953. 396 с.
8. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, М., «Наука». 1969. 576 с.
9. Cuppens R., Decomposition des fonctions caracteristiques indésiniment divi sibles de plusieurs variables a spectre de Poisson continu, «Ann. Inst.H. Poincare, «5, № 2, 1969, p. 123—133.
10. Levy P., Theorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, Gauthier — Villars, 1937, 200 c.
11. Cramer H., Problems in probablility theory, Ann. math. stat., 18, № 2, 1947, p. 165—193.