УДК 530.1

Ю. В. Педан

ОБ ОДНОМ УТОЧНЕНИИ ДЛЯ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ ФРУАССАРА

ВВЕДЕНИЕ

Сначала введем обозначения.

Y — связная область пространства $C^2(x_1, x_2)$ двух независимых комплексных переменных x_1, x_2;

$S = U_{j=1}^l S_j$ — разложение аналитического в области Y множества S чистой комплексной размерности один в объединение непроводимых в области Y компонент;

S^0 — множество нерегулярных точек S, точки множества S^0 изолированы;

Q — множество точек $Q_j \in S^0$, в достаточно малой окрестности которых S разлагается на $\nu_j > 1$ непроводимых компонент;

Δ_j^2 — достаточно малый открытый бицилиндр в некоторой новой системе координат x^1 с центром в точке $P_j \in S^0$, точное определение которого будет дано в 1°;

$A_j = \partial \Delta_j^2 \cap S$ — множество, состоящее из $\nu_j \geqslant 1$ компонент связности A_j^k, которые представляют собой дифференцируемые вложения окружности в S и являются пересечениями с $\partial \Delta_j^2$ замыканий неприводимых компонент аналитического множества $S \cap \Delta_j^2$;

$\tilde{A}_j$ — множество, которое получается выбрасыванием из множества A_j любой его компоненты связности; $A = U_j A_j$, $\tilde{A} = U_j \tilde{A}_j$, $H = \bigoplus H_p$ — сингулярная кубическая теория гомологий с коэффициентами в поле комплексных чисел C; $H^* = \bigoplus H^p$ — когомологии де Рама (когомологии бесконечно дифференцируемых дифференциальных форм) комплексного аналитического многообразия; $M(S)$ — абстрактная риманова поверхность, соответствующая аналитическому множеству S в том смысле, что существует отображение $\tilde{\varphi}: M(S) \to S$ биголоморфное на $\tilde{\varphi}^{-1}(S - S^0)$ (более подробно о $M(S)$ см. 3°).

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть* $\bar{\omega}: H(Y) \to 0$, *тогда*

$$H_p(Y - S) = H_p(Y), \ p \neq 1, \ 2;$$

$$H_1(Y - S) = \bigoplus_{j=1}^l \delta H_0(S_j) \bigoplus H_1(Y);$$

$$H_2(Y - S) = \delta H_1(M(S)) \bigoplus \delta H_1(\tilde{A}) \bigoplus H_2(Y).$$

Смысл гомоморфизмов групп гомологий $\bar{\omega}$, δ будет пояснен ниже, δ в этом случае является мономорфизмом.

Теорема 1 представляет обобщение для двух комплексных переменных теоремы о разложении Фруассара [2]. Основные моменты данного обобщения заключаются в следующем.

1. При $n=2$ в теореме 1 удалось отказаться от требования общего положения S_j.

2. Точная тройка i, ω, δ Лере [1] обобщена для $n=2$ на случай неприводимого в области Y аналитического множества.

3. Установлено, что формулы простого и сложного вычетов [1] действуют для $n=2$ не только, когда S_j находятся в общем положении.

1°. Сведения из локальной теории аналитических множеств

Предложение 1. *Пусть точка* $y\in S$ и S *в достаточно малой окрестности точки* y *порождает только одно неприводимое аналитическое множество. Не теряя общности, считаем, что* $y=0$. *Тогда можно выбрать такую систему координат*

$$x'=(x_1', x_2') \text{ в } C^2,$$

которая получается из старой системы линейной однородной голоморфной заменой, и такой бицилиндр

$$\Delta_0^2=\{x' : |x_i'|<r_i,\ i=1, 2\},$$

что проекция $\pi:(x_i', x_2')\to x_1'$ *обладает следующими свойствами.*

1. При $|x_1'|<r_1$, $x_1'\neq 0$ множество $\pi^{-1}(x_1')\cap S\cap\Delta_0^2$ состоит из m точек $s_j(x_1')$, являющихся регулярными точками S, при этом функции $s_j(x_1')$ голоморфно зависят от x_1'. Целое число m зависит только от S и выбора точки y.

2. Множество $\pi^{-1}(0)\cap S\cap\Delta_0^2$ состоит только из точки $x_1'=0$. Если $x_1'\to 0$, то все $s_j(x_1')\to 0$.

3. Зафиксируем точку $a\neq 0$ в круге $K=\{|x_1'<r_1\}$ и петлю γ, образующую фундаментальной группы $\pi_1(K-\{0\}, a)$ множества $K-\{0\}$. Все точки $s_j(a)$ можно занумеровать так, чтобы при однократном аналитическом продолжении функции $s_j(x_1')$ из точки a по петле γ получалась функция $s_{j+1}(x_1')$, а $s_m(x_1')$ переходила в $s_1'(x_1')$.

Замечание. Если в достаточно малой окрестности точки y аналитическое множество S разлагается в объединение нескольких неприводимых множеств, то существует одна такая система координат x' и один такой бицилиндр Δ_0^2, что предложение 1 справедливо для всех этих неприводимых аналитических множеств. Точка y является единственной в Δ_0^2 нерегулярной точкой S, поэтому множество S^0 состоит из изолированных точек.

Определение. *Бицилиндр* Δ_0^2, *описанный в предложении 1 или в замечании, назовем допустимым.*

Бицилиндры Δ_j^2, упомянутые во введении, являются допустимыми.

Приведем ряд топологических свойств аналитического множества $S\cap\Delta_0^2$.

1. Существует гомеоморфизм $f: S \cap \overline{\Delta}_0^2 \to \overline{R}$, где $\overline{R}$ — риманова поверхность, соответствующая функции $(x_1')^{\frac{1}{m}}$ над замкнутым кругом $\overline{K}$. При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S \cap \Delta_0^2 & \to & \overline{R} \\ \pi \downarrow & \swarrow & \\ \overline{K} & & \pi', \end{array}$$

где π' — проекция.

2. $S \cap \Delta_0^2$ — стягиваемое топологическое пространство.

3. Множество $\Gamma^1 = \partial \Delta_0^2 \cap S$ — деформационный ретракт множества $S \cap \Delta_0^2 - \{0\}$.

4. Множество $\Gamma^1 = \partial \Delta_0^2 \cap S$ — вещественно одномерная кривая с гомологиями окружности.

Свойства 2, 3, 4 получаются пересечением при помощи гомеоморфизма f из очевидных свойств римановой поверхности $\overline{R}$. Множества A_j^k (см. введение) обладают свойствами Γ^1, если под S понимать неприводимую компоненту аналитического множества $S \cap \Delta_j^2 j$, соответствующую A_j^k.

2°. Некоторые вспомогательные сведения.

В настоящей статье часто будем пользоваться понятием точной тройки гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} & & B_1 \\ & \alpha_1 \swarrow & \uparrow \alpha_3 \\ B_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & B_3 \end{array} \qquad \dim \alpha_j = a_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad a_1 + a_2 + a_3 \neq 0,$$

где a_j — целое число; $B_j = \bigoplus_l B_{j,\,l}$. Это удобная форма записи точной последовательности

$$\cdots \to B_{1,\,p} \xrightarrow{\alpha_1} B_{2,\,p+a_1} \xrightarrow{\alpha_2} B_{3,\,p+a_1+a_2} \xrightarrow{\alpha_3} B_{1,\,p+a_1+a_2+a_3} \xrightarrow{\alpha_1} \cdots$$

Над точными последовательностями (тройками) обычным образом определяются операции прямого сложения и вычитания, не выводящие из множества точных последовательностей.

Пусть $D = U_{j=1}^{\infty} D_j$, $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \varnothing$, $i \neq j$, D_j. Компакт в C^2, топология на D индуцируется топологией C^2, $D' = \bigcup_j D_j'$, D_j' — некоторое множество, принадлежащее D_j. Пусть также каждое компактное подмножество D содержится в объединении конечного числа D_j. Тогда справедлива формула

$$H(D,\ D') = \bigoplus_{j=1}^{\infty} H(D_j,\ D_j'). \tag{1}$$

Если множеств D_j конечное число, то формула (1) общеизвестна. Для счетного числа множеств D_j (1) имеет место, так как сингулярная кубическая теория гомологий — теория гомологий с компактными носителями. Поэтому каждый цикл $\tilde{\gamma}$ лежит на конечном числе D_j; его класс гомологий единственным образом представим как сумма классов гомологий этого конечного числа D_j. Для всех множеств, к которым формула (1) будет применяться, условия выполняются, так как множество S^0 может иметь предельные точки только на границе области Y.

Коэффициенты теории гомологий H берутся в поле, и поэтому группы гомологий представляют собой векторные пространства, каждая точная последовательность групп гомологий вида

$$0 \to B_1 \to B_2 \to B_3 \to 0$$

влечет изоморфизм $B_2 \to B_1 \oplus B_3$, определяемый единственным образом [7].

Любая абстрактная риманова поверхность является комбинаторным многообразием в смысле С. Лефшеца [8], поэтому на ней справедлива двойственность замкнутых и компактных гомологий относительно индекса Кронекера. (См. также [2]).

Собственной триадой называется упорядоченная тройка

$$(X,\ X_1,\ X_2)$$

топологических пространств [6], удовлетворяющая условиям:

$$1)\ X_1 \subset X,\ X_2 \subset X;$$

2) гомоморфизмы k_{1*}, k_{2*} групп относительных гомологий, индуцированных вложениями

$$k_1 : (X_2,\ X_1 \cap X_2 \subset (X_1 X_1);$$
$$k_2 : (X_1,\ X_1 \cap X_2) \subset (X,\ X_2),$$

являются изоморфизмами.

Всякая собственная триада, удовлетворяющая условию

$$X = X_1 \cup X_2,$$

обладает точной аддиционной последовательностью (последовательностью Майера — Виеториса):

$$\to H_p(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\psi} H_p(X_1) \oplus H_p(X_2) \xrightarrow{\varphi} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} \dots$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_{p-1}(X_1 \cap X_2) \to \cdots,$$

где

$$\psi(u) = h_{1*}u,\ \ -h_{2*}u),$$
$$u \in H_p(X_1 \cap X_2);$$
$$\varphi(\vartheta_1,\ \vartheta_2) = m_{1*}\vartheta_1 + m_{2*}\vartheta_2,$$
$$\vartheta_i \in H_p(X_i),\ i = 1,\ 2;$$

гоморфизмы h_{i*}, m_{i*}, $i=1$, 2 определяются из диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_1 \cap X_2 \arrow[r, "n_2"] \arrow[d, "n_2"'] & X_1 \arrow[r] & X \\ X_2 \arrow[rr] & & {} \arrow[u, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

с отображениями, являющимися вложениями. Определение гомоморфизма Δ нам не понадобится.

3°. Риманова поверхность $M(S)$.

Определение римановой поверхности $M(S)$ дано во введении. Докажем существование $M(S)$. Под точкой $L\in M(S)$ будем понимать пару, первая координата которой — точка $Y\in S$; вторая — неприводимый росток S^i, компонента разложения ростка аналитического множества, порожденного S в точке Y, в объединении неприводимых ростков. Наделим это множество точек структурой топологического многообразия. Каждой точке $L\in M(S)$ поставим в соответствие множество $V_L\subset M(S)$, состоящее из пар, первая координата которых $Y\in\Delta_L^2\cap S$, росток же порожден представителем ростка $\tilde{S}^i$ в точке Y в допустимом бицилиндре Δ_L^2. Отображения $h_L: V_L\to C_1$ определим как $f|_R: S^i\cap\Delta_L^2\to R$ (здесь и дальше S^i — представитель неприводимого ростка $\tilde{S}^i$).

Атлас из $\{V_L, h_L\}$ задает на $M(S)$ еще и структуру абстрактной римановой поверхности. В каждом Δ_L^2 неприводимое аналитическое множество S^i параметризуется как $x_2'=x_{L,2}'\left((x_1')^{\frac{1}{m_i}}\right)$, где $x_{i,2}'$ — обратимая голоморфная функция. Так как система координат x_y' отличается от x на биголоморфное преобразование, то отображения $h_L\bigcirc h_{L'}^{-1}$ на множествах $V_L\cap V_{L'}$ биголоморфны.

Отображение $\tilde{\varphi}$ — проекция на первую координату пары.

Нас интересуют только топологические свойства $M(S)$.

Очевидно, $M(S)$ определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма.

Отметим следующие свойства $M(S)$:

1) $M(S)=U_{j=1}^{l}M(S_j)$,

$$M(S_i)\cap M(S_j)=0,\ i\neq j;$$

2) если S неприводимо в каждой своей точке, то $M(S)$ и S биголоморфны. Например, S — многообразие.

4°. Одно топологическое свойство $M(S)$.

Введем обозначения:

$$\Delta^2=U_j\,\Delta_j^2,$$

объединение берется для всех $P_j\in S^0$ и бицилиндры Δ_j^2 имеют попарно непересекающиеся замыкания; $\Delta_{j(\varepsilon)}^2\,(\Delta_{j-\varepsilon}^2)$, ε — раздутие (ε —

сжатие) полицилиндра Δ_j^2, это тоже допустимые бицилиндры; $\Delta_j^2(\varepsilon)$ — допустимый бицилиндр с радиусами меньше чем ε, с центром в точке P_j, в той же системе координат, что и Δ_j^2,

$$\tilde{S} = S - S^0,\ \Delta^2(\varepsilon) = U_j \Delta_j^2(\varepsilon);$$
$$\Delta^2_{\pm\varepsilon} = U_j \Delta^2_{j\pm\varepsilon}.$$

Под A, A_j, A_j^k будем дальше понимать диффеоморные им множества

$$\varphi^{-1}(A),\ \varphi^{-1}(A_j),\ \varphi^{-1}(A_j^k).$$

Основной целью этого пункта является доказательство справедливости семейства точных последовательностей

$$\begin{gathered} 0 \to H_1(A) \xrightarrow{\psi} H_1(M(\tilde{S})) \xrightarrow{\varphi} H_1(M(S)) \to 0; \\ 0 \to H_p(M(\tilde{S}) \xrightarrow{\varphi} H_p(M(S)) \to 0, \\ p \neq 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Гомоморфизмы ψ, φ индуцированы вложениями.

Из (2) следуют формулы

$$\begin{cases} H_1(M(\tilde{S})) = H_1(A) \oplus H_1(M(S)); \\ H_p(M(S)) = H_p(M(S)); \end{cases} \tag{3}$$

Для доказательства (2) надо выяснить справедливость следующих двух предложений.

1. Тройка топологических пространств

$$(M(S),\ M(\tilde{S}),\ M(S \cap \overline{\Delta}^2))$$

— собственная триада и, следовательно, имеет место точная последовательность

$$\begin{gathered} \vec{\ldots} H_p(M(\tilde{S} \cap \overline{\Delta}^2)) \xrightarrow{\psi} H_p(M(\tilde{S})) \oplus H_p(M(S \cap \\ \cap \overline{\Delta}^2)) \xrightarrow{\varphi} H_p(M(S)) \underset{\ldots}{\to} \end{gathered} \tag{4}$$

2. $\operatorname{Ker}\psi = 0$ для всех p.

Равенство $\operatorname{Ker}\psi = 0$ позволяет разбить точную последовательность (4) на семейство точных последовательностей (2). При этом надо найти гомологии

$$M(S \cap \overline{\Delta}^2),\ M(\tilde{S} \cap \overline{\Delta}^2),$$

применив формулу (1) и результаты 1°.

Докажем, что триада $(M(S),\ M(\tilde{S}),\ M(S \cap \bar{\Delta}^2)$ является собственной, для чего надо установить, что гомоморфизмы k_{1*}, k_{2*}, индуцированные вложениями

$$k_1 : (M(S \cap \bar{\Delta}^2),\ M(S \cap \bar{\Delta}^2)) \subset (M(S),\ M(\tilde{S}));$$
$$k_2 : (M(\tilde{S}),\ M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2) \subset (M(S),\ M(S \cap \bar{\Delta}^2)),$$

являются изоморфизмами.

Гомоморфизм k_{1*} является изоморфизмом, так как пара $(M(S \cap \cap \bar{\Delta}^2),\ M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2))$ получается из пары $(M(S),\ M(\tilde{S}))$ вырезанием множества $M(\tilde{S}) - M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2)$, которое удовлетворяет требованиям теоремы о вырезании [6].

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H(M(\tilde{S}),\ M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2)) & \xrightarrow{k_{2*}} & H(M(S),\ M(S \cap \bar{\Delta}^2)), \\ {\scriptstyle g_{1*}} \nwarrow & & \nearrow {\scriptstyle g_2} \\ & H(M(S - \Delta^2(\varepsilon)),\ \vec{M}(S \cap \bar{\Delta}^2 - \Delta^2(\varepsilon))), & \end{array}$$

в которой все гомоморфизмы индуцированны вложениями.

Пара

$$(M(S - S \cap \Delta^2(\varepsilon)),\ M(S \cap \bar{\Delta}^2 - \Delta^2(\varepsilon)))$$

получается из пары $(M(\tilde{S}),\ M(S \cap \Delta^2))$ вырезанием множества $M(\Delta^2(\varepsilon) \cap S)$, удовлетворяющего требованиям теоремы о вырезании. Поэтому q_{2*} — изоморфизм.

Пара

$$M(S - S \cap \Delta^2(\varepsilon)),\ M(S \cap \bar{\Delta}^2 - \Delta^2(\varepsilon))),$$

представляет собой деформационный ретракт пары $(M(\tilde{S}),\ M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2))$, поэтому g_{1*} — изоморфизм. Следовательно, $k_{2*} = g_{2*}^{0} g_{1*}^{-1}$ — изоморфизм, а рассматриваемая триада собственная.

Докажем, что $\operatorname{Ker} \psi = 0$. Множество A_j является деформационным ретрактом $M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}_j^2)$, и в (4) группу $H(M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2))$ можно заменить изоморфной группой $H(A)$. По формуле (1)

$$H(A) = \bigoplus_j H(A_j),\ H(A_j) = \bigoplus_{k=1}^{\nu_j} H(A_j^k),$$

A_j^k имеют гомологии окружности (см. 1°, 3°). Следовательно, равенство $\operatorname{Ker} \psi = 0$ нужно проверить только для $p = 0,1$. В силу того, что $\psi = (h_{1*} - h_{2*})$, справедливо равенство $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} h_{1*} \cap \operatorname{Ker} h_{2*} = 0$ и достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} h_{1*} = 0$ либо $\operatorname{Ker} h_{2*} = 0$.

Случай $p = 0$. $\operatorname{Ker} h_{2*} = 0$, так как A — деформационный ректракт $M(\tilde{S} \cap \bar{\Delta}^2)$, а h_{2*} индуцировано вложением $A \subset M(S \cap \bar{\Delta}^2)$.

Случай $p = 1$. Гомоморфизм $h_{1*} : H_1(A) \to H_1(M(\tilde{S}))$ является мономорфизмом потому, что циклы A_j^k гомологически независимы на $M(\tilde{S})$.

У любого конечного семейства, составленного из A_j^k, есть двойственное относительно индекса Кронекера семейство лучей из точек P_i к границе $M(S)$.

Из формулы (2) вытекает.

Лемма. *У всякого класса гомологий группы* $H_1(M(S))$ *есть представитель на* $M(\tilde{S})$.

Замечание. $H_p(M(\tilde{S})) = 0$, $p \neq 0, 1$. Для $p = 2$ это следует из двойственности замкнутых и компактных гомологий. Для $p > 2$ $H^p(\tilde{S}) = 0$ применим двойственность де Рама.

5°. Вспомогательная точная тройка.

Основная цель пункта — получение семейства точных последовательностей:

$$0 \to H_{p+3}(Y - S^0) \xrightarrow{i'} H_{p+3}(Y) \to 0, \quad p \neq 0;$$
$$0 \to H_0(s^0) \xrightarrow{\delta'} H_3(Y - S^0) \xrightarrow{i'} H_3(Y) \to 0; \tag{5}$$

где гомоморфизм i' индуцирован вложением, гомоморфизм δ' — оператором, ставящим в соответствие каждой точке P_i границу допустимого бицилиндра Δ_j^2. Из (5) следуют формулы

$$H_p(Y - S^0) = H_p(Y), \quad p \neq 3;$$
$$H_3(Y - S^0) = \delta' H_0(S^0) \oplus H_3(Y). \tag{6}$$

Для доказательства (5) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & H(Y) & & & \dim i = \dim p = 0, \\ p \swarrow & & \nwarrow i & & \\ H(Y, & Y - \Delta^2) & \to & H(Y - \Delta^2) & \dim \partial = -1 \\ \mu^* & \uparrow & \nu & \uparrow & \\ & H(S^0) & & H(Y - S^0). & \end{array} \tag{7}$$

Тройка p, i, ∂ соответствует точной гомологической последовательности пары $(Y, Y - \Delta^2)$.

Построим изоморфизмы μ_*, ν.

Положим ν равным k_*^{-1}, тогда k_* индуцирован вложением $Y - \Delta^2 \subset Y - S^0$ и является изоморфизмом в силу того, что $Y - \Delta^2$ представляет собой деформационный ретракт $Y - S^0$.

Для построения изоморфизма μ_* воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc} H(S^0) & \xrightarrow{\bar{\mu}^*} & H(\bar{\Delta}^2, \partial\Delta^2) & \xrightarrow{g_{4*}} & H(\bar{\Delta}_\varepsilon^2, \bar{\Delta}_\varepsilon^2 - \Delta^2) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ \mu_* & & H(Y, Y - \Delta^2) & & g_{3*}, \end{array}$$

в которой гомоморфизмы μ_*, g_{3*}, g_{4*} индуцированы вложениями, гомоморфизм $\bar{\mu}_*$ — соответствием $P_j \in \Delta_j^2$, g_{3*} — изоморфизм, как и пара $(\Delta_\varepsilon^2, \Delta_\varepsilon^2 - \Delta^2)$, получается из пары $(Y, Y - \Delta^2)$ вырезанием множества $Y - \bar{\Delta}_\varepsilon^2$, удовлетворяющего условиям теоремы о вырезации. Пара $(\overline{\Delta}^2, \partial\Delta^2)$ является деформационным ретрактом пары $(\Delta^2, \overline{\Delta}^2_\varepsilon - \Delta^2)$, поэтому g_{4*} — изоморфизм. Гомоморфизм $\overline{\mu}_*$ является изоморфизмом потому, что $H(S^0) = \bigoplus_j H(P_j)$, $H(\overline{\Delta}^2, \partial\Delta^2) = \bigoplus_j H(\overline{\Delta}^2_j, \partial\Delta^2_j)$. Следовательно, μ_* — изоморфизм.

Заменяя в диаграмме (7) группы

$$H(Y, Y-\Delta^2),\ H(Y-\Delta^2),$$

им изоморфными, получим точную тройку i', $\overline{\omega}'$, δ'

$$\begin{array}{ccc} & H(Y) & \\ \swarrow \overline{\omega}' & & \nwarrow i' \\ H(S^0) & \xrightarrow{\delta'} & H(Y-S^0). \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dim i' = 0 \\ \dim \overline{\omega}' = -4, \\ \dim \delta' = 3. \end{array} \tag{8}$$

$H_4(Y) = 0$, поэтому $\overline{\omega}'H(Y) = 0$ и тройка (8) распадается на семейство точных последовательностей (5).

6°. Основная точная тройка i, $\overline{\omega}$, δ.

Целью этого пункта является построение точной тройки

$$\begin{array}{ccc} & H(Y) & \\ \swarrow \overline{\omega} & & \nwarrow i \\ H(M(S)) \oplus H_1(\tilde{A}) & \xrightarrow{\delta} & H(Y-S). \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dim i = 0, \\ \dim \overline{\omega} = -2, \\ \dim \delta = 1, \end{array} \tag{9}$$

Смысл гомоморфизмов i, $\overline{\omega}$, δ будет ясен из построения.

Построение тройки i, $\overline{\omega}$, δ занимает центральное место в доказательстве теоремы 1. Она интересна и сама по себе.

Рассмотрим тройку Лере i, $\overline{\omega}$, δ [1] в $Y - S^0$ для комплексного аналитического подмногообразия $\tilde{S}$

$$\begin{array}{ccc} & \overline{\omega}''H(Y-S^0) & \\ \swarrow & & \nwarrow i'' \\ H(\tilde{S}) & \xrightarrow{\delta''} & H(Y-S). \end{array} \qquad i'' \qquad \begin{array}{l} \dim i'' = 0 \\ \dim \overline{\omega}'' = -2, \\ \dim \delta'' = 1. \end{array} \tag{10}$$

Заменим в тройке (10) группу $H(\tilde{S})$ ей изоморфной группой $H(M)(\tilde{S})$.

Гомоморфизм $\overline{\omega}''$ в (10) отображает изоморфно группу $\delta' H_0(S^0)$ на группу $\tilde{H}_1(A)$, являющуюся прямым дополнением группы $H_1(A)$ до группы $H_1(A)$. Таким образом, справедлива точная последовательность

$$0 \to \delta' H_0(S^0) \xrightarrow{\overline{\omega}''} H_1(A) \to 0. \tag{11}$$

Прямая разность тройки (10) и точной последовательности (11) с учетом формул (3), (6) дает точную тройку (9). Если S — неприводимое в Y аналитическое множество, то тройка (9) является тем обобщением тройки Лере i, $\tilde{\omega}$, δ, о котором говорилось во введении. Если S еще и неприводимо в каждой своей точке, то $H_1(\tilde{A}) = 0$ и $H(M(S)) = H(S)$. Когда S — многообразие, тройка (9) совпадает с тройкой Лере i, $\tilde{\omega}$, δ.

7°. Доказательство теоремы 1.

Условие $\overline{\omega}H(Y) = 0$ позволяет расщепить точную тройку (9) на семейство точных последовательностей:

$$0 \to H_1(M(S)) \oplus H_1(\tilde{A}) \xrightarrow{\delta} H_2(Y - S) \xrightarrow{i} H_2(Y) = 0;$$
$$0 \to H_p(M(S)) \xrightarrow{\delta} H_{p+1}(Y - S) \xrightarrow{i} H_{p+1}(Y) \to 0, \quad p \neq 0{,}1; \tag{12}$$
$$0 \to H_0(Y - S) \to H_0(Y) \to 0.$$

Учитывая, что $H_p(M(S)) = 0$, $p \neq 0{,}1$, получим теорему 1.

Группа $H(Y)$ не является подгруппой $H(Y - S)$, но гомоморфизм i в (12) эпиморфизм и поэтому у каждого класса гомологий $h(Y)$ есть представитель, не пересекающийся с S. Это позволяет придать смысл формулам теоремы 1, состоящий в том, что каждый класс гомологий $h(Y - S)$ однозначно представим в виде суммы классов гомологий из $H(Y)$ и $\delta H(M(S)) \oplus \delta H_1(\tilde{A})$.

Следствие 1. *Группа $H_2(\Delta_j^2 - S)$ имеет в качестве независимой системы образующих циклы: точку $P_j \in S \cap \Delta_j^2$, одномерный цикл $\delta_\varepsilon(P_j)$, семейство двумерных циклов $\{\delta_\varepsilon A_j^k\}$, $1 \leqslant k \leqslant \nu_j - 1$, δ_ε — оператор кограницы. Справедливо равенство $\delta H_j(\tilde{A}_j) = H_2(\Delta_j^2 - S)$.*

Следствие 1 легко получается из теоремы 1, если учесть, что Δ_j^2 — стягиваемое топологическое пространство.

Следствие 2. *Имеет место равенство*

$$\delta H_1(\tilde{A}) = \bigoplus_j H_2(\Delta_j^2 - S).$$

Замечание. Группу $H_1(M(S))$ можно заменить на $\bigoplus_{j=1}^{l} H_1(M(S_j))$ (см. 3°).

8°. Некоторые замечания.

Замечание 1. Гомоморфизм

$$\delta : H(M(S)) \oplus H_1(\tilde{A}) \to H(Y - S)$$

можно определить, как обычно, через оператор кограницы δ_ε. Сделаем это для циклов размерности один. Именно они представляют наибольший интерес.

Определение. *У каждого класса гомологий*

$$h_1 \in H_1(M(S)) \oplus H_1(\tilde{A})$$

есть представитель j, лежащий на S. $M(\tilde{S})$ и $\tilde{S}$ отождествляем. Построим над $\tilde{S}$ трубчатую окрестность. Классом гомологий δ_{h_1} назовем тот класс гомологий $h_2(Y - S)$, которому принадлежит цикл $\delta_{\varepsilon\gamma}$. Корректность и совпадение с первым определением δ в этой статье не приводится.

Данное выше определение гомоморфизма δ позволяет применить формулы вычетов Лере [1] не только к многообразиям в общем положении, но и к произвольному, аналитическому в области Y множеству S, разлагающемуся на конечное число неприводимых компонент чистой размерности один.

Замечание 2. Приведем некоторые достаточные условия выполнения равенства $\overline{\omega}H(Y) = 0$.

1. У каждого класса гомологий области Y есть представитель, не пересекающийся с S. Это условие является и необходимым (см. 7°).

2.

$$H_p(Y) = 0, \quad p \neq 0,1;$$

например, выпуклые области, области Рунге, области, являющиеся стягиваемыми топологическими пространствами.

Замечание 3. К сожалению, по вине автора в тезисах этой работы, представленных на Всесоюзную конференцию по теории функций комплексного переменного, Харьков, 1971, была допущена ошибка.

Опущено требование неприводимости S_ν в каждой своей точке. В формулировке теоремы надо писать: «гомологичен сумме локально регулярных циклов $\sum_{j=1}^{k}\Gamma^2 M_j$ с точностью до циклов группы

$$\bigoplus_{\nu=1}^{q}\delta H_1(S_\nu)".$$

Замечание 4. Пусть $Y = C^2(x_1, x_2)\,S$ — нули полинома $P(x_1, x_2)$. Условие $\omega H(Y) = 0$ выполняется, так как C^2 — стягиваемое топологическое пространство. $M(S_i)$ представляют собой римановы поверхности полиномов $P_i(x_1, x_2)$ неприводимых множителей полинома $P(x_1, x_2)$ с выколотыми множествами точек C_i. Точки C_i — это точки, для которых $x_1 = \infty$ либо $x_2 = \infty$. База гомологий $H_1(M(S_i))$ состоит из базы гомологий римановой поверхности полинома $P_i(x_1, x_2)$ и $|C_i| - 1$ «окружностей» с центрами в точках C_i. Под $|C_i|$ понимаем число точек множества C_i. Базу группы $H_2(C^2 - S)$ теперь надо строить при помощи оператора δ_ε. Этот случай другими методами был ранее исследован в работе А. Южакова [9].

9°. Двойственный случай.

Имеет место теорема 2 для нахождений комологий де Рамма $Y - S$, двойственная к теореме 1.

Теорема 2. *Пусть* $\overline{\omega}: H(Y) \to 0$, *тогда*

$$H^p(Y - S) = H^p(Y), \quad p \neq 1,\ 2$$
$$H^1(Y - S) = \delta^{*-1}H^0(M(S)) \oplus H^1(Y);$$
$$H^2(Y - S) = \delta^{*-1}\overline{H}^1(M(S)) \oplus H^2(Y),$$

где $\overline{H}^1(M(S))$ — *когомологии дифференциальных форм степени один на* $M(S)$ *с полюсами только в точках* $\varphi^{-1}(Q_i)$, *причем сумма* *вычетов по точкам множества $\varphi^{-1}(Q_i)$ должна равняться нулю для всех Q_i.*

Гомоморфизм δ^* порожден теми же операциями над дифференциальными формами в окрестностях точек S, что и гомоморфизм δ^* у Лере [1].

Доказательство теоремы 2 получается из доказательства теоремы [1] переходом к двойственным точным последовательностям.

Особый интерес представляет случай, рассмотренный в замечании 4. Так как риманова поверхность $M(S)$ получается из римановой поверхности полинома $P(x_1, x_2)$ выбрасыванием конечного числа точек, то можно применить теорию алгебраических функций одного комплексного переменного.

В заключении автор выражает благодарность В. А. Какичеву за оказанную помощь при написании статьи, а также А. П. Южакову за ряд полезных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии. М., МЛ, 1961. 130 с.
2. Хуа Р., Теплиц В. Гомология и фейнмановские интегралы. М., «Мир», 1969. 203 с.
3. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. М., «Мир», 1965. 205 с.
4. Бохнер С., Мартин У. Т. Функции многих комплексных переменных. М., ИЛ, 1951. 300 с.
5. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М., «Мир», 1970. 203 с.
6. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. М., «Физматгиз», 1958. 402 с.
7. Маклейн С. Гомология. М., «Мир», 1966. 134 с.
8. Лефшец С. Алгебраическая топология. М., ИЛ, 1949. 500 с.
9. Южаков А. П. К теории вычетов функций двух комплексных переменных.— «Уч. зап. МОПИ им. Н. К. Крупской. 1970, т. СХ, вып. 7. с. 14—23.