УДК 513.88 : 513.83

В. Д. Мильман, канд. физ.- мат. наук

РАССТОЯНИЕ БАНАХА — МАЗУРА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА B — ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим общие свойства единичных сфер всего класса изоморфных пространств Банаха, которые можно обнаружить по одному (возможно, специальным образом удачно выбранному) представителю. Полученные на этом пути результаты могут служить признаками неизоморфности пространств.

При описании свойств единичной сферы

$$S(B) = \{x \in B : \|x\| = 1\}$$

мы пользуемся языком β и δ-модулей. Определение и изложение свойств этих модулей можно найти в [2, гл. 3].

1. Числовые признаки неизоморфности пространств; оценка снизу расстояния Банаха — Мазура. Расстоянием Банаха — Мазура между двумя изоморфными пространствами Банаха B_1 и B_2 называется величина

$$\rho(B_1, B_2) = \ln d(B_1, B_2),$$

где

$$d(B_1, B_2) = \inf_{T : B_1 \to B_2} \|T\| \cdot \|T^{-1}\|.$$

В дальнейшем при измерении расстояний между пространствами мы будем пользоваться величиной $d(B_1, B_2)$. Заметим, что если $d(B_1, B_2) = \infty$, то это означает, что пространства B_1 и B_2 неизоморфны. В том случае, когда $d(B_1, B_2) \leqslant k < \infty$, будем говорить, что B_1 и B_2 k-изоморфны.

Будем говорить, что множество $M \subset S(B)$ богато в смысле (I), если

$$\text{(I)}\ \forall E \subset B,\ \operatorname{codim} E < \infty:\ E \cap M \neq \varnothing,$$

и богато в смысле (II), если

$$\text{(II)}\ \forall E \subset B,\ \dim E = \infty:\ E \cap M \neq \varnothing.$$

Предложение 1. *Пусть* $r(x)$ — *эквивалентная норма в пространстве*[1] $B: c_1 r(x) \leqslant \|x\| \leqslant c_2 r(x)$. *Тогда* $\forall \theta > 0 \, \exists M_1(\theta) \subset S(B)$ *и* $M_2(\theta) \subset S(B)$ *такие, что при* $x \in M_1(\theta)$

$$\begin{aligned} \beta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x, B_r\right) &\geqslant \beta^0(\varepsilon;\ x, B) + \theta; \\ \delta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x, B_r\right) &\leqslant \delta^0(\varepsilon;\ x, B) + \theta \end{aligned} \tag{1}$$

и при $x \in M_2(\theta)$

$$\begin{aligned} \beta^0(\varepsilon;\ x, B_r) &\geqslant \beta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x, B\right) - \theta; \\ \delta^0(\varepsilon;\ x, B_r) &\geqslant \delta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x, B\right) - \theta. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом множества M_1 *и* M_2 *богаты в смысле* (I).

Если же $\beta^0(\varepsilon;\ x, B) = \delta^0(\varepsilon;\ x, B)$, *то* M_1 *и* M_2 *богаты и в смысле* (II).

Доказательство. Обозначим

$$\sup\{r(x) : x \in S(B)\} = a_r \leqslant 1/c_1;$$
$$\inf\{r(x) : x \in S(B)\} = b_r \geqslant \frac{1}{c_2}.$$

Для любого $\theta > 0$ рассмотрим множества

$$m_1(\theta) = \{x \in S(B) : r(x) \geqslant a_r - \theta\};$$
$$m_2(\theta) = \{x \in S(B) : r(x) \leqslant b_r + \theta\}.$$

При доказательстве неравенств (1) мы будем оперировать с числом a_r и множеством $m_1(\theta)$. Пусть $x_0 \in m_1(\theta)$; подобно преобразуем изоморфную сферу $S(B_r)$, умножив ее на $\frac{1}{r(x_0)}$ Обозначим

$$S_1(B_r) = \frac{1}{r(x_0)} S(B_r) \text{ и } r_1(x) = \frac{r(x)}{r(x_0)}.$$

Для любого

$$x \in S(B) \text{ и } \theta_1 = \frac{\theta}{a_r - \theta}$$

имеем $r_1(x) - \theta_1 \leqslant 1 = \|x\|$.

Таким образом, для любого подпространства

при $y \in \varepsilon S(E)$ и $\|x_0 + y\| \geqslant 1$ $E \subset B\,(\operatorname{codim} E < \infty)$

$$\|x_0 + y\| - 1 \geqslant r_1\left(x_0 + r_1(y)\frac{y}{r_1(y)}\right) - 1 - \theta\|x_0 + y\|.$$

---

[1] Далее B_r означает пространство B в норме $r(x)$.

Напомним, что $r_1(y) = \frac{r(y)}{r(x_0)} \geqslant \frac{c_1}{c_2}\varepsilon$, поэтому благодаря выпуклости функции

$$f(\lambda) = r_1(x_0 + \lambda y),$$

получаем

$$\|x_0 + y\| - 1 \geqslant r_1\left(x_0 + \frac{c_1}{c_2}\varepsilon\frac{y}{r_1(y)}\right) - 1 - \theta_1\|x_0 + y\|. \qquad (3)$$

Из (3) по определению функций β^0 и δ^0 следует, что в точке x_0 выполняется (1). Приведенные рассуждения можно проводить в любом подпространстве E, таком, что $\beta^0(\varepsilon;\ x, E) = \beta^0(\varepsilon;\ x, B)$ и $\delta^0(\varepsilon;\ x, E) = \delta^0(\varepsilon;\ x, B)$, в частности, в любом подпространстве с конечным дефектом. Таким образом, множество $M_1(\theta)$ богато в смысле (I), а при дополнительном условии $\beta^0 = \delta^0$ — и в смысле (II).

Доказательство неравенств (2) проходит аналогично; следует лишь использовать множество $m_2(\theta)$ (вместо $m_1(\theta)$) и число b_r (вместо a_r).

Следствие 1. *Пусть* $d(B, B_1) \leqslant a$. *Тогда*

$$\beta^0\beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ B_1\right) \leqslant \delta^0\beta^0(\varepsilon;\ B),$$

$$\beta^0\delta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ B_1\right) \leqslant \delta^0\delta^0(\varepsilon;\ B).$$

Доказательство. Можно считать, что изоморфизм $T(B_1 \to B)$ реализует пространство B_1 в B, причем для нормы B_1 выполняется $\frac{1}{a_1}\|x\|_1 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_1$, где $a_1 = a + \theta_1$, $\theta_1(T) > 0$, и выбором T можно сделать $\theta_1(T)$ сколь угодно малым. В силу произвольности $\theta_1 > 0$ и $\theta > 0$ в предложении 1 для любого[1] $E \in B^0$, т. е. $\operatorname{codim} E < \infty$

$$\inf\left\{\beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ x, B_1\right) : x \in S_1(E)\right\} \leqslant \sup\{\beta^0(\varepsilon;\ x, B) : x \in S(E)\}.$$

Для $\forall\,\theta_2 > 0$ рассмотрим те подпространства

$$E_0^{N_1} \text{ и } E_0^{N_2}\ (\operatorname{codim} E_0^{N_i} = N_i),$$

для которых

$$\sup_{x \in S\,(E_0^{N_1})} \beta^0(\varepsilon;\ x, B) \leqslant \delta^0\beta^0(\varepsilon;\ B) + \theta_2;$$

$$\inf_{x \in S\,(E_0^{N_2})} \beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ x, B\right) \geqslant \beta^0\beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ B_1\right) - \theta_2.$$

Пусть $E_0^N = E_0^{N_1} \cap E_0^{N_2}$. Тогда

---

[1] Далее B^0 обозначает совокупность всех замкнутых подпространств с конечным дефектом.

$$\beta^0\beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ B_1\right)-\theta_2\leqslant\inf_{x\in S}\ \underset{(E_0^{N_2})}{\beta^0}\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ x;\ B\right)\leqslant\inf_{x\in S}\ \underset{(E_0^{N})}{\beta^0}\left(\frac{1}{a}\varepsilon,\ x,\ B_1\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{x\in S}\ \underset{(E_0^{N_1})}{\beta^0}\ (\varepsilon;\ x,\ B)\leqslant\sup_{x\in S}\ \underset{(E_0^{N_1})}{\beta^0}\ (\varepsilon;\ x,\ B)\ \leqslant\delta^0\beta^0(\varepsilon;\ B)+\theta_2.$$

В силу произвольности $\theta_2>0$ получаем первое утверждение следствия. Второе неравенство получается аналогично.

Теорема 1. 1). *Пусть* $\beta^0\beta^0(\varepsilon;\ B_1)=\psi_1(\varepsilon)$ *и* $\delta^0\beta^0(\varepsilon;\ B_2)=\psi_2(\varepsilon)$. *Тогда*

$$d(B_1,\ B_2)\geqslant\sup_{\varepsilon>0}\left\{a:\frac{\psi_2(a\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)}<1\right\}.$$

2. *Пусть* $\beta^0\delta^0(\varepsilon;\ B_1)=\varphi_1(\varepsilon)$ и $\delta^0\delta^0(\varepsilon,\ B_2)=\varphi_2(\varepsilon)$. *Тогда*

$$d(B_1,\ B_2)\geqslant\sup_{\varepsilon>0}\left\{a:\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\frac{(a\varepsilon)}{(\varepsilon)}<1\right\}.$$

Более того, утверждения п. 1) и 2) *имеют место для любых подпространств* B_1 *и* B_2 *с конечным дефектом.*

Доказательство. Если $d(B_1,B_2)\leqslant a$, то из следствия 1 получаем $\psi_2(a\varepsilon)\geqslant\psi_1(\varepsilon)$. Поэтому, если при некотором ε_0 для $a\leqslant a_0$ $\psi_2(a\varepsilon_0)<\psi_1(\varepsilon_0)$, то $d(B_1,B_2)\geqslant a_0$. Обозначим supremum таких a_0 через $a(\varepsilon_0)$. Тогда $d(B_1,B_2)\geqslant a(\varepsilon_0)$. Однако ε_0 произвольно, поэтому $d(B_1,B_2)\geqslant\sup\{a(\varepsilon):\varepsilon>0\}$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично; вместо первого неравенства следствия 1 следует использовать второе. Переход к произвольным подпространствам с конечным дефектом возможен по той причине, что функции β и δ при этом не изменяются.

Примеры: 1) Поскольку

$\beta(\varepsilon,\ x,\ l_p)\equiv\delta(\varepsilon;\ x,\ l_p)=\sqrt[p]{1+\varepsilon^{p-1}}\simeq\dfrac{\varepsilon^p}{p}$, то в силу теоремы 1 пространства l_{p_1} и l_{p_2} неизоморфны при $p_1\neq p_2$ ([1]).

2) Так как при $p_1\neq p_2$ β-либо δ-модули для L_{p_1} и L_{p_2} различны (см. [2], гл. 3, § 2), то в силу теоремы 1 пространства L_{p_1} и L_{p_2} неизоморфны [1].

Уже отмечалось при доказательстве предложения 1, что роль пространства B могло играть любое подпространство E (мы пользовались этим, переходя к подпространствам с конечным дефектом); при этом происходит лишь изменение функций β и δ, которые вычисляются теперь вдоль E. Это позволяет сформулировать полезное обобщение предложения 1 для случая функций $\beta(\varepsilon;\ x,\ \boldsymbol{B})$ и $\delta(\varepsilon;\ x,\ \boldsymbol{B})$, где $\boldsymbol{B}$ — некоторое семейство подпространств из $\boldsymbol{B}$ с определенными свойствами. Когда B рассматривается в изоморфной норме $r(x)$, семейство $\boldsymbol{B}$ обозначается $\boldsymbol{B}_r$.

Для подпространств $B_1 \subset B$ обозначим $\boldsymbol{B}(B_1)$ какое-нибудь подсемейство $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{B}(B_1) \subseteq \boldsymbol{B}$), состоящее из подпространств B_1 и такое, что для любого $E \subset B$ найдется $E_1 \subseteq E$ и $E_1 \in \boldsymbol{B}(B)$.

Конечно, не для всякого $\boldsymbol{B}$ и $B_1 \subset B$ имеет смысл говорить $\boldsymbol{B}(B_1)$, так что указание B_1 есть ограничение, накладываемое на $\boldsymbol{B}$. Очевидно, что для любого $x \in B_1 : \beta(\varepsilon;\ x, \boldsymbol{B}) \equiv \beta(\varepsilon;\ x, \boldsymbol{B}(B_1))$ и $\delta(\varepsilon;\ x, \boldsymbol{B}) \equiv \delta(\varepsilon;\ x, \boldsymbol{B}(B_1))$. Так же, как и при доказательстве предложения 1, получаем.

Предложение 2. *Для любой изоморфной нормы*

$$r(x) : c_1 r(x) \leqslant \|x\| \leqslant c_2 r(x)$$

и для любого $\theta > 0$ *неравенства* (1) *и* (2), *в которых функции* β *и* δ *вычисляются относительно семейства* $\boldsymbol{B}$ (*либо* $\boldsymbol{B}(B_1)$), *выполняются для некоторых точек* (*разных для неравенств* (1) *и* (2)) *из* B_1.

2. Численно-топологические признаки неизоморфности пространств. Основным соображением в п. 1 (см. доказательство предложения 1) являлось следующее: для $\forall\, \theta > 0$ и любого подпространства с конечным дефектом E_0 выделялась т. $x_0 \in E_0$, лежащая на пересечении изоморфной сферы $S_1(E_0) \equiv \frac{1}{r(x_0)} s_r(E_0)$ и $S(E_0)$, такая, что с точностью θ вторая сфера лежит внутри первой. Мы используем сейчас этот факт полнее, чем в п. 1. Именно, указанное свойство означает, что при $y \in E_0$ $\|x_0 + y\| \geqslant \|x_0 + y\|_1 - \theta$, поэтому при $\forall\, \varepsilon > 0$ и тех $y \in E_0$, которые принадлежат множеству

$$\gamma_\theta(\varepsilon;\ x_0, B) \equiv \{y \in S(B) : |\beta^0(\varepsilon;\ x_0, B) - \|x_0 + \varepsilon y\| + 1| < \theta\},$$

получаем

$$\begin{aligned} \beta^0(\varepsilon;\ x_0, B) &\geqslant \|x_0 + \varepsilon y\|_1 - 1 - 2\theta \geqslant \\ &\geqslant \left\| x_0 + \frac{c_1}{c_2}\varepsilon \frac{y}{\|y\|_1} \right\|_1 - 1 - 2\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть E_1 такое подпространство B ($E_1 \in \boldsymbol{B}^0$, т. е. $\operatorname{codim} E_1 < \infty$), что

$$\inf\left\{\left\| x_0 + \frac{c_1}{c_2}\varepsilon y_1 \right\|_1 : y \in S_1(E_1)\right\} - 1 \geqslant \beta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x_0, B_r\right) - \theta.$$

Тогда из (4) получаем

$$\begin{aligned} \beta^0(\varepsilon;\ x_0, B) &\geqslant \left\| \frac{x_0}{r(x_0)} + \frac{c_1}{c_2}\varepsilon \frac{y}{r(y)} \right\|_r - 1 - 2\theta \geqslant \\ &\geqslant \beta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x_0, B_r\right) - 3\theta \end{aligned} \tag{5β}$$

для $\forall\, y \in \gamma_\theta(\varepsilon;\ x_0, B) \cap E_1 \cap E_0$.

Итак, нами получена

Лемма 1 β. *Пусть в пространстве B задана эквивалентная норма*

$$r(x) : c_1 r(x) \leqslant \| x \| \leqslant c_2 r(x).$$

Тогда в каждом подпространстве с конечным дефектом $E \subset B$ *(т. е.* $E \in B^0$) *и для* $\forall \theta > 0$ *существует точка* $x_0 \in S(E)$, *такая, что при* $\forall \varepsilon > 0$ *для некоторого* $E_1 \in B^0$ *соотношение* (5β) *выполняется при любом* $y \in \gamma_\theta(\varepsilon;\ x_0,\ B) \cap E_1$.

Вместе с тем для любого $\theta > 0$ и $E_0 \in \boldsymbol{B}^0$ существует такая точка $z_0 \in S(E_0)$, что сфера $\frac{1}{r(z_0)} S_r(E_0)$ с точностью θ лежит внутри сферы $S(E_0)$. Для z_0 таким же способом, как и выше, получаем вторую часть леммы 1 β.

Лемма 1 δ. *В условиях леммы 1* β *в каждом подпространстве* $E \in \boldsymbol{B}^0$ *и для* $\forall \theta > 0$ *существует точка* $z_0 \in S(E)$ *такая, что при* $\forall \varepsilon > 0$ *для некоторого* $E \in \boldsymbol{B}^0$ *соотношение*

$$\delta^0(\varepsilon;\ z_0;\ B) \leqslant \left\| \frac{z_0}{r(z_0)} + \frac{c_2}{c_1} \varepsilon \frac{y}{r(y)} \right\| - 1 + \theta \leqslant$$

$$\leqslant \delta^0\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ z_0,\ B_r\right) + 2\theta \tag{5δ}$$

выполняется при любом $y \in \Delta_\theta(\varepsilon;\ z_0;\ B) \cap E$, *где* $\Delta_\theta(\varepsilon;\ z_0;\ B) = \{y \in S(B) : | \delta^0(\varepsilon;\ z_0,\ B) + 1 - \| z_0 + \varepsilon y \| \,/ < \theta\}$.

Замечание 1. (к лемме 1 β). Пусть $\beta^0(\varepsilon_0;\ x, B) \equiv 0$. Тогда в формулировке леммы 1 β соотношение (5β) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ выполняется при любом $y \in E_0 \cap \gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0,\ B) \cap - \gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0,\ B)$. Другими словами,

$$\gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0,\ E_0) \cap - \gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0;\ E_0) \subset$$

$$\subset \gamma_{2\theta}\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon_0;\ x_0,\ E_{0r}\right) \cap - \gamma_{2\theta}\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon_0;\ x_0,\ E_{0r}\right).$$

Действительно, при доказательстве леммы 1 β в неравенстве (4) следует иметь в виду, что из соотношений $\| x_0 \pm y \| \leqslant 1 + \theta$, где $\| x_0 \| = 1$, следует $\| x_0 \pm y \| \geqslant 1 - \theta$. Поэтому нет надобности привлекать подпространство E_1 (см. рассуждения после неравенства (4)).

Ниже мы обозначаем

$$\gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0,\ B) = \gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0,\ B) \cap - \gamma_\theta(\varepsilon_0;\ x_0;\ B)$$

$$\text{и } \hat{\Delta}_\theta(\varepsilon;\ z,\ B) = \Delta_\theta \cap - \Delta_\theta.$$

Пример 1. $C_0[0,\ 1] \equiv C_0$ — непрерывные на $[0,\ 1]$ функции, такие, что $x(\theta) = x(1) = 0$.

Обозначим

$$C_0[t_1,\ t_2] = \{x \in C_0[0,\ 1] : x(\tau) = 0, \quad \text{при } \tau \notin [t_1,\ t_2]\}$$

$$H_{t_0} = \{x \in c_0 : x(t_0) = 0\}.$$

Пусть E^1 — совокупность гиперплоскостей в C_0, $r(x)$ — изоморфная норма в C_0 (пространство C_0 в этой норме будем обозначать C_r). Для каждой гиперплоскости H_{t_0} и $\varkappa > 0$ существует функция $x_{t_0} \in S(H_{t_0})$, к которой применимо замечание 1 к лемме 1 β. Рассмотрим совокупность таких функций:

$$A = \{x_t \in S(H_t)\}_t \in [0, 1].$$

Для любого $\varkappa > 0$ для каждой функции x_t существует θ_t, такое, что для любой функции

$$y(\tau) \in D(C_0[t - \theta_t, t + \theta_t)]: 1 - \varkappa \leqslant \|x_t \pm \varepsilon y\| \leqslant 1 + \varkappa$$

при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, т. е. $y(\tau)$ принадлежит множествам $\hat{\gamma}_\varkappa(\varepsilon; x_t, C_0) \equiv \gamma_\varkappa(\varepsilon; x_t, c_0) \cap - \gamma_\varkappa(\varepsilon; x_t, C_0)$ при всех ε, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, а значит, в силу замечания 1, $D(c_0[t - \theta_t, t + \theta_t)] \cap H_t \equiv D(c_0[t - \theta_t, t] + c_0[t, t + \theta_t])$ содержится в множестве

$$\gamma_{2\varkappa}\left(\frac{c_1}{c_2}\varepsilon;\ x_t, H_{t,r}\right),$$

где

$$c_1 r(x) \leqslant \|x\| \leqslant c_2 r(x).$$

Среди отрезков

$$\{R_t(\theta_t) = [t - \theta_t\ t + \theta_t]\}$$

выберем конечное покрытие [0,1]. Пусть такое покрытие образует отрезки, отвечающие $\{t_i\}$. Мы получаем, что существует $N = N(\varkappa, r)$ функций $\{x_{t_i}\} \subset S(C_0)$, таких, что алгебраическая сумма множеств

$$\{\hat{\gamma}_\varkappa(x_{t_i}, C_0) \equiv \bigcap_{0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1} \gamma_\varkappa(\varepsilon;\ x_{t_i}, C_0)\}_{i=1}^N$$

содержит $D(C_0)$, а значит, и $\frac{c_1}{c_2} D(C_r)$.

Таким образом, алгебраическая сумма множеств $\{\gamma_{2\varkappa}(x_{t_i}, C_r)\}_{i=1}^N$ содержит $\frac{c_1}{c_2} D(c_r) \cap E^{(N)}$, где $E^{(N)}$ — некоторое подпространство дефекта N.

Итак, пространство $c_0[0, 1]$ обладает следующим свойством[1]

$\forall A_1$ — для $\forall \{x_\alpha \in E^1_\alpha\}$, где $\{E^1_\alpha\} = E^1$ по любому $\varkappa > 0$ существует конечный набор $\{x_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$, такой, что

$$\sum_{i=1}^N \gamma_\varkappa(x_{\alpha_i}, C_0) \supset kD(C_0),$$

где $k > 0$ не зависит от $\varkappa > 0$.

[1] Далее E^1 обозначает совокупность всех подпространств дефекта 1.

В любой изоморфной норме $r(x)$ пространство c_r обладает свойством (свойство $\exists A_1$)

$$\exists A_1 : \exists \{x_\alpha \in E^1_\alpha\}_\alpha,$$

где $\{E^1_\alpha\} = \underset{N}{E^1}$ такие, что по любому $\varkappa > 0$ существует конечный набор $\{x_{\alpha_i}\}_{i=1}$, такой, что

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\gamma}_\varkappa (x_{\alpha_i}, c_r) \supset k(r) D(c_r) \cap E,$$

где $k(r) > 0$ не зависит от $\varkappa > 0$, E — некоторое подпространство дефекта N.

Из предыдущих рассуждений следует: если пространство B обладает свойством $\forall A_1$, то в любой изоморфной норме оно обладает свойством $\exists A_1$.

Отметим также, что пространство C_0, как это указано выше, обладает более сильным свойством $\forall A_c$: помимо $\forall A_1$ множество $\gamma_\varkappa(x_\alpha, c_0)$ для $\forall x_\alpha \in E^1_\alpha$ содержит шар $D(E)$ подпространства E, изометричного c_0.

Аналогично, в любой изоморфной норме C_r удовлетворяет условию $\exists A_c$: помимо $\exists A_1$ множество $\gamma_\varkappa(x_\alpha, C_r)$ для выбранных $x_\alpha \in E^1_\alpha$ содержит шар $k \cdot D(E)$, где k зависит лишь от $r(x)$, подпространства E, изоморфного C_r.

Пример 2. $L_1[0, 1]$.

Очевидно, что для любой функции $x(t) \in S(L_1)$ при любом $\theta > 0$ существует такое разбиение отрезка $[0,1]$ на интервалы $\{I_k = [t_{k-1}, t_k]\}_{k=1}^{n}$, где $t_0 = 0$ и $t_n = 1$, что при любом фиксированном k_0 для любой функции $y(t) \in L_1$ и $y(t) = 0$ при $t \in Ik_0$

$$\| x(t) + y(t) \| \overset{\theta}{\simeq} 1 + \| y(t) \|.$$

Таким образом, множество $\hat{\Delta}_0(\varepsilon;\ x,\ L_1)$ обладает следующим свойством $\forall A_2$: для $\forall x \in S(L_1)$ и при $\forall(\theta) > 0$ множество $\hat{\Delta}_0(x, L_1) = \bigcap_{\varepsilon \geqslant 0} \hat{\Delta}_\theta(\varepsilon;\ x,\ L_1)$ содержит конечный набор подпространств $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, изометричных L_1 и таких, что $\bigoplus_{l_1} \sum_{i=1}^{n} E_i = L_1$.

Обозначение $\bigoplus_{l_1} \sum_{1}^{n} E_i = L_1$ означает, что $\forall x \in L_1$ представимо однозначно в виде суммы $x = \sum x_i$, где $x_i \in E_i$ и $\| x \| = \sum \| x_i \|$.

Из леммы 1б следует, что любое k-изоморфное L_1 пространство B обладает следующим свойством $\forall A$: для любого $\theta > 0$ существует $x_\theta \in S(B)$ такой, что множество $\hat{\Delta}_\theta(x_\theta, B)$ содержит конечный набор подпространств $\{E_l\}_l$, k-изоморфных B и таких, что $\bigoplus\limits_{l_1} \sum_{i=1}^{n} D(E_l) \supset kD(B)$.

На этом мы закончим разбор примеров. Формулируемая ниже теорема 2 является объединением предложения 1 (пункт а) теоремы 2) и леммы 1 β и 1 δ (пункт б) теоремы 2). Формулировка теоремы громоздка; можно рассматривать эту теорему как метод, служащий для установления неизоморфности конкретных пространств. Ниже мы пользуемся обозначением E_α^n для подпространств дефекта n.

Теорема 2. 1) *Пусть $M \subset S(B)$ — произвольное множество, богатое в том смысле, что $\forall E^n \in \boldsymbol{B}^0$, $M \cap E^n \neq \varnothing$, и пусть для произвольного набора подпространств*

$$\{E_{(x)}^{n(x)} \in B^0\}$$

совокупность множеств

$$k_\theta(\beta) = \{(\gamma_\theta(\varepsilon;\ x, B) \cap E_{(x)}^{n(x)})_{x \in M}\}$$

обладает некоторым свойством[1] *A (формулируемом в линейных и топологических терминах; важно лишь, что не в изометрических терминах), не зависящим*[2] *от множества M и набора $\{E_{(x)}^{n(x)}\}$. Пусть некоторое пространство B_1 изоморфно B и оператор T, $TB = B_1$ устанавливает изоморфизм; при этом*

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant a. \tag{6}$$

Тогда для $\forall\ \theta > 0$ существует[3] *множество $M_0 \subset S(B_1)$, богатое в указанном смысле (в смысле (1)), и набор подпространств $\{E_{(x)}^{n_0 x}\}_{x \in M_0} \subset B^0$, для которых*

а) $$\beta^0(\varepsilon;\ T^{-1}x,\ B) \geqslant \beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon,\ x,\ B_1\right) - \theta \tag{7}$$

для $\forall\ x \in M_0$,

б) *совокупность множеств*

$$k_\theta'(\beta) = \{m(x) \cap E_{(x)}^{n_0(x)}\}_{x \in M_0} \tag{8}$$

для некоторых

$$m(x) \subset \Big[y \in S(B_1) : \beta^0(\varepsilon;\ T^{-1}x,\ B) \geqslant \left\|x + \frac{\varepsilon}{a}y\right\|_1 - \\ - \frac{\theta}{2} - 1 \geqslant \beta^0\left(\frac{1}{a}\varepsilon;\ x,\ B_1\right) - \theta\Big]$$

обладает указанным выше свойством.

---

[1] Примеры различных свойств A мы видели выше.

[2] Подчеркивая это, будем писать, что пространство B обладает свойством $\forall A$.

[3] В этом случае мы пишем, что B обладает свойством $\exists A$

2) *Аналогичное утверждение имеет место и для совокупности*

$$k_\theta(\delta) = \{\Delta_0(\varepsilon;\ x,\ B) \cap E_{(x)}^{n(x)}\}_{x \in M}.$$

В этом случае вместо (8β) *берется*

$$k'_\theta\ (\delta) = \{n(x) \cap E_{(x)}^{n_0(x)}\}_{x \in M_0}. \tag{8}$$

для некоторых

$$n(x) \subset \Big[y\ \in S(B_1) : \delta^0(\varepsilon;\quad T^{-1}x,\ B) \leqslant \|x + a\varepsilon y\|_1 + \\ + \frac{\theta}{2} - 1 \geqslant \delta^0(a\varepsilon;\ x,\ B_1) + \theta\Big],$$

а вместо (7β) *для любых* $x \in M_0$ *выполняется*

$$\delta^0(\varepsilon;\ T^{-1}x,\ B) \leqslant \delta^0(a\varepsilon;\ xB_1) + \theta \tag{7δ}$$

Замечание 1. Утверждения теоремы имеют место и в том случае, если (6) выполняется при сужении T на некоторое подпространство с конечным дефектом.

Замечание 2. Если $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\beta^0(\varepsilon_0;\ x,\ B) \equiv 0$, то в теореме 2 вместо (8β) можно взять

$$m(x) \subset \gamma_\theta\left(\frac{1}{a}\,\varepsilon_0;\ x,\ B_1\right)$$

Использование замечания 1 к лемме 1 позволяет несколько упростить формулировку первой части теоремы 2.

Замечание 3. Пусть $\beta^0(\varepsilon_0;\ x,\ B) \equiv 0\ (\varepsilon_0 > 0)$ и пусть в теореме 2 множество $M \subset S(B)$ такое что

$$\forall\ E^1 \subset B\,(\mathrm{codim}\, E^1 = 1),\ \ A \cap E^1 \neq \varnothing$$

(т. е. менее богатое, чем в теореме 2). Тогда, дополнительно к изменениям, указанным в замечании 2), в теореме 2 можно считать $n(x) = n_0(x) = 1$, однако всюду вместо множества γ_θ следует рассматривать $\hat{\gamma}_\theta(\varepsilon_0;\ x,\ B)$. Действительно, в нашем случае пространство E_0 (см. замечание 1 к лемме 1 β) имеет коразмерность 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Банах С. Курс функционального анализа. Киев, «Наукова думка», 1948. 436 с.
2. Мильман В. Д. Геометрическая теория пространства Банаха. Ч. II. Геометрия единичной сферы. — УМН, 26, № 6, 1971, с. 73—149