УДК 517.55:517,948.32

В. А. Какичев, **канд. физ.-мат. наук**

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГОВЫХ БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ, ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ С ПЛОТНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

Это сообщение является непосредственным продолжением нашей статьи с аналогичным названием, опубликованной в данном выпуске сборника. Поэтому мы продолжаем нумерацию, принятую в предшествующей статье I.

Ниже, в 4°, отыскивается представление функции $F(z, w)$, голоморфной в круговой бицилиндрической области, интегралом типа Коши

$$\Phi(z, w) = K(\delta/\bar{q})(z, w)$$

в том случае, когда известны три из четырех его предельных значений $\Phi^{\pm\pm}(t, \omega)$, которые связаны соотношением

$$\delta/\bar{g} = \Phi^{++}(t\omega) - \Phi^{-+}(t\omega) - \Phi^{+-}(t, \omega) + \Phi^{--}(t, \omega),$$

причем одно из заданных предельных значений совпадает с $F(t, \omega)$. В этом случае четвертое предельное значение определяется решением задачи Гильберта (см. [5] и [6]) для соответствующей бицилиндрической области, а искомая вещественная функция $\delta(t, \omega)$ — непосредственно из равенства (1).

В 5° дана общая постановка задачи о представлении функций, голоморфных в круговых бицилиндрических областях, интегралами типа Коши с плотностью специального вида и показано, что такая задача равносильна некоторой краевой задаче, которую мы назвали задачей Гильберта для пары функций.

4°. Случай, когда задано три предельных значения

Ограничимся здесь рассмотрением только функции $F(z, w) \in H^{++}$, предполагая, что кроме $\Phi^{++}(t, \omega) = F(t, \omega)$, нам известны еще, например, предельные значения $\Phi^{\pm\mp}(t, \omega)$. В этих условиях, считая

$$\gamma_1(t, \omega) = \mathrm{Re}\,\{i\overline{g(t, \omega)}\,[\Phi^{+-}(t, \omega) + \Phi^{-+}(t, \omega) - \Phi^{++}(t, \omega)]\},$$

соотношение (1) преобразуем в условие задачи Гильберта

$$\mathrm{Re}\,\{i\overline{g(t, \omega)}\,\Phi^{--}(t, \omega)\} = \gamma_1 \quad (t, \omega) \tag{14}$$

для функции $\Phi(z, w) \in H^{--}$.

Пусть $n = l(\overline{g})$ и $\nu = \lambda(\overline{g})$ — частные индексы функции $g \in \in H$. Одно из необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (14) состоит в том, чтобы функция $g(t, \omega)$ имела регулирующий множитель $r(t, \omega) > 0$ относительно области $D^- \times \Delta^-$ (см. [5]). Допустим, что это так. Тогда существует функция $\varphi(z, w) \in H^{--}$, такая, что

$$r(t, \omega)\,\overline{g(t, \omega)} = t^n \omega^\nu \exp\{i\varphi^{--}(t, \omega)\}.$$

Полагая

$$\gamma(t, \omega) = \gamma_1(t, \omega)\, r(t, \omega),$$
$$\Psi^{--}(t, \omega) = i\Phi^{--}(t, \omega) \exp\{-i\varphi^{--}(t, \omega)\},$$
$$\Psi^{++}(z, w) = \overline{\Psi^{--}(1/\overline{z}, 1/\overline{w})}$$

и умножая обе части равенства (14) на $r(t, \omega)$, получаем задачу Гильберта

$$\mathrm{Re}\,\{t^n \omega^\nu \Psi^{--}(t, \omega)\} = \gamma(t, \omega), \tag{15}$$

приводящуюся к следующей вырожденной задаче линейного сопряжения:

$$\Psi^{++}(t, \omega) = -t^{2n}\omega^{2\nu}\Psi^{--}(t, \omega) + 2t^n \omega^\nu \gamma(t, \omega). \tag{16}$$

Если $n > 0$ и $\nu > 0$, то решение однородной ($\gamma \equiv 0$ в (16)) задачи (16_0) зависит от $(2n + 1)$ $(2\nu + 1)$ произвольных комплексных постоянных, а неоднородная задача (16) разрешима лишь при выполнении условий

$$\int_{T_2} \gamma(t, \omega)\, t^s \omega^\sigma \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega} = 0 \tag{17}$$

$$\begin{cases} s = 3n+1,\ 3n+2, \ldots \\ \sigma = \nu - 1,\ \nu - 2, \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} s = n+1,\ n-2, \ldots \\ \sigma = 3\nu+1,\ 3\nu+2, \ldots \end{cases}$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (17) задача (14) имеет решение

$$\Phi(z, w) = -iz^{-n} w^{-\nu} e^{i\varphi(z, w)} [\Pi(z, w) + P(z, w)],$$

где $\Pi(z, w)$ — частное решение задачи (14), а $P(z, w)$ — общее решение соответствующей однородной задачи, зависящее линейно от $(2n+1)(2\nu+1)$ произвольных вещественных постоянных [5].

Так как функция $\Phi(z, w))$ представима интегралом типа Коши, то должны выполняться еще и условия

$$\Phi(\infty, w) = 0 \text{ при } |w| > 1 \text{ и}$$
$$\Phi(z, \infty) = 0 \text{ при } |z| > 1, \tag{18}$$

в силу которых функция $P(z, w)$ на самом деле содержит только $(2n-1)(2\nu-1)$ произвольных вещественных постоянных.

Таким образом, если функция $g(t, \omega)$ имеет регулирующий множитель $r(t, \omega) > {}^\wedge$ относительно области $D^- \times \Delta^-$, функция $\gamma(t, \omega)$ удовлетворяет условиям (17), то при $n > 0$ и $\nu > 0$ функция $\Phi \in H^{--}$, удовлетворяющая условиям (14) и (18), а с нею и функция $\delta(t, \omega)$, решающая поставленную задачу, линейно зависит от $(2n-1)(2\nu-1)$ произвольных вещественных постоянных.

Немного сложнее, если $n \leqslant 0$ или $\nu \leqslant 0$. Пусть для определенности $n \leqslant 0$ и $\nu \leqslant 0$, а $g(t, \omega)$ по-прежнему имеет регулирующий множитель $r(t, \omega) > 0$. Тогда однородная задача (16_0) имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача (16) разрешима при выполнении тех же условий (17), среди которых имеется конечное подмножество условий, встречающихся в (17) дважды.

Если выполняются условия (17), решение (14) дает формула

$$\Phi(z, w) = -iz^{-n} w^{-\nu} e^{i\varphi(z, w)}\, \Pi(z, w),$$

где $\Pi(z, w)$ — частное решение задачи (15). Однако, чтобы удовлетворить условиям (18), надо потребовать, чтобы коэффициенты C_{ke} функции

$$e^{i\varphi(z, w)} \Pi(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \frac{C_{ke}}{z^k w^e}, \quad |z| > 1,$$
$$|w| > 1$$

обращались в нуль при $k = 0, 1, \ldots -n$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, 2 \ldots$, $l = 0, 1, \ldots -\nu$.

Функции $\varphi(z, w)$ и $\Pi(z, w)$ в конечном итоге выражаются через заданные функции $g(t, \omega)$, $F(t, \omega)$ и $Q(t, \omega) = \Phi^{+-}(t, \omega) + \Phi^{-+}(t, \omega)$. Вместе с тем требование, чтобы указанные выше коэффициенты C_{kl} обращались в нуль, не имеет конкретного адреса. Поэтому при $n \leqslant 0$ и $\nu \leqslant 0$ постановку задачи несколько уточним. Для этого положим

$$P(z, w) = \sum_{k=0}^{|n|} \sum_{\varkappa=0}^{|\nu|} p_{k\varkappa} z^k w^\varkappa,$$

$$\Phi(z, w) = K(\delta/\bar{g})(z, w),$$

$$\Phi^{+-}(z, w) = \sum_{k=0}^{|n|} a_k^-(w) z^k + \sum_{k=|n|+1}^{\infty} a_k^-(w) z^k \equiv$$
$$\equiv \xi^{+-}(z, \omega) + \eta^{+-}(z, w),$$

$$\Phi^{-+}(z, w) = \sum_{\varkappa=0}^{|\nu|} b_\varkappa^-(z) w^\varkappa + \sum_{\varkappa=|\nu|+1}^{\infty} b_\varkappa^-(z) w^\varkappa \equiv$$
$$\equiv \xi^{-+}(z, w) + \eta^{-+}(z, w).$$

Будем искать представление для $F(z, w) \in H^{++}$ в виде суммы $\Phi(z, w) + P(z, w)$, предполагая, что функции $\eta^{\pm\mp(z, w)}$ заданы, а функции $\xi^{\pm\mp}(z, w)$ и полином $P(z, w)$ подлежат определению. Нетрудно видеть, что функция

$$\Psi(t, \omega) = t^n \omega^\nu [\Phi^{--}(t, \omega) - P(t, \omega) + \xi^{+-}(t, \omega) + \xi^{-+}(t, \omega)]$$

является предельным значением функции $\Psi(z, w)$ класса H^{--}.

Если $r(t, \omega) > 0$ — регуляризующий множитель функции $\overline{g(t, \omega)}$, то полагая

$$\gamma(t, \omega) = r(t, \omega)\{ig(t, \omega)[\eta^{+-}(t, \omega) +$$
$$+ \eta^{-+}(t, \omega) - F(t, \omega)\},$$

из условия (1) найдем, что

$$\gamma(t, \omega) = r(t, \omega) \operatorname{Re}\{\overline{ig(t, \omega)}\, t^{-n} \omega^{-\nu} \Psi(t, \omega)\} =$$
$$= \operatorname{Re}\{ie^{i\varphi^{--}(t, \omega)} \Psi(t, \omega)\} \equiv \operatorname{Re} \psi^{--}(t, \omega).$$

Если функция $\gamma(t, \omega)$ удовлетворяет условиям (17), то решая задачу Гильберта $\operatorname{Re} \psi^{--}(t, \omega) = \gamma(t, \omega)$, получим

$$\Psi(z, w) = -i\psi(z, w) \exp\{-i\varphi(z, w)\}.$$

Приравнивая теперь коэффициенты Фурье в равенстве

$$-i\psi^{--}(t, \omega)\, e^{-i\varphi^{--}(t, \omega)}\, t^{-n} \omega^{-\nu} =$$
$$= \Phi^{--}(t, \omega) - P^{++}(t, \omega) + \xi^{+-}(t, \omega) + \xi^{-+}(t, \omega),$$

найдем функции $\xi^{\pm\mp}(z, w)$, полином $P(z, w)$ и функцию Φ^{--} (z, w). Подставляя значения $\Phi^{--}(t, \omega)$ и $\Phi^{\pm\mp}(t, \omega)$ в равенство (1), единственным образом определим функцию $\delta(t, \omega)$.

Замечание 3. Исследование случаев $n \leqslant 0, \nu > 0$ и $n > 0, \nu \leqslant 0$ проводится точно так же, и мы его опускаем.

Если $F(z, w) \in H^{++}$ и известны еще предельные значения $\overset{+-}{\Phi^{--}}(t, \omega)$, $(\overset{-+}{\Phi^{--}}(t, \omega))$, то вместо задачи Гильберта относительно функции класса H^{--}, как это было выше, получим задачу Гильберта для функции класса H^{-+} (H^{+-}).

Следуя [1], допустим теперь, что функция $F(z, w)$ имеет производную

$$F_{pq}(z, w) = \frac{\partial^{p+q} F(z, w)}{\partial z^p \partial w^q}$$

класса H^{++}, и найдем для нее интегральное представление, такое, что

$$F_{pq}(z, w) = K(\delta/\bar{g})(z, w) + P(z, w),$$

где $g\overline{(t, \omega)}$ — известная функция класса H с частными индексами n и ν, имеющая регуляризирующий множитель $r(t, \omega) > 0$ относительно области $D^- \times \Delta^-$; $\delta(t, \omega)$ — вещественная функция класса H и $P(z, w)$ — многочлен, подлежащие определению. Как и выше, будем предполагать, что, кроме предельного значения $F_{pq}(z, w)$, нам еще заданы предельные значения $\Phi^{\pm\mp}(t, \omega)$ интеграла $K(\delta/\bar{g})(z, w)$.

Покажем, что

$$F(z, w) = f(z, w) + h(z, w),$$

где

$$h_{pq}(z, w) = \frac{\partial^{p+q} h(z, w)}{\partial z^p \partial w^q} = P(z, w),$$

$$f(z, w) = \frac{(-1)^{p+q}}{(p-1)!\,(q-1)!} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{T_2} \frac{\delta(t, \omega)}{g(t, \omega)} \frac{\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right)}{(t-z)^{1-p}} \frac{\ln\left(1 - \frac{w}{\omega}\right)}{(\omega - w)^{1-q}} dt\, d\omega, \tag{20}$$

причем ветви логарифмов выбраны так, что они исчезают соответственно при $z = 0$ и $w = 0$. Заметим еще, что функция $h(z, w)$ с точностью до многочлена совпадает с некоторой функцией вида

$$\sum_{r=0}^{p-1} z^r u_r(w) + \sum_{\rho=0}^{q-1} w^\rho v_\rho(z). \tag{21}$$

в которой функции $u_r(w)$, $v_\rho(z)$ голоморфны соответственно при $|z| < 1$, $|w| < 1$ и, возможно, имеют в начале координат нули определенного порядка.

Если $n > 0$ и $\nu > 0$, то, положив $P(z, w) \equiv 0$, мы придем к задаче интегрального представления функции $F_{pq}(z, w)$, рассмотренной выше. Допустим, что такая задача разрешима и, следовательно, $\delta(t, \omega)$ линейным образом зависит от $(2n-1)(2\nu-1)$ произвольных вещестнейных постоянных $C_{s\sigma}$, $s=0, 1, \ldots, 2n-1, \sigma=0, 1, \ldots, 2\nu-1$. Поэтому и функционалы $\tilde{f}_{kl}=f_{kl}(0, 0)/k!\,l!$ линейно зависят от этих постоянных. Для определения постоянных $C_{s\sigma}$ возьмем произвольный набор из $2n\nu-n-\nu$ пар индексов k и l, удовлетворяющих неравенствам

$$0\leqslant l\leqslant q-1,\ k\geqslant 0 \text{ и } 0\leqslant k\leqslant p-1,\ l\geqslant 0,$$

и для таких индексов положим

$$\tilde{h}_{kl}=h_{kl}(0, 0)/k!\,l!=0.$$

В результате получим систему уравнений

$$\tilde{F}_{kl}=\tilde{f}_{kl},\quad \tilde{F}_{kl}=F_{kl}(0, 0)/k!\,l!,$$

содержащую $2n\nu-n-\nu$ комплексных и, значит, $4n\nu-2n-2\nu$ вещественных равенств. Для определенности положим $k=p-1$, $l=q, q+1, \ldots, 2n\nu-n-\nu-1$ и присоединим к этой системе еще, например, два таких уравнения:

$$\operatorname{Re}\tilde{F}_{p-1,\,j}=\operatorname{Re}\tilde{f}_{p-1,\,j};\quad Im\,\tilde{F}_{p-1,\,j}=Im\,\tilde{f}_{p-1,\,j}+\tilde{h}_{p-1,\,j},$$

где $j=2n\nu-n-\nu$.

В результате получим систему, содержащую $(2n-1)(2\nu-1)+1$ уравнений, которая, как нетрудно убедиться непосредственно, имеет единственное решение. Решив эту систему, определим постоянные $C_{\varkappa\sigma}$, а, значит, и единственным образом зависящую от них функцию $\delta(t, \omega)$. Зная $\delta(t, \omega)$, найдем функцию $f(z, w)$ и коэффициент $h_{p-1,\,j}$ с $\operatorname{Re}h_{p-1,\,j}=0$ и $j=2n\nu-n-\nu$. Оставшуюся часть функции $h(z, w)$, имеющую вид (21), можно теперь по функциям $F(z, w)$ и $f(z, w)$ определить единственным образом, например, с помощью равенств

$$\begin{gathered}v_\rho(z)=F_{0\rho}(z, 0)-f_{0\rho}(z, 0),\ \rho=0, 1, \ldots, q-1,\\ u_r(w)=F_{rq}(0\, w)-f_{rq}(0, w),\ r=0, 1, \ldots, p-2,\\ u_{p-1}(w)=F_{jq}(0, w)-f_{jq}(0\, w),\ j=2n\nu-n-\nu+1.\end{gathered}$$

Итак, если при $n>0$ и $\nu>0$ задача о представлении функции $F_{pq}(z, w)$ разрешима, то сама функция $F(z, w)$ представима в виде суммы интеграла (20) и функции $h(z, w)$ вида (21), причем функции $f(z, w)$ и $h(z, w)$ определяются по $F_{pq}(z, w)$ и $\Phi^{\pm\mp}(zw)$ единственным образом.

Относительно других случаев ограничимся следующим замечанием.

Замечание 4. Если $n\leqslant 0$ и $\nu\leqslant 0$, то положим

$$P(z, w)=\sum_{k=0}^{|n|}\sum_{\varkappa=0}^{|\nu|}C_{k\varkappa}z^k w^\varkappa$$

и будем, как и выше, искать интегральное представление для функции $F_{pq}(z, w)$ с помощью интеграла типа Коши $k(\delta/\bar{g})(z, w)$. Если она разрешима, то функция $\delta(t, \omega)$ и полином $P(z, w)$ определяются однозначно. После этого по функции $\delta(t, \omega)$ строим интеграл (20) и полагаем

$$h(z, w) = F(z, w) - f(z, w).$$

Изучение случаев $n > 0$, $\nu \leqslant 0$ и $n \leqslant 0$, $\nu > 0$ проводится по аналогичной схеме.

5°. О задачах Гильберта для пары функций

Рассмотренные в 2°—4° задачи об интегральных представлениях функций, голоморфных в круговых бициндрических областях, являются частным случаем следующей общей задачи.

Пусть для определенности $F(z, w) \in H^{++}$ и надо найти ее интегральное представление с помощью интеграла типа Коши $K(\delta/\bar{g})(z, w)$, предполагая, что $\Phi^{++}(t, \omega) = F(t, \omega)$, а остальные предельные значения этого интеграла удовлетворяют следующему линейному соотношению:

$$\Phi^{+-}(t, \omega) = a(t, \omega)\,\Phi^{-+}(t, \omega) + b(t, \omega)\,\Phi^{--}(t, \omega) + c(t, \omega),$$

где a, b, c — известные функции класса H.

Естественно ожидать, что вырожденная краевая задача линейного сопряжения (22) разрешима не при всех наперед заданных функциях a, b, c (см., например, [4]). Если бы мы смогли решить задачу (22), то определив из нее функции $\Phi^{--}(t, \omega)$ и $\Phi^{\pm\mp}(t, \omega)$, по краевому условию (1) нашли бы $\delta(t, \omega)$ и тем самым искомый интеграл типа Коши.

К сожалению, в настоящее время мы еще не умеем решать задачи типа (22).

Покажем, что задача (1), (22) равносильна некоторой краевой задаче, которую мы назовем задачей Гильберта для пары функций. В свою очередь такая задача Гильберта будет приведена к задаче линейного сопряжения специального вида.

Сопоставив (1) и (22), найдем, что

$$\delta/\bar{g} = b(t, \omega)\,\Phi^{--}(t, \omega) - [a(t, \omega) - 1]\,\Phi^{-+}(t, \omega) + \\ + c(t, \omega) + \Phi^{++}(t, \omega),$$

и поэтому

$$\operatorname{Re}\{p(t, \omega)\,\Phi^{--}(t, \omega)\} = \operatorname{Re}\{q(t, \omega)\,\Phi^{-+}(t, \omega)\} + \gamma(t, \omega), \qquad (23)$$

где

$$p(t, \omega) = ib\bar{g}, \quad q(t, \omega) = i(a+1)\bar{g}, \quad \gamma(t, \omega) = \operatorname{Re}\{i(c + \Phi^{++})\,\bar{g}\}.$$

Задачу о нахождении пары голоморфных функций

$$\Phi^{--}(z, w), \ \Phi^{-+}(z, w)$$

по краевому условию (23) и будем называть задачей Гильберта для пары функций.

Кроме задачи (23), можно сформулировать еще три такие задач Гильберта для пар функций:

$$\operatorname{Re}(p\Phi^{--}) = \operatorname{Re}(q\Phi^{+-}) + \gamma(t, \omega) \tag{24}$$

и

$$\operatorname{Re}(p\Phi^{++}) = \operatorname{Re}(q\Phi^{\mp\pm}) + \gamma(t, \omega). \tag{25}$$

Нетрудно показать, что задачи, изученные в 2°—4°, являются частными случаями задач (23) — (25). Например, если $b = -a = 1$, то задача (23) в силу того, что $q = 0$, совпадает с задачей Гильберта (14), а если $b = 1$, $a = 0$, то она превращается в задачу (6) и т. д.

Ограничиваясь для определенности задачей (23), покажем, как ее можно привести к задаче линейного сопряжения, и установим связь между их решениями.

Каждой функции $\varphi = (z, w)$, голоморфной в одной из четырех круговых бицилиндрических областей $D^{\pm} \times \Delta^{\pm}$, поставим в соответствие функцию

$$\varphi_*(z, w) = \overline{\varphi(1/\bar{z}, 1/\bar{w})}$$

Введенное здесь отображение $*$ является инволюцией $(\varphi_*)_* = \varphi(z, w)$, а функция $0{,}5\,[\varphi(z, w) + \varphi_*(z, w)]$ инвариантна относительно этой инволюции.

Отображение $*$ каждой функции класса $\overset{++}{H^{-+}}\,(\overset{--}{H^{+-}})$ ставит в соответствие функцию класса $\overset{--}{H^{+-}}\,(\overset{++}{H^{-+}})$, а например, паре функций $\overset{++}{\Phi^{-+}}(z, w)$ — пару функций

$$\overset{--}{\Phi^{+-}}(z, w) = \overset{++}{\Phi_*^{-+}}(z, w)$$

и определяет во всем множестве

$$\tilde{C}^2 = C^2 \setminus \{(z, w)\colon\ |z| = 1 \ \text{ или } |w| = 1\}$$

кусочно-голоморфную функцию $\tilde{\Phi}(z, w)$, совпадающую с $\overset{++}{\Phi^{-+}}(z, w)$ при $(z, w) \in D^{\pm} \times \Delta^{+}$ и с $\overset{--}{\Phi^{+-}}(z, w) = \overset{++}{\Phi_*^{-+}}(z, w)$ при $(z, w) \in D^{\mp} \times \Delta^{-}$.

Функция $\tilde{\Phi}(z, w)$, очевидно, ограничена во всех бесконечно удаленных точках $\tilde{C}^2$ и обладает следующим свойством симметрии:

$$\tilde{\Phi}(z, w) = \tilde{\Phi}_*(z, w)\ \forall (z, w) \in \tilde{C}^2. \tag{26}$$

Учитывая равенства $t\bar{t} = 1$ и $\omega\bar{\omega} = 1$, находим, что

$$\overset{--}{\Phi^{+-}}(t, \omega) = \overline{\overset{++}{\Phi^{-+}}(t, \omega)} = \overset{++}{\Phi_*^{-+}}(t, \omega). \tag{27}$$

Заметим еще, что интеграл типа Коши $K(\Phi_*^{\overset{++}{-+}})(z, w)$ при $|z| \gtrless 1$ и $|w| > 1$ определяет функцию класса $H^{\overset{--}{+-}}$.

Отсюда, если, например,

$$f(t, \omega) = F^{++} - F^{+-} - F^{-+} + F^{--}$$

и

$$\overline{f(t, \omega)} = \hat{F}^{++} - \hat{F}^{+-} - \hat{F}^{-+} + \hat{F}^{--},$$

то

$$F^{\overset{++}{--}}(z, w) = \hat{F}^{\overset{--}{++}}(z, w),$$
$$F^{\overset{-+}{+-}}(z, w) = \hat{F}^{\overset{+-}{-+}}(z, w),$$

и наоборот.

Вернемся к краевой задаче (23). Полагая

$$\tilde{\Phi}^{\overset{--}{-+}}(z, w) = \Phi^{\overset{--}{-+}}(z, w),$$
$$\tilde{\Phi}^{\overset{++}{+-}}(z, w) = \Phi_*^{\overset{--}{-+}}(z, w),$$

условие (23) заменяем таким:

$$\overline{p(t, \omega)}\, \tilde{\Phi}^{++}(t, \omega) - q(t, \omega)\, \tilde{\Phi}(t, \omega) - \overline{q(t, w)}\, \tilde{\Phi}^{+-}(t, \omega) + p(t, \omega)\, \tilde{\Phi}^{--}(t, \omega) = 2\gamma(t, \omega). \tag{28}$$

Исходная задача (23) и задача линейного сопряжения (28) неравносильны: каждое решение (23) удовлетворяет условию (28), а обратное — неверно.

Для получения общего решения задачи (23) из общего решения (28) надо взять любое частное решение

$$\{\tilde{\Phi}_1^{\overset{++}{--}}(z, w),\ \tilde{\Phi}_1^{\overset{-+}{+-}}(z, w)\}$$

задачи (28) и построить по нему частное решение

$$\Phi_1^{\overset{--}{-+}}(z, w) = \frac{1}{2}\{\tilde{\Phi}_1^{\overset{--}{-+}}(z, w) + \tilde{\Phi}_{1^*}^{\overset{++}{+-}}(z, w)\}$$

задачи (23). Далее из пространства всех линейно независимых решений над полем комплексных чисел однородной ($\gamma = 0$ в (28)) задачи (28_0) надо выделить подпространство всех ограниченных решений

$$\{\tilde{\Phi}_0^{\overset{++}{--}}(z, w),\ \tilde{\Phi}^{\overset{-+}{+-}}(z, w)\},$$

обладающих свойством симметрии (26). Тогда совокупность всех пар $\tilde{\Phi}_0^{\overset{--}{-+}}(z, w)$ линейно независимых над полем вещественных чисел и образует базис пространства решений соответствующей однородной задачи (23_0).

В заключение заметим, что решение задачи (28) нам известно только в некоторых исключительных случаях [4, 7, 8]. В частности, в [8] описано решение задачи (28) при $p = q$, когда она имеет вид

$$\Phi^{++}(t, \omega) - \tilde{\Phi}^{+-}(t, \omega) = \frac{p(t, \omega)}{p(t, \omega)} [\tilde{\Phi}^{-+}(t, \omega) - \tilde{\Phi}^{--}(t, \omega)] +$$
$$+ 2\gamma(t, \omega)\overline{/p(t, \omega)}.$$

6° Добавление

Как показал более тщательный анализ, условие

$$g/X^{++} = S(g/X^{++}),$$

сформулированное в пункте 6.1° [4] как необходимое и достаточное для разрешимости задачи

$$F^{++}(t, \omega) = G(t, \omega) F^{--}(t, \omega) + g(t, \omega), \quad g \in H \tag{29}$$
$$G = t^l \omega^\lambda X^{++}(t, \omega)/X^{--}(t, \omega) \in H,$$
$$l = l(G), \ \lambda = \lambda(G),$$

является таковым только при $l < 0$ и $\lambda < 0$ и достаточным в остальных случаях.

Рассмотрим эти три случая.

Положим

$$g/X^{++} = \psi^{++} - \psi^{+-} - \psi^{-+} + \psi^{--}$$

и перепишем краевое условие (29) при $l \geqslant 0$ и $\lambda \geqslant 0$ следующим образом:

$$\psi^{+-} + \psi^{-+} + \left(\frac{F^{++}}{X^{++}} - \psi^{++}\right) - t^l\omega^\lambda \left(\frac{F^{--}}{X^{--}} + t^{-l}\omega^{-\lambda}\psi^{--}\right) = 0.$$

Используя теперь решение элементарной задачи, приведенное в [8], из последнего равенства найдем, что задача (29) разрешима лишь при выполнении условий

$$z^{-l}\psi^{+-}(z, w) \in H_0^{--} \ \text{ и } \ w^{-\lambda}\psi^{-+}(z, w) \in H_0^{--},$$

и ее решение имеет вид

$$F^{++}(z, w) = X^{++}(z, w)[\psi^{++}(z, w) + P_{l-1, \lambda-1}(z, w)],$$
$$F^{--}(z, w) = -X^{--}(z, w)[\tilde{\psi}^{--}(z, w) + z^{-l}w^{-\lambda}P_{l-1, \lambda-1}(z, w)],$$

где

$$\tilde{\psi}^{--}(z, w) = K\left[t^{-l}\omega^{-\lambda}\left(\frac{g}{X^{++}} - \psi^{++}\right)\right](z, w),$$
$$(z, w) \in D^- \times \Delta^-,$$

а $P_{l-1,\lambda-1}(z, w)$ — произвольный многочлен степени не выше $l-1$ и $\lambda - 1$ соответственно по z и w.

Аналогичными рассуждениями убедимся, что задача (29) при $l < 0$ и $\lambda \geqslant 0$ ($l \geqslant 0$ и $\lambda < 0$) разрешима при выполнении следующих необходимых и достаточных условий разрешимости:

$$\psi^{+-} \equiv 0,\ z^{-l}\psi^{-+} \in H_0^{-+},\ w^{-\lambda}\psi^{-+} \in H_0^{--},$$
$$z^{-l}\psi^{--} \in H_0^{--}$$
$$(\psi^{-+} \equiv 0,\ w^{-\lambda}\psi^{+-} \in H_0^{+-},\ z^{-l}\psi^{+-} \in H_0^{--},$$
$$w^{-\lambda}\psi^{--} \in H_0^{--}),$$

а ее (единственное в этом случае) решение определяется по формулам

$$F^{++}(z, w) = X^{++}(z, w)\,\psi^{++}(z, w),$$
$$F^{--}(z, w) = -X^{--}(z, w)\,\psi^{--}(z, w).$$

Точно так же надо рассуждать и при решении двойственной задачи

$$F^{+-}(t, \omega) = G(t, \omega)\,F^{-+}(t, \omega) + g(t, \omega),\ g \in H, \tag{30}$$
$$G = t^l\omega^\lambda X^{+-}(t, \omega)/X^{-+}(t, \omega) \in H,\ l = l(G),\ \lambda = \lambda(G).$$

Соответствующие изменения необходимо внести в работу [9], а также в [10] и [11], опирающиеся на решения задач (29) и (30), приведенные в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 634. с.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962. 599. с.
3. Какичев В. А. Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных. — «Учен. зап. Шахтинского пединститута», 1959, т. II, вып. 6, с. 25—90.
4. Какичев В. А. Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 5. Харьков, 1967, с. 37—58.
5. Какичев В. А. Задача Гильберта для функций, голоморфных в бикруге и некоторые ее приложения. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 18. Харьков, 1973, с. 3—18.
6. Бородин М. А. Краевые задачи для голоморфных функций в пространствах одного или нескольких комплексных переменных. Автореф. канд. дис., Донецк, 1969.
7. Какичев В. А. Об одной задаче линейного сопряжения для бицилиндрических областей и ее приложениях. — Материалы Всесоюзной конференции по краевым задачам». Казань, 1970, с. 127—130.
8. Какичев В. А. Методы решения краевых задач линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 14, Харьков, 1971, с. 3—15.
9. Какичев В. А. Краевые задачи линейного сопряжения для функций голоморфных в бицилиндрических областях. — «Докл. АН СССР», 1968, т. 178, № 5, с. 1003—1006.

10. Какичев В. А. Вырожденные двумерные сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши для бицилиндрических областей. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 7. Харьков, 1968, с. 13—19.
11. Какичев В. А. О некоторых двумерных бесконечных системах линейных алгебраических уравнений типа свертки, разрешимых в замкнутом виде. — «Сообщения на II конференции общества», Ростов-на-Дону, 1969, с. 99—109.