УДК 517.55:517.948.32

В. А. Какичев, **канд. физ.-мат. наук**

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГОВЫХ БИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ, ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ С ПЛОТНОСТЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

1°. **Введение.** В теории функций одного комплексного переменного известную роль играют различные интегральные представления функций, плотность которых обладает предписанными свойствами. Так, в [1, 2] уделено большое внимание представлениям голоморфных функций интегралами типа Коши с плотностью вида

$$\delta(t)/\overline{g(t)},$$

где $g(t) \neq 0$ — известная функция, непрерывная по Гельдеру $(g \in H)$;

$\delta(t)$ — искомая вещественная или чисто мнимая функция класса H.

Ниже рассматриваются аналогичные вопросы для функций, голоморфных в одной из четырех круговых бицилиндрических областей

$$D^{\pm} \times \Delta^{\pm} = \{(z, W) : |z| \lesseqgtr 1, \quad |W| \lesseqgtr 1\}$$

и удовлетворяющих на общем остове

$$T_2 = \{(t, \omega) : |t| = 1, |\omega| = 1\}$$

границ этих областей условию Гельдера.

Заметим, что уже в самой постановке задач при $n = 1$ и $n = 2$ имеется существенное различие. Следуя схеме случая $n = 1$, попытаемся сформулировать одну такую задачу.

Пусть функция $F(z, w)$ голоморфна в $D^+ \times \Delta^+$ и непрерывна по Гельдеру на T_2. Спрашивается, представима ли она интегралом типа Коши

$$K(\delta/\bar{g})(z, w) = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{T_2} \frac{\delta(t, \omega)}{\bar{g}(t, \omega)} \frac{dt\, d\omega}{(t-z)(\omega - w)},$$

в котором

$$(z, w) \in D^+ \times \Delta^+, \; g(t, \omega) = a + ib$$

— известная функция класса H, отличная от нуля на T_2; $\delta(t, \omega)$ — искомая вещественная или чисто мнимая функция того же класса. Не ограничивая общности, будем считать, что $|g| = 1$.

Интеграл $K(\delta/\bar{g})$ определяет четыре функции $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$, голоморфные соответственно в областях $D^\pm \times \Delta^\pm$, причем функции $\Phi^{--}(z, w)$ и $\Phi^{\pm\mp}(z, w)$ исчезают во всех бесконечно удаленных точках соответствующих областей, а плотность $\delta/\bar{g}$ удовлетворяет равенству [3]

$$\delta/\bar{g} = \Phi^{++}(t, \omega) - \Phi^{+-}(t, \omega) - \Phi^{-+}(t\omega) + \Phi^{--}(t, \omega), \qquad (1)$$

в котором $\Phi^{\pm\pm}(t, \omega)$ являются предельными значениями функций $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$ при стремлении точки $(z, w) \in D^\pm \times \Delta^\pm$ к точке $(t, \omega) \in T_2$.

Равенство (1) содержит две (g и $\Phi^{++}(t, \omega) = F(t, \omega)$) известные и четыре ($\delta$, $\Phi^{--}(t, \omega)$ и $\Phi^{\pm\mp}(t, \omega)$) неизвестные функции класса H, в то время как при $n = 1$ неизвестных и известных функций в аналогичном соотношении по две (см. [1]). Поэтому поставленная здесь задача недоопределена, и ее необходимо уточнить. Чтобы выяснить все возникающие трудности при постановке таких задач, в 2° детально рассмотрен случай, когда $g(t, \omega) = i$, а искомая функция $\delta(t, \omega)$ вещественна. Соответствующие уточнения в постановку других задач будем вносить по мере необходимости, а сейчас заметим, что мы систематически используем без специальных указаний результаты и обозначения из работы [4] и что распространение полученных ниже результатов на случай $n > 2$ представляет лишь технические трудности.

2°. Случай, когда $g = i$. Сначала рассмотрим более простой вопрос о представлении функций, голоморфных в произвольных бицилиндрических областях интегралами Коши.

Функция $F(z, w) \in H^{++}$ всегда представима интегралом Коши

$$F(z, w) = K(F^{++})(z, w), \quad (z, w) \in D^+ \times \Delta^+.$$

Если же функция $F(z, w)$ принадлежит классу H^{--} или $H^{\pm\mp}$, то подобное представление уже невозможно. В самом деле, если $F(z, w) \in H^{--}$, то интеграл Коши $K(F^{--})(z, w)$ исчезает в бесконечно удаленных точках области $D^- \times \Delta^-$, чего нельзя утверждать относительно произвольной функции из класса H^{--}

Тем не менее

$$F(z, w) = K(F^{--})(z, w) + F(z, \infty) + F(\infty, w) - F(\infty, \infty)$$

при $(z, w) \in D^- \times \Delta^-$. Отметим еще одно полезное представление функции $F(z, w) \in H^{--}$ интегралом Коши:

$$F(z, w) = zwK\left(\frac{F^{--}}{t\omega}\right)z, w, \ (z, w) \in D^- \times \Delta^-.$$

Наконец, если функция $F(z, w) \in H^{+-}$ ($\in H^{-+}$), то она представима в виде суммы

$$K(F^{+-})(z, w) + F(z, \infty)\,(K(F^{-+})(z, w) + F(\infty, w))$$

и в виде произведения

$$wK\left(\frac{F^{+-}}{\omega}\right)(z, w)\left(zK\left(\frac{F^{-+}}{t}\right)(z, w)\right).$$

Вернемся теперь к основной задаче этого пункта. Полагая в (1) $g = i$, найдем, что

$$\operatorname{Re}\{\Phi^{++}(t, \omega) - \Phi^{+-}(t, \omega) - \Phi^{-+}(t, \omega) + \Phi^{--}(t, \omega)\} = 0. \quad (2)$$

Предполагая известной одну из четырех функций $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$, удовлетворяющих краевому условию (2), найдем из него три остальные.

Сначала допустим, что задана функция $\Phi^{++}(z, w)$. Учитывая, что искомые функции $\Phi^{\mp\pm}(z, w)$ и $\Phi^{--}(z, w)$ исчезают в бесконечно удаленных точках, положим $\alpha = \Phi^{++}(0, 0)$,

$$\varphi^+(z) = \Phi^{++}(z, 0) - \alpha\psi^+(w) = \Phi^{++}(0, w) - \alpha;$$
$$\psi^{++}(z, w) = \Phi^{++}(z, w) - \varphi^+(z) - \psi^+(w) - \alpha;$$
$$\varphi^-(z) = \Phi^{-+}(z, 0), \ \psi^{-+}(z, w) = \Phi^{-+}(z, w) - \varphi^-(z);$$
$$\psi^-(w) = \Phi^{+-}(0, w), \ \psi^{+-}(z, w) = \Phi^{+-}(z, w) - \psi^-(w).$$

В этих обозначениях краевое условие (2) можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\{[\psi^{++}(t, \omega) + \Phi^{--}(t, \omega)] - [\psi^{+-}(t, \omega) + \psi^{-+}(t, \omega)] +$$
$$+ [\varphi^+(t) - \varphi^-(t)] + [\varphi^+(\omega) - \psi^-(\omega)] + \alpha\} = 0. \quad (3)$$

Разлагая все функции, входящие в последнее равенство, в ряды Фурье по степеням $t^k\omega^l$ и учитывая равенства $t\bar{t} = 1$, $\omega\bar{\omega} = 1$, убедимся, что равенство (3) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}\alpha = 0,$$
$$\varphi^-(z) = \overline{\varphi^+(1/\bar{z})}, \quad \psi^-(w) = \overline{\psi^+(1/\bar{w})},$$
$$\Phi^{--}(z, w) = -\overline{\psi^{++}(1/\bar{z}, 1/\bar{w})},$$
$$\psi^{+-}(z, w) = -\overline{\psi^{-+}(1/\bar{z}, 1/\bar{w})}.$$

Следовательно, если $\operatorname{Re}\alpha = 0$, то функции $\Phi^{--}(z, w)$, $\varphi^{-}(z)$ однозначно определяются условием (2) по заданной функции $\Phi^{++}(z, w)$, а одна из функций $\psi^{\pm\mp}(z, w)$ может быть задана произвольно.

Отсюда при выполнении одного условия $\operatorname{Re}\alpha = 0$ краевая задача (2), в которой функция $\Phi^{++}(z, w)$ задана, а три остальные — искомые, имеет счетное множество линейно независимых решений, определяемых функциями

$$\psi_{kl}^{+-} = z^k w^{-l},\ \psi_{kl}^{-+} = z^{-k} w^{l},\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots$$

Если же задана функция $\psi^{+-}(z, w)$ $(\psi^{-+}(z, w))$ такая, что

$$\psi^{+-}(0,\ w) = \psi^{+-}(z,\ \infty) = 0,$$
$$(\psi^{-+}(\infty,\ w) = \psi^{-+}(z,\ 0) = 0),$$

то задача (2) при условии $\operatorname{Re}\alpha = 0$ имеет единственное решение.

Определяя теперь $\delta(t, \omega)$ из условия (1) при $g = i$, находим искомое интегральное представление

$$F(z,\ w) = K(i\delta)(z,\ w) \in H^{++}.$$

Это представление единственно, если $\operatorname{Re}\alpha = 0$ и кроме функции $\Phi^{++}(z, w)$ задана, например, функция

$$\psi^{+-}(z,\ w) = \Phi^{+-}(z,\ w) - \Phi^{+-}(0,\ w).$$

В том случае, когда $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, задача (2) неразрешима. Поэтому будем искать интегральное представление функции $F(z, w)$ в виде суммы

$$F(z,\ w) = \Phi(z,\ w) + C,\ \Phi(z,\ w) = K(i\delta)(z,\ w),$$

где C — вещественная постоянная. Отсюда и из условия (2) легко найдем, что $C = \operatorname{Re}\alpha$, а

$$F(z,\ w) = K(i\delta)(z,\ w) + \operatorname{Re} F(0,\ 0).$$

Интегральное представление функции $F(z, w) \in H^{--}$, учитывая сказанное выше, будем искать в виде суммы

$$F(z,\ w) = \Phi(z,\ w) + h^{-}(z) + g^{-}(w) + \beta,$$
$$(z,\ w) \in D^{-} \times \Delta^{-}, \tag{4}$$

где

$$\Phi(z,\ w) = K(i\delta)(z,\ w),$$
$$\beta = F(\infty,\ \infty),$$
$$h^{-}(z) = F(z,\ \infty) - \beta,$$
$$g^{-}(w) = F(\infty,\ w) - \beta.$$

Принимая во внимание эти и ранее введенные обозначения из краевого условия (2), находим, что $\operatorname{Re}\alpha = 0$,

$$\psi^{++}(z, w) = \overline{F(1/\bar{z}, 1/\bar{w})} - \overline{h^{-}(1/\bar{z})} - \overline{g^{-}(1/\bar{w})} - \bar{\beta},$$
$$\psi^{+-}(z, w) = -\overline{\psi^{-+}(1/\bar{z}, 1/\bar{w})},$$
$$\varphi^{+}(z) = \overline{\varphi^{-}(1/\bar{z})},$$
$$\psi^{+}(w) = \overline{\psi^{-}(1/\bar{w})}.$$

Таким образом, если кроме функции $F(z, w) \in H^{--}$ будет еще задана, например, функция $\Phi^{++}(z, w)$, то краевое условие (2) однозначно определяет функции $\Phi^{-+}(z, w)$, $\varphi^{+}(z)$ и $\psi^{+}(w)$ и тем самым функцию $\Phi^{++}(z, w) - hm\alpha$. Задавая произвольным образом постоянную $\gamma = Im\alpha$ и подставляя известные теперь значения $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$ в равенство (1), находим из него, что $\delta(t, \omega)$ при $g = i$ зависит линейным образом от произвольной постоянной γ. Мы решили задачу о представлении функции $F(z, w) \in H^{--}$ в виде суммы (3), содержащей интеграл типа Коши $K(i\delta)(z, w)$ с плотностью, линейно зависящей от одной произвольной вещественной постоянной.

Замечание 1. Для функции $F(z, w) \in H^{--}$ можно искать интегральное представление в виде произведения

$$F(z, w) = zw\Phi(z, w),$$
$$\Phi(z, w) = K(i\delta)(z, w).$$

В этом случае

$$\Phi^{--}(t, \omega) = \frac{1}{t\omega} F^{--}(t, \omega)$$

и, значит,

$$\psi^{++}(z, w) = zw\overline{F(1/\bar{z}, 1/\bar{w})},$$

а все остальные рассуждения проводятся аналогично.

Наконец, рассмотрим задачу о представлении

$$F(z, w) \in H^{+-}$$

в виде суммы

$$F(z, w) = K(i\delta)(z, w) + g^{+}(z), \tag{5}$$

где $g^{+}(z) = F(z, \infty)$. Рассуждая так же, из краевого условия (2) получаем равенства

$$\operatorname{Re}\alpha = 0,$$
$$\varphi^{+}(z) = \overline{\varphi^{-}(1/\bar{z})}, \quad \psi^{+}(w) = \overline{\varphi^{-}(1/\bar{w})},$$
$$\psi^{++}(z, w) = -\overline{\Phi^{--}(1/\bar{z}, 1/\bar{w})},$$
$$\psi^{-+}(z, w) = \overline{g^{+}(1/\bar{z})} + \psi^{+}(w) - \overline{F(1/\bar{z}, 1/\bar{w})}.$$

Следовательно, функции $\psi^{-+}(z, w)$ и $\psi^{+}(w)$ определяются однозначно, а функции $\psi^{++}(z, w)$ и $\varphi^{+}(z)$ зависят от произвольных функций $\Phi^{--}(z, w)$ и $\varphi^{-}(z)$ (или наоборот). Отсюда, задавая, например, функцию $\psi^{++}(z, w)+\varphi^{+}(z)$, определяем, как и выше, что $\delta(t, \omega)$ зависит линейным образом от произвольной постоянной $\gamma = Im\alpha$.

Замечание 2. Отыскивая представление функции $F(z, w)\in H^{+-}$ в виде произведения $F(z, w)=wK(i\delta)(z, w)$, легко найдем, что

$$\frac{1}{w}F(z, w)=\psi^{+-}(z, w)+\psi^{-}(w),$$

$$\psi^{-}(w)=\overline{\psi^{+}(1/\overline{w})}=\frac{1}{w}F(0, w),$$

$$\psi^{-+}(z, w)=\overline{w[F(1/z, 1/\overline{w})-F(0, 1/w)]}.$$

Остальные рассуждения проводятся как и выше.

Аналогичным образом исследуется случай, когда

$$F(z, w)\in H^{-+}.$$

Далее, если $g(t, \omega)=1$, то, заменяя в (2) Re на Im, получим новое краевое условие, которое исследуется совершенно аналогично.

Основной результат пункта 2° состоит в том, что для определения плотности $\delta(t, \omega)$ искомого интегрального представления, линейным образом зависящей от конечного числа произвольных постоянных, знать только предельное значение данной функции $F(z, w)$ недостаточно. Для этого надо задавать предельное значение еще одной функции класса H^{+-} или H^{-+} (H^{--} или H^{++}), если $F(z, w)\in H^{\pm\pm}$ ($\in H^{\pm\mp}$).

3°. Случай, когда задано два предельных значения.

Если кроме предельного значения $F(t, \omega)$ данной функции $F(z, w)$ известно еще одно из предельных значений $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$ интеграла типа Коши $K(\delta/\overline{g})(z, w)$, то, как мы сейчас покажем, для определения $\delta(t, \omega)$ из краевого условия (1) необходимо решить краевую задачу Гильберта для функции, голоморфно зависящей от одной переменной и непрерывно — от другой переменной, играющей роль параметра.

Учитывая результаты 2°, будем искать представление функции $F(z, w)\in H^{++}$ в виде интеграла типа Коши $K(\delta/\overline{g})(z, w)$, предполагая, что кроме его предельного значения $\Phi^{++}(t, \omega)=F(t, \omega)$, нам известно еще одно предельное значение $\Phi^{+-}(t, \omega)$ или $\Phi^{-+}(t, \omega)$. Пусть, для определенности, задано значение Φ^{+-} тогда полагая

$$\gamma(t, \omega)=\operatorname{Re}\{ig(t, \omega)[\Phi^{+-}(t, \omega)-\Phi^{++}(t, \omega)]\},$$

$$\varphi_{\omega}^{-}(t)=\Phi^{--}(t, \omega)-\Phi^{-+}(t, \omega),$$

из соотношения (1) получим равенство

$$\operatorname{Re}\{\overline{ig(t, \omega)}\varphi_{\omega}^{-}(t)\}=\gamma(t, \omega),\ (t, \omega)\in T_2, \tag{6}$$

определяющее краевое условие задачи Гильберта для области $|z|>1$ с параметром $\omega: |\omega|=1$.

После того, как найдена функция $\varphi_\omega^-(t)$, удовлетворяющая условию (6), определение функции $b(t, \omega)$ из равенства (1) не представляет труда.

Если функция $F(z, w) \in H^{--}$, то для нее можно искать интегральное представление в виде суммы (4) или произведения $zw\Phi(z, w)$, как в замечании 1. В первом случае

$$\Phi^{--}(t, \omega) = F(t, \omega) - h^-(t) - g^-(\omega) - \beta,$$

а во втором

$$t\omega\Phi^{--}(t, \omega) = F(t, \omega).$$

Предполагая, что нам еще известно, например, предельное значение $\Phi^{-+}(t, \omega)$, и полагая

$$\gamma(t, \omega) = \operatorname{Re}\{i\overline{g(t, \omega)}\,[\Phi^{-+}(t, \omega) - \Phi^{--}(t, \omega)]\},$$
$$\varphi_\omega^+(t) = \Phi^{++}(t, \omega) - \Phi^{+-}(t, \omega),$$

из равенства (1) получим условие краевой задачи Гильберта

$$\operatorname{Re}\{i\overline{g(t, \omega)}\,\varphi_\omega^+(t)\} = \gamma(t, \omega), \quad (t, \omega) \in T_2 \tag{7}$$

с параметром ω для области $|z| < 1$.

Нахождение интегрального представления для функции $F \in H^{\pm\mp}$, когда известно одно из предельных значений $\Phi^{\pm\pm}(t, \omega)$, аналогичным образом может быть приведено к одной из задач (6), (7) или к одной из задач

$$\operatorname{Re}\{i\overline{g(t, \omega)}\,\psi_t^\mp(\omega)\} = \gamma(t, \omega),$$

где

$$\psi_t^\mp(\omega) = \Phi^{\mp\mp}(t, \omega) - \Phi^{\pm\mp}(t, \omega),$$

на чем мы и останавливаемся.

Теория краевых задач Гильберта для одного переменного хорошо разработана [1, 2] и для выяснения роли параметра ω коротко остановимся лишь на решении задачи (7).

Вещественную положительную функцию $p(t, \omega)$ назовем регуляризующим множителем функции

$$g(t, \omega) = a + ib, \quad |g| = 1, \quad \varkappa = l(g),$$

если существует функция $\chi_\omega(z) = u + iv$, голоморфная при $|z| < 1$ и каждом фиксированном ω: $|\omega| = 1$, такая, что $\chi_\omega^+(z) \in H$ и

$$p(t, \omega)\, g(t, \omega) = t^\varkappa \exp[i\chi_\omega^+(t)] = t^\varkappa e^{-v} e^{iu} \tag{8}$$

при $(t, \omega) \in T_2$.

Сопоставляя модули и аргументы обеих частей равенства (8), находим, что

$$p(t,\ \omega) = |t|^{\varkappa} e^{-v(t,\ \omega)}, \tag{9}$$

$$u(t,\ \omega) = \arg\{t^{-\varkappa} g(t,\ \omega)\} = \arg\frac{b}{a} - \varkappa \arg t.$$

Так как $u(t,\ \omega) \in H$, то в качестве χ_ω^+ можно взять, например, функцию, определяемую интегралом Шварца:

$$\chi_\omega^+(z) = S_\omega(U)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} u(t,\ \omega)\frac{t+z}{t-z}\,\frac{dt}{t}.$$

Отсюда и из (9), учитывая, что $v(t,\ \omega) = Im\chi_\omega^+(t)$, определим регуляризующий множитель $p(t,\ \omega)$ функции $g(t,\ \omega)$, с помощью которого условие (7) перепишем так:

$$\frac{\gamma}{p} = \operatorname{Re}\left\{\frac{i\varphi_\omega^+}{pg}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{t^{\varkappa}}\varphi_\omega^+(t)\,e^{-i\chi_\omega^+(t)}\right\}.$$

Следовательно, в качестве частного решения задачи (7), если она разрешима, можно взять функцию

$$\tilde{\varphi}_\omega^+(z) = -iz^{\varkappa} e^{i\chi_\omega^+(z)} S_\omega\left(\frac{\gamma}{p}\right)(z) = -iz^{\varkappa}\tilde{\varphi}_0(z,\ \omega).$$

Если $\varkappa \geqslant 0$, то для получения общего решения задачи (7) надо найти общее решение соответствующей однородной задачи

$$\operatorname{Re}\{t^{-\varkappa}\mu_\omega^+(t)\} = 0, \tag{10}$$

где

$$\mu_\omega^+(t) = i\varphi_\omega^+(t)\exp\{-\chi_\omega^+(t)\}.$$

Условию (10) удовлетворяет функция

$$\mu_\omega^+(z) = z^{\varkappa}\left\{i\sum_{k=0}^{\varkappa} C_k(\omega)(z^k + z^{-k}) + \sum_{k=0}^{\varkappa} C_{\varkappa+k}(\omega)(z^k - z^{-k})\right\},$$

зависящая от произвольных вещественных функций $C_k(\omega)$, $k = 0, 1, \ldots 2\varkappa$ класса H, а решение неоднородной задачи (7) определяется по формуле

$$\varphi_\omega^+(z) = \tilde{\varphi}_\omega^+(z) - i\mu_\omega^+(z)\,e^{\chi_\omega(z)}.$$

Следовательно, при $\varkappa \geqslant 0$ функция $\delta(t,\ \omega)$ линейным образом зависит от $2\varkappa + 1$ произвольных вещественных функций $C_k(\omega)$ класса H.

Если $\varkappa < 0$, то задача (7) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда функция $\tilde{\varphi}_0(z,\ \omega)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{z\to 0}\tilde{\varphi}_0(z,\ \omega)\,z^k = 0,\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa - 1,\ |\omega| = 1.$$

Допустим, что эти условия не выполняются. В этом случае, следуя [1], для функции $F(z, w) \in H^{--}$ будем искать представление вида

$$G(z, w) = \Phi(z, w) + h^{-}(z) + \psi(z, w), \tag{11}$$

где $\Phi(z, w)$ и $h^{-}(z)$ — то же, что и выше, а

$$\psi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{|\varkappa|} z^{-k} \int\limits_{|\omega|=1} \frac{C_k(\omega)\, d\omega}{\omega - w},$$

причем функции $C_k(\omega)$ класса H подлежат определению.

Так как

$$\psi^{-+}(t, \omega) - \psi^{--}(t, \omega) = \sum_{k=0}^{|\varkappa|} C_k(\omega)\, t^{-k}$$

и

$$\Phi^{--}(t, \omega) = G^{--}(t, \omega) - h^{-}(t) - \psi^{--}(t, \omega),$$
$$\Phi^{-+}(t, \omega) = G^{-+}(t, \omega) - \psi^{-+}(t, \omega),$$
$$\Phi^{\substack{++\\+-}}(t, \omega) = G^{\substack{++\\+-}}(t, \omega),$$

то, предполагая, что нам известны функции $G^{--}(t, \omega) = F(t, \omega)$ и $G^{-+}(t, \omega)$, найдем, что

$$G^{++}(t, \omega) - G^{+-}(t, w) = \Phi^{++}(t, \omega) - \Phi^{+-}(t, \omega) \equiv \varphi_{\omega}^{+}(t),$$
$$\Phi^{--}(t, \omega) - \Phi^{-+}(t, \omega) = [F(t, \omega) - h^{-}(t) - G^{-+}(t, \omega)] -$$
$$- [\psi^{-+}(t, \omega) - \psi^{--}(t, \omega)] =$$
$$= Q(t, \omega) - \sum_{k=0}^{|\varkappa|} C_k(\omega)\, t^{-k},$$

где $Q(t, \omega)$ — известная функция. Полагая, как и выше,

$$\gamma(t, \omega) = -\mathrm{Re}\,\{i\overline{g(t, \omega)}\, Q(t, \omega)\}$$

и учитывая, что в силу (1)

$$\delta/\overline{g} = \varphi_{\omega}^{+}(t) + Q(t, \omega) - \sum_{k=0}^{|\varkappa|} C_k(\omega)\, t^{-k}, \tag{12}$$

вместо краевой задачи (7) получим такую:

$$\mathrm{Re}\,\Big\{i\overline{g(t, \omega)}\Big[\varphi_{\omega}^{+}(t) - \sum_{k=0}^{|\varkappa|} C_k(\omega)\, t^{-k}\Big]\Big\} = \gamma(t, \omega). \tag{13}$$

Рассуждая, как и при решении задачи (7), будем иметь:

$$\varphi_{\omega}^{+}(z) = -iz^{\varkappa}\tilde{\varphi}_0(z, \omega) + \sum_{k=0}^{|\varkappa|} C_k(\omega)\, z^{-k} =$$
$$- = iz^{\varkappa}\Big[\tilde{\varphi}_0(z, \omega) + i \sum_{k=0}^{|\varkappa|} C_k(\omega)\, z^{|\varkappa|-k}\Big].$$

Отсюда, если

$$\tilde{\varphi}_0(z, \omega) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_s(\omega) z^s, \quad |z| < 1,$$
$$|\omega| = 1$$

то полагая

$$C_k(\omega) = i\varphi_{|\varkappa|-k}(\omega),$$
$$k = 0, 1, \ldots -\varkappa - 1,$$

удовлетворим достаточным условиям разрешимости задачи (13).

Определяя теперь $\delta(t, \omega)$ из равенства (12) и учитывая, что $F(t, \omega) = G^{--}(t, \omega)$, из равенства (11) получим представление функции $F(z, w)$ в виде суммы

$$F(z, w) = k(\delta/\bar{g})(z, w) + h^-(z) + \psi(z, w).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963. 634 с.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962. 274 с.
3. Какичев В. А. Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных.— «Уч. зап. Шахтинского пединститута», 1959, том II, вып. 9, с. 25—90.
4. Какичев В. А. Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях.— Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 5, Харьков, 1967, с. 37—58.