УДК 517.43

В. С. Рабинович, канд. физ.-мат. наук

МНОГОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ОПЕРАТОРНЫМ СИМВОЛОМ

Многомерные уравнения типа свертки в скалярном случае были изучены И. Б. Симоненко в работе [2] методами теории операторов локального типа [1]. Эти же методы, и применимые и в бесконечномерном случае, используются здесь для получения необходимых и достаточных условий фредгольмовости операторов типа свертки для конусов с операторными символами, принимающими значения в пространстве операторов вида $I+K$, где I — единичный, K — компактный оператор.

Отметим, что аналогичные вопросы в одномерном случае рассматривались М. С. Будяну [3—4].

План работы следующий. В п. 1° вводятся необходимые обозначения и устанавливаются свойства канонических операторов свертки. В п. 2° рассматриваются уравнения в полупространстве с каноническими операторами. В п. 3° вводятся операторы обобщенной свертки, определяется символ такого оператора, формулируются необходимые и достаточные условия фредгольмовости операторов обобщенной свертки. В п. 4° рассматриваются составные операторы свертки, а в п. 5° в качестве приложения результатов п. 4° рассматривается задача линейного сопряжения в C^2.

1°. Пусть $\boldsymbol{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $L(\boldsymbol{H})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных в $\boldsymbol{H}$ операторов, $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{H})$ — двухсторонний идеал в $L(\boldsymbol{H})$ компактных операторов.

Через $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$ обозначим гильбертово пространство сильно измеримых на R^n вектор-функций со значениями в $\boldsymbol{H}$ и нормой

$$\| u \|_{2, \boldsymbol{H}} = \left(\int \| u(x) \|_{\boldsymbol{H}}^2 \, dx\right)^{1/2} < \infty, \tag{1}$$

$L(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$ операторов; $\boldsymbol{K}(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$ — двухсторонний идеал компактных операторов в $L(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$.

Пусть $\dot{R}^n$ — одноточечная компактификация R^n, $\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H})$ — расширение $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{H})$ присоединением единичного оператора в $\boldsymbol{H}$. Через $C(\dot{R}^n, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}))$ обозначим пространство непрерывных отображений бикомпакта $\dot{R}^n$ в $\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H})$ с нормой

$$\| A(\xi) \|_C = \sup_{\xi \in \dot{R}^n} \| A(\xi) \|_{L(\boldsymbol{H})}. \tag{2}$$

Элемент $A(\xi) \in C(\dot{R}^n, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}))$ будем отождествлять с оператором $T_{A(\xi)}: u(\xi) \to A(\xi) u(\xi)$ умножения на оператор-функцию $A(\xi)$, действующим в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$, причем (см. [7], с. 410) известно, что

$$\| T_{A(\xi)} \|_{L(R^n, \boldsymbol{H})} = \sup_{\xi \in \dot{R}^n} \| A(\xi) \|_{L(\boldsymbol{H})}. \tag{3}$$

При таком отождествлении $C(\dot{R}^n, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}))$ есть C^* алгебра операторов в гильбертовом пространстве $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$. Через $\hat{u}(\xi)$ будем обозначать преобразование Фурье вектор-функции $u(x) \in L_2(R^n, \boldsymbol{H})$

$$\hat{u}(\xi) = (Fu)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int u(x) e^{i(x, \xi)} dx. \tag{4}$$

Известно, что F — унитарный оператор в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$ и

$$(F^{-1}\hat{u})(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \hat{u}(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi.$$

Отображению $A(\xi) \in C(\dot{R}^n, \tilde{K}(H))$ сопоставим инвариантный относительно сдвига оператор

$$A = F^{-1} T_{A(\xi)} F, \tag{5}$$

называемый каноническим оператором свертки; отображение $A(\xi) \in C(\dot{R}^n, \tilde{K}(H))$ называется символом оператора A. Так же, как и в скалярном случае, оператор A ограничен в $L_2(R^n, H)$ и

$$\| A \|_{L(R^n, H)} = \sup_{\xi \in \dot{R}^n} \| A(\xi) \|_{L(H)}. \tag{6}$$

Канонические операторы свертки образуют C^*-алгебру, которую мы будем обозначать W.

Лемма 1. *Пусть $A(\xi) \in C(\dot{R}^n, K(H))$ и P_j, $j = 1, 2, \ldots$ — последовательность ортопроекторов в H на конечномерные подпространства $H_j (\subset H)$ $(j = \dim H_j)$, сильно сходящиеся к единичному оператору I. Тогда последовательность операторов $P_j T_{A(\xi)} P_j$ равномерно сходится к оператору $T_{A(\xi)}$.*

Доказательство. Пусть ξ_0 — фиксированная точка из $\dot{R}^n$, тогда последовательность $P_j A(\xi_0) P_j$ сходится к $A(\xi_0)$ равномерно. Действительно,

$$\| A(\xi_0) - P_j A(\xi_0) P_j \| \leqslant \| (I - P_j) A(\xi_0) \| + \| A(\xi_0)(I - P_j) \|.$$

Оператор $A(\xi_0) \in K(H)$, последовательность $\{I - P_j\}$ при $j \to \infty$ сильно сходится к нулю, следовательно, обе последовательности операторов $\{(I - P_j) A(\xi_0)\}$, $\{A(\xi_0)(I - P_j)\}$ при $j \to \infty$ равномерно сходятся к нулю. Ввиду бикомпактности $\dot{R}^n$ и равностепенной непрерывности $\{P_j A(\xi) P_j\}$ на $\dot{R}^n$ последовательность $\{P_j T_{A(\xi)} P_j\}$ равномерно сходится к $T_{A(\xi)}$ при $j \to \infty$.

Следствие 1. *Пусть $A(\xi) \in C(\dot{R}^n, K(H))$, тогда последовательность $\{P_j A P_j\}$ равномерно в $L(L_2(R^n, H))$ сходится к оператору $A \in W$.*

Следуя [2], через $\tilde{R}^n$ обозначим бикомпактификацию R^n присоединением сферы бесконечно удаленных точек $\partial \tilde{R}^n$.

На $\tilde{R}^n$ стандартным образом вводится топология ([2], с. 301). Оператор $A \in L(L_2(\tilde{R}^n, H))$ называется оператором локального типа (л. т.), если для любых двух замкнутых в топологии $\tilde{R}^n$ множеств M_1 и M_2, таких, что $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, оператор $\chi_{M_1} A \chi_{M_2} \in K(L_2(\tilde{R}^n, H))$ (см. [1]). (Здесь $\chi_M : L_2(\tilde{R}^n, H) \to L_2(M, H)$ оператор умножения на характеристическую функцию множества M).

Лемма 2. *Оператор $A \in W$ является оператором л. т. в $L_2(\tilde{R}^n, H)$.*

Доказательство. Очевидно, что любой оператор $A (\in W)$ можно представить в виде $A = \lambda I + A'$, где символ $A'(\xi)$ оператора A принадлежит $C(\dot{R}^n, K(H))$. Согласно следствию 1, оператор A' аппроксимируется в $L(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$ последовательностью $P_jA'P_j$ операторов, действующих в $L(L_2(\tilde{R}^n, \boldsymbol{H}_j))$. Как установлено в [2], с. 301, операторы $P_jA'P_j$ л. т. в $L_2(\tilde{R}^n, \boldsymbol{H}_j)$, а следовательно, и в $L_2(\tilde{R}^n, \boldsymbol{H})$. Таким образом (см. [1], с. 569), оператор л. т. в $L_2(\tilde{R}^n, \boldsymbol{H})$.

Будем обозначать через $|||A|||$ существенную норму оператора $A \in L(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$, т. е.

$$|||A||| \inf_{T \in \boldsymbol{K}(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))} \|A - T\|.$$

Лемма 3. *Пусть M — какая-либо окрестность бесконечно удаленной точки в $\tilde{R}^n$, $A \in W$, тогда*

$$|||\chi_M A||| = |||A\chi_M||| = \|A\| = \sup_{\xi \in \dot{R}^n} \|A(\xi)\|_{L(\boldsymbol{H})} \tag{7}$$

Доказательство леммы 3 основано на инвариантности относительно сдвига операторов алгебры W и проводится так же, как и в работе [2], с. 302.

Следуя [1], будем говорить, что оператор $A \in L(L_2(\tilde{R}^n, \boldsymbol{H}))$ есть локальный оператор Фредгольма в некоторой точке $x \in \tilde{R}^n$, если существует такая окрестность $M(\ni x)$ и такой оператор R, что

$$RA\chi_M = \chi_M + T_1, \quad \chi_M AR = \chi_M + T_2,$$

где T_1 и T_2 принадлежат $\boldsymbol{K}(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$.

Лемма 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *$A(\in W)$ локальный оператор Фредгольма в некоторой бесконечно удаленной точке x;*

2) *оператор A обратим в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$.*

Доказательство. Очевидно, что из 2) следует 1). Покажем, что из 1) следует 2). Легко показать, что если оператор A необратим, то необратим хотя бы один из двух операторов: либо AA^*, либо A^*A.

Пусть для определенности оператор AA^* необратим. Так как оператор AA^* самосопряжен и необратим, то он лежит на границе множества обратимых операторов. (Последовательность обратимых операторов $AA^* + \lambda_n$ ($\lambda_n > 0$ при $\lambda_n \to 0$ равномерно сходится к AA^*). Таким образом (см. [5], с. 13), оператор AA^* — двухсторонний топологический делитель нуля в алгебре W, т. е. существует последовательность операторов $\{B_n\}$, $\inf \|B_n\| \geqslant C > 0$ и таких, что $\|AA^*B_n\| \to 0$, $\|B_nAA^*\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $\inf \|A^*B_n\| > 0$, тогда оператор A есть левый топологический делитель нуля, в противном случае существует подпоследовательность $\{B_{n_k}\}$, такая, что $\|A^*B_{n_k}\| \to 0$, т. е. оператор A^* есть левый топологический делитель нуля, а следовательно, оператор A есть правый топологический делитель нуля в алгебре W.

Таким образом, если оператор A необратим в алгебре W, то он является топологическим делителем нуля хотя бы с одной стороны в этой алгебре.

Итак, пусть A необратим и для определенности A — правый топологический делитель нуля в алгебре W, и пусть $\{B_n\}$ — последовательность операторов из W, таких, что $\| B_n A \| \to 0$, ($\| B_n \| = 1$) при $n \to \infty$.

Если M' такая окрестность бесконечно удаленной точки x, что $\operatorname{int} M' \subset M$, то $||| \chi_{M'} B_n \chi_M ||| = ||| \chi_{M'} B_n |||$, так как B_n — операторы л. т. (см. [1], с. 569).

Таким образом, используя лемму 3, получаем

$$1 = \| B_n \| = ||| \chi_{M'} B_n ||| = ||| \chi_{M'} B_n \chi_M ||| = ||| \chi_{M'} B_n \chi_M A B ||| =$$
$$= ||| \chi_{M'} B_n A R ||| \leqslant \| B_n A \| \cdot ||| R ||| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Противоречие доказывает лемму 4.

2°. Перейдем к рассмотрению операторов в полупространстве. Через R_+^n будем обозначать полупространство, т. е. множество точек $x = (x', t)$, $x' \in R^{n-1}$, $t > 0$. $P_+ : R^n \to R_+^n$ — оператор умножения на характеристическую функцию полупространства R_+^n, $\Theta_+ : R^1 \to R_+^1$ — оператор умножения на характеристическую функцию луча $t > 0$. Оператору $A \in W$ сопоставим семейство операторов $A_{\xi'}$, $\xi' \in \dot{R}^{n-1}$, действующих в $L_2(R^1, \boldsymbol{H})$:

$$(A_{\xi'} u)(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int A(\xi', \tau) e^{-it\tau} \hat{u}(\tau) \, d\tau. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $A \in W$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$P_+ A P_+$ — оператор Фредгольма в $L_2(R_+^n, \boldsymbol{H})$;*

2) *семейство операторов Винера-Хопфа $\Theta_+ A_{\xi'} \Theta_+$ обратимо в $L_2(R_+^1, \boldsymbol{H})$ для любого $\xi' \in R^{n-1}$;*

3) *оператор $P_+ A P_+$ обратим в $L_2(R_+^n, \boldsymbol{H})$.*

Доказательство использует свойства тензорных произведений C^*-алгебр. Обозначим через W^+ C^*-алгебру, порожденную операторами Винера — Хопфа $\Theta_+ A \Theta_+$, где $A(\tau) \in C(\dot{R}^1, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}))$, и всеми компактными в $L_2(R_+^1, \boldsymbol{H})$ операторами, через W' обозначим C^*-алгебру операторов A, отвечающих $A(\xi') \in C(\dot{R}^{n-1}, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{K}))$.

Отметим некоторые свойства введенных алгебр:

$$\text{а) } W^+ \otimes \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}) = W^+;$$
$$\text{б) } \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}) \otimes C(\dot{R}^{n-1}) = C(\dot{R}^{n-1}, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H})).$$

В соотношениях а), б) равенство означает естественный изометрический изоморфизм C^*-алгебр. Свойство а) очевидно, б) следует из теоремы Стоуна для пространств оператор-функций (см. [7], с. 406).

Из свойств а) и б) находим, что

$$W^{+} \otimes C(\dot{R}^{n-1}, \tilde{K}(H)) = W^{+} \otimes C(\dot{R}^{n-1}) = C(\dot{R}^{n-1}, W_{+}). \qquad (9)$$

Очевидна точная последовательность C^*-алгебр:

$$0 \to W' \xrightarrow{\sigma} C(\dot{R}^{n-1}, \tilde{K}(H)) \to 0, \qquad (10)$$

— изометрический изоморфизм, сопоставляющий оператору A символ. Из точной последовательности (10) получаем точную последовательность тензорных произведений C^*-алгебр (см. [6]):

$$0 \to W^{+} \otimes W' \xrightarrow{1\otimes\sigma} W^{+} \otimes C(\dot{R}^{n-1}, \tilde{K}(H)) \to 0.$$

Используя равенство (9), окончательно получаем

$$0 \to W^{+} \otimes W' \xrightarrow{1\otimes\sigma} C(\dot{R}^{n-1}, W^{+}) \to 0. \qquad (11)$$

Легко проверить, используя теорему Стоуна ([7], с. 406), что $P_{+}AP_{+}$ $(A \in W)$ принадлежит $W_{+}^{+} \otimes W'$. Отображение $1 \otimes \sigma$ сопоставляет оператору $P_{+}AP_{+}$ семейство операторов Винера — Хопфа $\Theta_{+}A_{\xi'}\Theta_{+}$, зависящее от параметра $\xi' \in \dot{R}_{\xi'}^{n-1}$.

Таким образом, из точной последовательности (11) следует эквивалентность условий 2) и 3).

Покажем, что из 1) следует 3). Действительно, фредгольмовость оператора $A \in W^{+} \otimes W'$ есть обратимость его представителя в фактор-алгебре

$$\frac{W^{+} \otimes W'}{K(L_2(R_{+}^{n}, H)}.$$

Но используя лемму 3, легко показать, что

$$(W^{+} \otimes W') \cap K(L_2(R_{+}^{n}, H)) = 0.$$

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь оператор

$$B = A_1P_{+} + A_2P_{-}, \qquad (12)$$

где A_1, $A_2 \in W$; $P_{-} = I - P_{+}$.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) B — *оператор Фредгольма в* $L_2(R^n, H)$;

2) а) *операторы* A_1, A_2 *обратимы,* б) *семейство операторов Винера — Хопфа* $\Theta_{+}A_{2,\xi'}^{-1}A_{1,\xi'}\Theta_{+}$ — *обратимо в* $L_2(R_{+}^{1}, H)$ *для любого значения параметра* $\xi' \in \dot{R}^{n-1}$.

3) B — *обратимый оператор.*

Теорема 2 является следствием теоремы 1. Отметим, что достаточные условия обратимости семейства операторов $\Theta_{+}A_{2,\xi'}^{-1}A_{1,\xi'}\Theta_{+}$ можно получить из результатов работы [4] в терминах частных индексов оператор-функции $A_{2,\xi}^{-1}A_{1,\xi'}$.

3°. Оператор $A \in L(L_2(\tilde{R}^n, H))$ будем называть оператором обобщенной свертки, если

1) A — оператор л. т. в $L_2(\tilde{R}^n, H)$;

2) в каждой точке $x \in \tilde{R}^n$ оператор A локально эквивалентен[1)] оператору $A_x \in W$.

Класс операторов обобщенной свертки обозначим через $S(\tilde{R}^n, H)$. Семейство операторов $A_x (\in W)$ назовем семейством локальных представителей оператора $A (\in S(\tilde{R}^n, H))$. Из леммы 3 следует, что в точках $x \in \partial\tilde{R}^n$ локальные представители определяются однозначно.

Символом оператора $A \in S(R^n, H)$ назовем отображение $\tilde{A}(x, \xi)$, определенное на множестве $\Delta = \tilde{R}^n \times \{\infty\} \bigcup \partial R^n \times \dot{R}^n$ со значениями в $\tilde{K}(H)$, такое, что $\tilde{A}(x, \xi) = A_x(\xi)$, где $A_x(\xi)$ — символ локального представителя оператора A. Отметим, что символ однозначно определен оператором.

Приведем свойства операторов обобщенной свертки и их символов, полученные методами теории операторов л. т., как это сделано в [2].

Теорема 3.

1) *$S(\tilde{R}^n, H)$ — C^*-алгебра операторов в $L_2(\tilde{R}^n, H)$;*

2) *отображение σ, сопоставляющее оператору A его символ $\tilde{A}(x, \xi)$, есть $*$-эпиморфизм C^*-алгебр $S(\tilde{R}^n, H)$ и $C(\Delta, \tilde{K}(H))$;*

3) *справедливо равенство*

$$|||A||| = \inf_{T \in K(L_2(R^n, H))} \|A - T\| = \sup_{\Delta} \|\tilde{A}(x, \xi)\|_{L(H)}.$$

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Оператор $A \in S(\tilde{R}^n, H)$ есть оператор Фредгольма в $L_2(R^n, H)$ тогда и только тогда, когда его символ $\tilde{A}(x, \xi)$ есть обратимое отображение Δ в $\tilde{K}(H)$.*

В заключение этого пункта приведем пример оператора из $S(R^n, H)$.

Отметим, что в случае $n = 1$, $H = C^1$ аналогичные операторы рассматривались в работе [8]:

$$Au \equiv u(x) + \sum_{j=1}^{N} \int a_j(x, y) k_j(x - y) u(y)\, dy, \tag{12}$$

где $k_j(x) \in L_1(R^n, K(H))$-пространству сильно измеримых на R^n оператор-функций со значениями в $K(H)$ и таких, что

$$\int \| k_j(x) \|_{L(H)}\, dx < \infty;$$

[1)] Два оператора л. т. A и B называются локально эквивалентными в некоторой точке $x \in \tilde{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность Ω точки x, что $|||\chi_\Omega(A - B)||| < \varepsilon$.

$a_j(x, y)$ — сильно измеримые на $R^n \times R^n$ оператор-функции, такие, что

$$1)\ \sup_{x,\ y \in R^n \times R^n} \operatorname{ess} \|a_j(x, y)\|_{L(H)} < \infty;$$

2) существуют функции $\varphi_j(x) \in C(\partial\tilde{R}^n, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}))$, такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $M_1 \times M_2$ точки $(x_0 x_0) \in \partial\tilde{R}^n \times \partial\tilde{R}^n$, такая, что

$$\sup_{(x,\ y) \in M_1 \times M_2} \operatorname{ess} \| a_j(x, y) - \varphi_j(x_0) \|_{L(H)} < \infty.$$

Легко проверяется, что

1) оператор A ограничен в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$, причем

$$\| A \|_{L(L_2(R^n,\ \boldsymbol{H}))} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n} \sup \operatorname{ess} \| a_j(x, y) \|_{L(\boldsymbol{H})} \int \| k_j(x) \|_{L(\boldsymbol{H})} \, dx;$$

2) A — оператор л. т. в $L_2(\tilde{R}^n, \boldsymbol{H})$;

3) в точках $x \in \partial\tilde{R}^n$ оператор A локально эквивалентен единичному оператору I;

4) в точках $x \ni \partial\tilde{R}^n$ оператор A локально эквивалентен оператору A_x:

$$A_x u \equiv u(x) + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) \int k_j(x - y) \, u(y) \, dy.$$

Таким образом, символ оператора A есть оператор-функция

$$\tilde{A}(x, \xi) = \begin{cases} I, & (x, \xi) \in \tilde{R}^n \times \{\infty\}, \\ I + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) \hat{k}_j(\xi), & (x, \xi) \in \partial\tilde{R}^n \times \dot{R}^n_\xi. \end{cases}$$

Из теоремы 4 следует

Теорема 5. *Оператор A есть оператор Фредгольма в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$ тогда и только тогда, когда $I + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) \hat{k}_j(\xi)$ есть обратимое отображение $\partial\tilde{R}^n \times \dot{R}^n$ в $\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H})$.*

4°. Пусть пространство $\tilde{R}^n$ разбито на конечное число замкнутых конусов $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{N}$, не пересекающихся во внутренних точках, пусть след границы $\bigcup_{i=1}^{N} (\Gamma_i \setminus \operatorname{int} \Gamma_i)$ на единичной сфере состоит замкнутых гладких непересекающихся поверхностей.

Оператор B вида

$$B = \sum_{i=1}^{N} A_i P_i, \quad A_i \in S(R^n, \boldsymbol{H}),$$

где P_{Γ_i} — оператор умножения на характеристическую функцию конуса Γ_i, действующий в $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$, назовем, следуя [2], оператором составной свертки.

Обозначим через Δ_i множества

$$\Delta_i = \Gamma_i \cap \Delta, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Символом оператора B составной свертки будем называть набор из N оператор-функций, определенных на Δ_i и равных там сужению символа $\tilde{A}_i(x, \xi)$ на Δ_i.

Теорема 6. *Пусть $B (\in \boldsymbol{L}(L_2(R^n, \boldsymbol{H}))$ оператор составной свертки. Для того, чтобы B был оператором Фредгольма в пространстве $L_2(R^n, \boldsymbol{H})$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) *для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ сужение символа $\tilde{A}_i(x, \xi)$ на Δ_i являлось обратимым отображением Δ_i в $\tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H})$;*

2) *для любой точки $x \in \Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \partial\tilde{R}^n$ семейство операторов Винера — Хопфа в направлении внутренней нормали*

$$\Theta_\nu^+ \overset{x}{A}{}_{j,\xi_\nu'}^{-1} \overset{x}{A}_{i,\xi_\nu'} \Theta_\nu^+$$

обратимо для любой точки ξ_ν' $(\in \tilde{R}^{n-1}_{\xi_\nu'})$-кокасательного пространства к $\Gamma_i \cap \Gamma_j$ в точке $x \in \Gamma_i \cap \Gamma_j \cap \partial\tilde{R}^n$.

(Здесь $\overset{x}{A}_{i(j),\xi_\nu'}(\xi_\nu) = \tilde{A}_{i(j)}(x', \xi_\nu', \xi_\nu)$.)

Теорема 6 следует из леммы 2—4, теоремы 2 и доказывается с помощью локальных методов, как и в работе [2].

5°. В качестве приложения результатов предыдущего пункта рассмотрим задачу линейного сопряжения для двух комплексных переменных с операторными коэффициентами.

В пространстве C^2 двух комплексных переменных $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, 2)$ выделим трубчатые области

$$C^2_{++} = \{\eta_1 > 0, \ \eta_2 > 0\}, \quad C^2_{+-} = \{\eta_1 > 0, \ \eta_2 < 0\},$$
$$C^2_{--} = \{\eta_1 < 0, \ \eta_2 < 0\}, \quad C^2_{-+} = \{\eta_1 < 0, \ \eta_2 > 0\}.$$

Через $\boldsymbol{H}_{++}(R^2, \boldsymbol{H})$ обозначим пространство аналитических в C^2_{++} вектор-функций, являющихся преобразованиями Фурье функций из $L_2(R^2_{++}, \boldsymbol{H})$ (R^2_{++} — первый квадрант $\{x_1 > 0, \ x_2 > 0\}$ в R^2).

Аналогично определены остальные пространства $\boldsymbol{H}_{+-}(R^2, \boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{H}_{-+}(R^2, \boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{H}_{--}(R^2, \boldsymbol{H})$.

Пусть $\{G_i(\xi)\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ принадлежит $C_{++}(\dot{R}^n, \tilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{H}))$. Рассмотрим задачу нахождения функций $\Phi^{\pm\pm} = \boldsymbol{H}^{\pm\pm}$ по граничному условию

$$G_1\Phi^{++} + G_2\Phi^{-+} + G_3\Phi^{--} + G_4\Phi^{+-} = f, \quad f \in L_2(R^2). \tag{13}$$

Теорема 7. *Оператор, определяемый задачей* (13), *есть оператор Фредгольма только и только тогда, когда обратимы следую-*

одномерные задачи линейного сопряжения с операторными [коэф]фициентами для всех значений параметров ξ_1, ξ_2:

$$1)\ G_1(\xi_1, \xi_2)\Phi_+(\xi_1) + G_2(\xi_1, \xi_2)\Phi_-(\xi_1) = f(\xi_1),\ \xi_2 \in R^1,$$

$$2)\ G_2(\xi_1, \xi_2)\Phi_+(\xi_2) + G_3(\xi_1, \xi_2)\Phi_-(\xi_2) = f(\xi_2),\quad \xi_1 \in R^1,$$

$$3)\ G_3(\xi_1, \xi_2)\Phi_+(\xi_1) + G_4(\xi_1, \xi_2)\Phi_-(\xi_1) = f(\xi_1),\quad \xi_2 \in R^1,$$

$$4)\ G_4(\xi_1, \xi_2)\Phi_+(\xi_2) + G_1(\xi_1, \xi_2)\Phi_-(\xi_2) = f(\xi_2),\quad \xi_1 \in R^1.$$

Достаточные условия обратимости задач 1)—4) в терминах част... индексов оператор-функций могут быть получены из резуль... работы [4].

Замечание. Результаты этой работы очевидным образом переносятся на дискретные аналоги рассматриваемых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. ...имоненко И. Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I. — «Изв. АН СССР, сер. мат.», 1965, № 29, с. 567—586.
2. ...имоненко И. Б. Операторы типа свертки в конусах. — «Мат. сб.», 1967, т. 74, (116), с. 298—313.
3. Будяну М. С. О сингулярных интегральных уравнениях с операторными коэффициентами. — «Мат. иссл.», 1970, т. V, вып. 4, с. 26—34.
4. Будяну М. С. Решение некоторых классов уравнений Винера — Хопфа [с] операторными коэффициентами. — «Изв. АН СССР», 1966, № 4, с. 18—31.
5. ...анфорд Н. и Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория. М., «Мир», 1966. 1063 с.
6. ...ouglas R. G. and Howe Roger, On the C* — algebra of Toeplit'z operators on the quarterplane. Trans. Amer. Math. Soc. 1971, N 158, p. 203—217.
7. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М., «Наука», 1968. 664 с.
8. Карапетянц Н. К., Самко С. Г. Об индексе некоторых классов интегральных операторов. — «Докл. АН СССР», 1970, т. 194, № 3, с. 504—507.