О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

Т. Б. Ламзина

1. Положим для мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$, $0 < \alpha \leqslant \leqslant 1$, $k > 0$ [1]:

$$\beta_\alpha(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T^\alpha(r, f)},$$

$$\beta_0(a, f) = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{\ln T(r, f)},$$

$$\Omega^{(\alpha)}(f) = \{a : \beta_\alpha(a, f) > 0\},$$

$$\Omega_k^{(0)}(f) = \{a : \beta_0(a, f) > k\},$$

$$\overline{\Omega_k^{(0)}}(f) = \{a : \beta_0(a, f) \geqslant k\},$$

где

$$\ln^+ M(r, a, f) = \ln^+ \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z) - a|}, \quad a \neq \infty;$$

$$\ln^+ M(r, \infty, f) = \ln^+ M(r, f) = \ln^+ \max_{|z|=r} |f(z)|;$$

$T(r, f)$ — неванлинновская характеристика $f(z)$. Величины $\beta_\alpha(a, f)$ $\beta_0(a, f)$ называются величинами отклонений мероморфной функции $f(z)$ от числа a, а множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ — множеством положительных отклонений функции $f(z)$ [1].

При $\alpha = 1$ [2]

$$\beta_1(a, f) = \beta(a, f) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda, & \lambda > \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \lambda \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где λ — нижний порядок мероморфной функции $f(z)$. Множество $\Omega^{(1)}(f) = \Omega(f)$ не более чем счетно для мероморфных функций конечного нижнего порядка и может иметь мощность континуума, если нижний порядок $\lambda = \infty$ [2, 3, 4]. Относительно структуры множеств $\Omega^{(\alpha)}(f)$ $(0 < \alpha < 1)$ и $\Omega^{(0)}_{\mu}(f)$ известны следующие результаты.

Теорема А. 1) *Для любой мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z)$ множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ при $\alpha > \frac{1}{2}$ имеет внутреннюю логарифмическую емкость нуль* [5].

2) *Для любых чисел $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$ существует мероморфная функция $f(z)$ порядка ρ, для которой множество $\Omega^{(\alpha)}(f)$ имеет мощность континуума* [4, 5].

Теорема Б. *Для любого $0 < \rho < \infty$ существует мероморфная при $z \neq \infty$ функция $f(z)$ порядка ρ, для которой множество $\overline{\Omega^{(0)}_{0,5}}(f)$ имеет положительную линейную меру* [1].

Теорема В. *Для любого $0 < \rho < \infty$ существует мероморфная при $z \neq \infty$ функция $f(z)$ порядка ρ такая, что множество $\overline{\Omega^{(0)}_{1/2\sigma_0}}(f)$ имеет положительную меру Хаусдорфа[1] размерности $\sigma_0 = \frac{1}{\log_2 3}$* [1].

Теорему В можно существенно дополнить, используя ту же самую идею построения. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых чисел $0 < \rho \leqslant \infty$ и $0 < \sigma_0 \leqslant 2$ существует мероморфная при $z \neq \infty$ функция $f(z)$ порядка ρ такая, что множество $\overline{\Omega^{(0)}_{1/2\sigma_0}}(f)$ имеет положительную меру Хаусдорфа размерности σ_0.*

Доказательство теоремы 1 проводится ниже. Напомним определение целой кривой. Рассмотрим p-мерное комплексное унитарное пространство U_p [7]. Элементами (или точками) его являются

---

[1] См. Н. С. Ландкоф, «Основы современной теории потенциала», стр. 244.

векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots a_p)$, где a_j — комплексные числа. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a} = (a_1, \ldots a_p)$, $\vec{b} = (b_1, \ldots b_p)$ и длина вектора $\|\vec{a}\|$ определяются обычным способом.

Определение [7]. *Вектор-функция от комплексного переменного z $G(z) = (g_1(z), \ldots g_p(z))$, $p \geqslant 2$, где $g_j(z)$ — целые функции без общих нулей и линейно независимые, называется целой кривой p измерений.*

На целые кривые распространяется неванлинновская теория распределения значений мероморфных функций [7, 8]. Перечислим лишь самые необходимые нам сведения [7, 8, 9]. Нули скалярного произведения $G(z) \cdot \vec{a} = \bar{a}_1 g_1(z) + \ldots + \bar{a}_p g_p(z)$, $\vec{a} \neq (0, \ldots, 0)$, являющегося обыкновенной целой функцией, называются $\vec{a}$-точками целой кривой $G(z)$. Их число (с учетом кратности) в круге радиуса r ($|z| = r$) обозначают $n(r, \vec{a}, G)$. Функция $N(r, \vec{a}, G)$ вводится обычным образом.

Характеристической функцией $\overset{0}{T}(r, G)$ целой кривой $G(z)$ называется [7, 9]

$$\overset{0}{m}(r, \infty, G) = \overset{0}{T}(r, G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \|G(re^{i\varphi})\| \, d\varphi.$$

Функция $\overset{0}{T}(r, G)$ является монотонно возрастающей, выпуклой относительно логарифма [7]. Порядок и нижний порядок целой кривой определяются с помощью характеристики $\overset{0}{T}(r, G)$ обычным способом.

Функцией приближения $\overset{0}{m}(r, \vec{a}, G)$ называется [7, 9]

$$\overset{0}{m}(r, \vec{a}, G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\|G(re^{i\varphi})\| \, \|\vec{a}\|}{|G(re^{i\varphi}) \cdot \vec{a}|} \, d\varphi.$$

Обычным способом вводятся понятия дефектов целой кривой $G(z)$ в точке $\vec{a}$ в смысле Р. Неванлинны $\delta(\vec{a}, G)$ и Ж. Валирона $\Delta(\vec{a}, G)$ и определяются множества дефектных векторов [9]:

$$\delta(\vec{a}, G) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{\overset{0}{m}(r, \vec{a}, G)}{\overset{0}{T}(r, G)}; \; \Delta(\vec{a}, G) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\overset{0}{m}(r, \vec{a}, G)}{\overset{0}{T}(r, G)},$$

$$E_N(G) = \{\vec{a} \in A : \delta(\vec{a}, G) > 0\}; \; E_V(G) = \{\vec{a} \in A : \Delta(\vec{a}, G) > 0\},$$

где A — конечная или бесконечная допустимая система векторов (т. е. любые p векторы из A линейно независимы. Положим далее [9]

$$L(r, \vec{a}, G) = \max_{|z|=r} \ln \frac{\| G(z) \| \, \| \vec{a} \|}{| G(z) \cdot \vec{a} |}, \quad \vec{a} \neq (0, \ldots 0),$$

$$\beta(\vec{a}, G) = \varliminf_{r \to \infty} \frac{L(r, \vec{a}, G)}{\overset{0}{T}(r, G)},$$

$$\Omega_A(G) = \{\vec{a} \in A : \beta(\vec{a}, G) > 0\}.$$

Величина $\beta(\vec{a}, G)$ называется величиной отклонения целой кривой $G(z)$ от вектора $\vec{a}$ [9]. Относительно множеств $E_V(G)$, $\Omega(G)$ известен следующий результат [9].

Теорема Г. *Если $G(z)$ — целая кривая конечного нижнего порядка λ, $\Omega(G) \subseteq E_V(G)$.*

Из этой теоремы следует, в частности, что если для некоторого $\vec{a}$ $\Delta(\vec{a}, G) = 0$, то и $\beta(\vec{a}, G) = 0$. Кроме того, в работе [9] показано, что для целых кривых нулевого нижнего порядка выполняется

$$\beta(\vec{a}, G) \leqslant \Delta(\vec{a}, G).$$

В работе [6] установлена количественная оценка величины отклонения $\beta(a, f)$ через величину дефекта $\Delta(a, f)$ для мероморфных при $z \neq \infty$ функций конечного нижнего порядка λ. Аналогичная теорема имеет место и для целых кривых.

Теорема 2. *Если $G(z)$ — целая кривая нижнего порядка $\lambda < \infty$, для любого вектора $\vec{a}$, $\vec{a} \neq (0, \ldots 0)$ выполняется*

$$\beta(\vec{a}, G) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda \sqrt{2\Delta(\vec{a}, G) + \Delta^2(\vec{a}, G)}, & \frac{1}{3} \leqslant \lambda < \infty, \\ \pi\lambda \sqrt{2\Delta(\vec{a}, G) + \Delta^2(\vec{a}, G)} + K\Delta(\vec{a}, G), & 0 < \lambda < \frac{1}{3}, \\ \Delta(\vec{a}, G), & \lambda = 0. \end{cases}$$

Для случая $\lambda > 1$ оценка точная в следующем смысле.

Теорема 3. *Для любых чисел $1 < \lambda < \infty$, $0 < \varkappa < \frac{\pi}{2\lambda}$ и вектора $\vec{a} = (1, a, 0, \ldots 0)$, где $a \neq \infty$ — произвольное комплексное число, существует целая кривая $G(z)$ нижнего порядка λ, для которой*

$$\beta(\vec{a}, G) \geqslant \frac{\pi\lambda}{2} \sqrt{\Delta(\vec{a}, G)} \cos\frac{\varkappa\lambda}{4}.$$

Заметим, что теорема 2 получается точно таким образом, как и соответствующая теорема для мероморфных при $z \neq \infty$ функций [6] из следующего соотношения, установленного в работе [9] ($r_0 < r \leqslant 0,5R$)[1]:

$$L(r, \vec{a}, G) \leqslant (2x_1)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{\overset{0}{m}(t, \vec{a}, G) \cdot t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{|b_k| \leqslant 2R} \ln \left| \frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-|b_k|^{2x}} \right| + K_1 x \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \{\overset{0}{T}(4R, G) + \overset{0}{T}_1(4R, G) + C_1,$$

где $|b_k|$ совпадают с модулями $\vec{a}$-точек целой кривой $G(z)$, $x > 0,5$,

$$x_1 = x(1+\varepsilon),\ \overset{0}{T}_1(r, G) = \int_1^r \frac{\overset{0}{T}(r, G)}{\tau}\, d\tau.$$

2. Проведем доказательство теоремы 1 для случая $0 < \sigma_0 < 1$, а затем укажем, как получить ее в общем случае. Нам понадобится канторово совершенное множество $E(p^\infty)$ ($p > 1$). Напомним его конструкцию [10, стр. 156]. Из сегмента [0,1] удаляется интервал $\Delta = \left(\frac{1}{2p} \cdot \frac{2p-1}{2p}\right)$. Оставшиеся два равных замкнутых отрезка длиной $1/2p$ обозначим $E(p^1)$. Из каждого отрезка в свою очередь удаляется по интервалу так, чтобы осталось четыре равных замкнутых отрезка длиной $\frac{1}{(2p)^2}$. Обозначим множество, состоящее из них, $E(p^2)$. На третьем этапе останутся восемь равных отрезков длиной $\frac{1}{(2p)^3}$, которые обозначим $E(p^3)$. И так далее.

Пересечение всех множеств $E(p^\nu)$ и есть нигде неплотное совершенное канторово множество $E(p^\infty)$. Заметим, что интервал Δ делит каждое множество $E(p^\nu)$ на два симметричных относительно точки $x = \frac{1}{2}$ множества $E_1(p^\nu)$ и $E_2(p^\nu)$. При этом множество $E_1(p^\nu)$ подобно множеству $E(p^{\nu-1})$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2p}$, т. е.

$$E_1(p^\nu) = \left\{x : x = \frac{1}{2p} y;\ y \in E(p^{\nu-1})\right\}, \tag{1}$$

а множество $E_2(p^\nu)$ представимо в виде

$$E_2(p^\nu) = \left\{x : x = \frac{2p-1}{2p} + x';\ x' \in E_1(p^\nu)\right\}. \tag{2}$$

[1] Буквы C с индексами обозначают константы, зависящие лишь от рассматриваемой функции; K с индексами — абсолютные положительные постоянные.

Отметим теперь следующие два свойства множества $E(p^\infty)$:

1) множество $E(p^\infty)$ имеет положительную Хаусдорфову меру размерности $1/\log_2 2p$ [10, стр. 160];

2) множество $E(p^\infty)$ в $(2p)$-й системе счисления[1] имеет вид

$$E(p^\infty)=\left\{a: a=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k(a)}{(2p)^k}\right\},$$

где $\omega_k(a)$ принимают независимо значения 0 и $2p-1$.

Действительно, множество $E(p^1)$ содержит те и только те точки отрезка $[0,1]$, у которых в $(2p)$-представлении первый коэффициент α_1, 0 либо $2p-1$. Исходя из соотношений (1), (2), заключаем, что множество $E(p^2)$ содержит те и только те точки, для которых и первый, и второй коэффициенты α_1, α_2 равны 0 либо $2p-1$; множество $E(p^3)$ содержит те и только те точки, у которых α_1, α_2, α_3 принимают лишь два значения: 0 и $2p-1$. И так далее. Поскольку $E(p^\infty)=\bigcap_{\nu} E(p^\nu)$, свойство 2 доказано.

Пусть теперь $0<\sigma_0<1$ — произвольное фиксированное число. Обозначим $p=2^{1/\sigma_0-1}$, тогда $\sigma_0=1/\log_2 2p$, и в силу свойства 1 соответствующее множество $E(p^\infty)$ имеет положительную Хаусдорфову меру размерности σ_0. Обозначим A_{σ_0} множество чисел, допускающих представление

$$A_{\sigma_0}=\left\{a: a=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k(a)}{(2p)^k}\right\}, \qquad (3)$$

где $\omega_k(a)$ принимают независимо значения 0 и $2p-1$, причем $2p-1$ встречается бесконечное число раз. Множество A_{σ_0} получается параллельным переносом множества $E(p^\infty)$ и удалением из него счетного множества точек (удаляются точки, представление которых в $(2p)$-й системе счисления имеет 0 в периоде). Поэтому оно также имеет положительную Хаусдорфову меру размерности σ_0.

Докажем теорему для случая $\rho=1$. Искомая функция $f(z)$ является примером типа примеров А. А. Гольдберга [1, 11]. Счетное множество точек $B=\{b_n\}$ при этом выбирается следующим образом.

---

[1] Под (b)-й системой счисления $(b>2)$ здесь понимается представление числа a, $0<a\leqslant 1$ в виде

$$a=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k b^{-k},$$

где α_k могут принимать значения: $b-1$, $b-2$, ... $b-[b]+1$, 0. Будем называть такое представление (b)-представлением числа a.

Представим натуральное число n в двоичной системе счисления

$$n=\sum_{k=1}^{q(n)}\alpha_k 2^{k-1}\quad(\alpha_k=0,\ 1). \tag{4}$$

Тогда

$$b_n=1+\sum_{k=1}^{q(n)}\frac{(2p-1)\,\alpha_k}{(2p)^k}. \tag{5}$$

Положим, кроме того [1]

$$c_n=\eta_n=\frac{K_2}{n\ln^2(1+n)},\quad n=1,\ 2,\ \ldots;\ \eta_0=\eta_1;$$

$$\varphi_n=\pi\sum_{\nu=0}^{n-1}\eta_\nu,\quad \varphi_0=0;\ K_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(1+n)}. \tag{6}$$

Тогда

$$f(z)=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n b_n\exp\left(ze^{-i\varphi_n}\right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\exp\left(ze^{-i\varphi_n}\right)}, \tag{7}$$

$f(z)$ — мероморфная функция первого порядка. Для нее известно, что [11, стр. 152]

$$T(r,\ f)\leqslant 2r+0(1), \tag{8}$$

$$|f(z)-b_n|\leqslant C_2 n\ln^2(1+n)\exp\left(-\frac{2}{3}r\eta_n^2\right) \tag{9}$$

при

$$|\arg z-\varphi_n|\leqslant\frac{\pi}{3}\eta_n,\quad |z|=r>r_n=n^2\ln^6(1+n).$$

Покажем, что $A_{\sigma_0}\subseteq\overline{\Omega^{(0)}_{1/2\sigma_0}(f)}$. Пусть $a\in A_{\sigma_0}$. В силу (3), (4) оно порождает последовательность целых неотрицательных чисел [1]

$$n_1(a)=\frac{\omega_1(a)}{2p-1};\ n_2(a)=\frac{\omega_1(a)}{2p-1}+2\frac{\omega_2(a)}{2p-1};\ \ldots$$

$$n_\nu(a)=\frac{\omega_1(a)}{2p-1}+\cdots+2^{\nu-1}\frac{\omega_\nu(a)}{2p-1};\ \ldots, \tag{10}$$

а значит и последовательность $\{b_{n_\nu(a)}\}_{\nu=1}^{\infty}$

$$b_{n_\nu(a)}=1+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\omega_k(a)}{(2p)^k}.$$

Выберем $r_0(a)>r_0$ и настолько большим, чтобы в последовательности $\{n_\nu(a)\}$ нашлось хотя бы одно число $n_p(a)$, удовлетворяющее соотношению $0 < n_p(a) < r^{\frac{1}{2}}/2\ln^4 r$ при всех $r \geqslant r_0(a)$. Зафиксируем некоторое $r > r_0(a)$. Рассмотрим два возможных случая.

1-й случай. Найдется хотя бы одно $n_\nu(a)$, такое, что

$$\frac{r^{1/2}}{2\ln^4 r} \leqslant n_\nu(a) \leqslant \frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}. \tag{11}$$

Тогда будем оценивать величину отклонения $f(z)$ от a при

$$|\arg z - \varphi_{n_\nu(a)}| \leqslant \frac{\pi}{3}\eta_{n_\nu(a)} \quad (|z| = r).$$

В силу (4), (10), (11)

$$\frac{r^{1/2}}{2\ln^4 r} \leqslant n_\nu(a) \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} 2^{k-1} = 2^\nu - 1 < 2^\nu.$$

Поэтому

$$(2p)^\nu = 2^{\nu\log_2 2p} = 2^{\nu\cdot 1/\sigma_0} > \left(\frac{r^{1/2}}{2\ln^4 r}\right)^{1/\sigma_0} = \frac{1}{2p}\cdot\frac{r^{1/2\sigma_0}}{\ln^{4/\sigma_0} r}.$$

Отсюда с учетом (3) и (4) имеем

$$0 < a - b_{n_\nu(a)} \leqslant \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \frac{2p-1}{(2p)^k} = \frac{1}{(2p)^\nu} < 2p\frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}}.$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (6), (9), (11) и этим последним неравенством, получим для всех z таких, что $|\arg z - \varphi_{n_\nu(a)}| \leqslant \frac{\pi}{3}\eta_{n_\nu(a)}$, $|z| = r$,

$$\begin{aligned}|f(z) - a| &\leqslant |f(z) - b_{n_\nu(a)}| + |b_{n_\nu(a)} - a| \leqslant \\ &\leqslant 2p\frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}} + C_2 n_\nu(a)\cdot\ln^2(1 + n_\nu(a)) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{2}{3} r\eta^2_{n_\nu(a)}\right) \leqslant 2p\frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}} + \\ &+ C_3\frac{r^{1/2}}{\ln^2 r}\exp\left\{-\frac{2}{3}\ln^4(1 + r)\right\} \leqslant C_4\frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Поэтому

$$\ln^+ M(r, a, f) \geqslant \frac{1}{2\sigma_0}\ln r + O(\ln\ln r). \tag{13}$$

2-й случай. Для данного $r > r_0(a)$ не существует ни одного члена последовательности $\{n_\nu(a)\}$, удовлетворяющего соотношению (11).

Обозначим $n_q(a) = \max\left\{n_\nu(a) : n_\nu(a) < \frac{r^{1/2}}{2\ln^4 r}\right\}$;

$$n_q(a) < \frac{r^{1/2}}{2\ln^4 r}. \tag{14}$$

Пусть $n_{q+j}(a)$ — первое, отличное от $n_q(a)$ число последовательности $\{n_\nu(a)\}$. Очевидно,

$$n_{q+j}(a) > \frac{r^{1/2}}{\ln^4 r}. \tag{15}$$

Будем оценивать величину отклонения $f(z)$ от числа a при

$$|\arg z - \varphi_{n_q(a)}| < \frac{\pi}{3}\eta_{n_q(a)} \quad (|z| = r).$$

Имеем

$$a - b_{n_q(a)} \leqslant \sum_{k=q+j}^{\infty} \frac{2p-1}{(2p)^k} = \frac{1}{(2p)^{q+j-1}},$$

а в силу (10) и (15)

$$\frac{r^{1/2}}{\ln^4 r} < \sum_{k=1}^{q+j} 2^{k-1} = 2^{q+j} - 1 < 2^{q+j}.$$

Как и раньше, отсюда получаем

$$(2p)^{q+j-1} = \frac{(2p)^{q+j}}{2p} > \frac{r^{1/2\sigma_0}}{2p\ln^{4/\sigma_0} r}.$$

Поэтому

$$0 < a - b_{n_q(a)} < 2p\frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}}. \tag{16}$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (9), (14), (16), будем иметь

$$|f(z) - a| \leqslant 2p\frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}} + C_2 n_q(a)\ln^2(1 + n_q(a)) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2}{3} r\eta^2_{n_q(a)}\right\} \leqslant C_5 \frac{\ln^{4/\sigma_0} r}{r^{1/2\sigma_0}}.$$

Таким образом, мы снова получаем оценку (13), т. е. она справедлива для всех $r > r_0(a)$. Поэтому (8) и (13) дают

$$\beta_0(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{\ln T(r, f)} \geqslant \frac{1}{2\sigma_0} \tag{17}$$

для всех $a \in A_{\sigma_0}$.

Доказательство оценки (17) для случая $0 < \rho < 1$ проводится аналогично, если вместо (7) рассматривать функцию ([1], [11, стр. 164])

$$f_\rho(z) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n b_n \psi_\rho(ze^{-i\varphi_n})}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \psi_\rho(ze^{-i\varphi_n})},$$

где $\psi_\rho(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n^{1/\rho}}\right)$, а последовательности $\{c_n\}$, $\{b_n\}$, $\{\varphi_n\}$ определены соотношениями (5) и (6). При этом (11) заменяется следующим [1]:

$$\frac{r^{\rho/2}}{2\ln^4 r}\leqslant n_\nu(a)\leqslant\frac{r^{\rho/2}}{\ln^4 r}.$$

При $\rho>1$ следует рассмотреть функцию $f_\rho(z^n)$. В случае $\rho=\infty$ используем функцию $F(z)=f(e^z)$, где $f(z)$ определена соотношением (7). Для функции $F(z)$ имеем [11, стр. 170]

$$T(r,\ F)\leqslant(1+0(1))\frac{Ae^r}{\sqrt{2\pi r}},\tag{18}$$

где A — константа, зависящая лишь от рассматриваемой функции, и

$$|F(x+iy)-b_n|<\frac{K_3}{c_n}\exp\{-2e^x A_n\sin\eta\}\tag{19}$$

при

$$e^x>(2A_n\sin\eta)^{-1}\cdot\ln\frac{K_4}{c_n}\tag{20}$$

и

$$\frac{\varphi_n+\varphi_{n-1}}{2}+\eta<y<\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_n}{2}-\eta,\tag{21}$$

где

$$A_n=\sin\frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{2},\quad \eta=\eta(n)=\frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{2}.$$

Поскольку $0<y<\pi$ в (21), то, начиная с некоторого r ($r=\sqrt{x^2+y^2}$), соответствующие значения x будут большими, чем $r-1$. Учитывая это и (6), из (19), (20) имеем ($r>r_0$)

$$|F(re^{i\varphi})-b_n|<K_3 n\ln^2(1+n)\exp\left\{-K_5\frac{e^r}{n^2\ln^4(1+n)}\right\}$$

при $r>2\ln n+4\ln\ln(1+n)$ и $r\sin\varphi=y$, удовлетворяющих (21).

Дальше доказательство проводится аналогично случаю конечного порядка с заменой соотношения (11) на следующее:

$$\frac{e^{r/}}{2r^4}\leqslant n_\nu(a)\leqslant\frac{e^{r/2}}{r^4}.$$

Для доказательства теоремы 1 при $1\leqslant\sigma_0<2$ заметим, что декартовое произведение $E_p=E(p^\infty)\times E(p^\infty)$ имеет[1] положительную

[1] Это можно показать, например, с помощью метода, которым в работе [10, стр. 160] доказана положительность φ-меры множества $E(p^\infty)$, где $\varphi(t)$ — функция, соответствующая этому множеству.

меру Хаусдорфа размерности $2/\log_2 2p$ и в силу свойства 2 множества $E(p^\infty)$ представим в виде

$$E_p = \left\{a : a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k(a)}{(2p)^k} + i \sum_{l=1}^{\infty} \frac{t_l(a)}{(2p)^l}\right\},$$

где $s_k(a)$, $t_l(a)$ принимают независимо значения 0 и $2p-1$. Искомым множеством A_{σ_0} будет множество, получающееся из E_p, $p = 2^{2/\sigma_0 - 1}$ удалением точек, для которых вещественная либо мнимая часть в $(2p)$-представлении имеет 0 в периоде.

Искомой функцией при $\rho = 1$ является функция $f(z)$, определяемая соотношением (7). Множество $B = \{b_j\} = \{b_{nm}\}_{n,m=1}^{\infty}$, $j = j(n, m)$, при этом есть множество точек

$$b_{j_{nm}} = b_{nm} = \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{(2p-1)\,\alpha_k}{(2p)^k} + i \sum_{l=1}^{q(m)} \frac{(2p-1)\,\gamma_l}{(2p)^l}, \tag{22}$$

где α_k, γ_l — коэффициенты в двоичных представлениях натуральных чисел n и m соответственно, а между множеством двойных индексов nm и множеством одинарных индексов j_{nm} существует взаимооднозначное соответствие, удовлетворяющее условию

$$j_{nm} \leqslant \max(n^2, m^2). \tag{23}$$

Далее проводятся рассуждения, аналогичные случаю $0 < \sigma_0 < 1$, с заменой соотношения (11) на

$$\frac{r^{1/4}}{2\ln^2 r} \leqslant \max(n_\nu(a), m_\mu(a)) \leqslant \frac{r^{1/4}}{\ln^2 r}$$

и использованием факта, что

$$|a| = |a_1 + ia_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Ясно, что этот метод может быть применен и в случае $0 < \sigma_0 < 1$. В случае $\sigma_0 = 2$ в качестве множества A_{σ_0} берется множество таких точек единичного квадрата

$$\Delta = \{a : a = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(a) \cdot 2^{-k} + i \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l(a) \cdot 2^{-l}\},$$

$$\alpha_k(a) = 0{,}1; \quad \gamma_l(a) = 0{,}1,$$

для которых хотя бы в одной из последовательностей $\{\alpha_k(a)\}$, $\{\gamma_l(a)\}$ 1 встречается бесконечное число раз, т. е. из квадрата удалено счетное множество точек. Таким образом, множество A_{σ_0} имеет положительную плоскую меру (равную 1).

В качестве множества $B = \{b_j\}_{j=1}^{\infty} = \{b_{nm}\}_{n,\,m=1}^{\infty}$ берется множество точек

$$b_{j_{nm}} = b_{nm} = \sum_{k=1}^{q(n)} \alpha_k 2^{-k} + i \sum_{l=1}^{q(m)} \gamma_l 2^{-l},$$

где α_k, γ_l такие, как и в (22), а индексы j_{nm} таковы, что справедливо (23).

Переход от функции первого порядка к функции произвольного порядка ρ, $0 < \rho \leqslant \infty$ осуществляется так же, как и в случае $0 < \sigma_0 < 1$.

Теорема доказана.

3. Для доказательства теоремы 9 рассмотрим мероморфную функцию порядка ρ [13, стр. 1187]

$$F_{\rho,\,\varkappa,\,a}(z) = f(z) = [E_\rho(ze^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varkappa\right)})]^{-1} + [E_\rho(z)]^{-1} + a =$$

$$= \frac{E_\rho(z) + E_\rho(ze^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varkappa\right)}) + a \cdot E_\rho(ze^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varkappa\right)}) \cdot E_\rho(z)}{E_\rho(ze^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varkappa\right)}) \cdot E_\rho(z)} = \frac{g_1(z)}{g_2(z)},$$

где $E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}$ — функция Миттаг-Леффлера, $\rho > 1$ $0 < \varkappa < \pi/2\rho$, $a \neq \infty$.

Поскольку ([11, стр. 115]; [13, стр. 1188])

$$m(r, 0, E_\rho) = 0(\ln r);\ m(r, E_\rho) \sim \frac{r^\rho}{\pi\rho}, \tag{24}$$

$$T(r, f) \sim \frac{2r^\rho}{\pi\rho} + 0(\ln r),$$

то

$$m(r, 0, g_2) = 0(\ln r);\ m(r, g_2) \leqslant T(r, f) + 0(\ln r). \tag{25}$$

Кроме того, для функции $f(z)$ имеем [6]

$$\beta(a, f) \geqslant \pi\rho \sqrt{\Delta(a, f)} \cdot \cos\frac{\varkappa\rho}{4}. \tag{26}$$

Положим теперь

$$G_{\rho,\,\varkappa,\,a}(z) = G(z) = (g_1(z),\ g_2(z),\ z,\ \ldots\ z^{p-2}),$$

$$\vec{a} = (1,\ -\bar{a},\ 0,\ \ldots\ 0),$$

где $g_1(z)$, $g_2(z)$ и a определены соотношением (24). Для целой кривой[1] $G(z)$ имеем [7]

$$\mathring{T}(r, G) > T\left(r, \frac{g_1}{g_2}\right) + 0(1) = T(r, f) + 0(1). \tag{27}$$

Кроме того, с учетом (25) находим

$$\mathring{T}(r, G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \| G(re^{i\varphi}) \| \, d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{1 + |f(re^{i\varphi})|^2}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |g_2(re^{i\varphi})|\, d\varphi + 0(\ln r) \leqslant 2\mathring{T}(r, f) + 0(\ln r), \tag{28}$$

$$\mathring{m}(r, \vec{a}, G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\| G(re^{i\varphi}) \| \| \vec{a} \|}{| G(re^{i\varphi}) \cdot \vec{a} |}\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\sqrt{1 + |f(re^{i\varphi})|^2} \cdot \sqrt{1 + |a|^2}}{|f(re^{i\varphi}) - a|}\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|g_2(re^{i\varphi})|}\, d\varphi + 0(\ln r) = \mathring{m}(r, a, f) + 0(\ln r), \tag{29}$$

$$L(r, \vec{a}, G) = \max_{|z|=r} \ln \frac{\| G(z) \| \| \vec{a} \|}{| G(z) \cdot \vec{a} |} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{|z|=r} \ln \frac{\sqrt{1 + |f(z)|^2}\sqrt{1 + |a|^2}}{|f(z) - a|} \geqslant \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|f(z) - a|} =$$

$$= \ln^+ M(r, a, f). \tag{30}$$

Из соотношений (27)—(30) будем иметь

$$\beta(\vec{a}, G) \geqslant \frac{1}{2}\beta(a; f); \ \Delta(\vec{a}, G) \leqslant \Delta(a, f).$$

Воспользовавшись теперь (26), получим

$$\beta(\vec{a}, G) \geqslant \frac{\pi\rho}{2}\sqrt{\Delta(\vec{a}, G)} \cdot \cos\frac{\varkappa\rho}{4}.$$

Здесь ρ — порядок целой кривой $G(z)$, что очевидно из соотношений (27) и (28).

Теорема доказана.

Глубоко благодарю В. П. Петренко за постановку задач и ценные консультации.

---

[1] Линейная независимость функций $g_1(z)$, $g_2(z)$, $z, \ldots, z^{p-2}$ следует из того, что линейная комбинация $c_1 g_1(z) + c_2 g_2(z)$, $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$ является трансцендентной мероморфной функцией (см. в [11] асимптотику функции $E_\rho(z)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Петренко. К вопросу о структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 12. Изд-во Харьковск. ун-та, 1970.
2. В. А. Петренко. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. «Изв. АН СССР, серия математическая», 33, 1969, № 2.
3. В. П. Петренко. О структуре множества положительных отклонений мероморфных функций. ДАН СССР, 189, 1969, № 4.
4. В. П. Петренко. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций, ч. I. «Изв. АН СССР, серия математическая», 33, 1969, № 6.
5. В. П. Петренко. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций, ч. II. «Изв. АН СССР, серия математическая», 34, 1970, № 1.
6. Т. Б. Ламзина. О величинах отклонений мероморфных функций. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.
7. А. А. Гольдберг. Некоторые вопросы теории распределения значений. Дополнение к книге Г. Виттиха «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям», М., «Наука», 1960.
8. H. Weyl, *Meromorphic functions and analytic curves.*, Princeton, 1943.
9. В. П. Петренко, М. Хуссайн. О росте целых кривых. Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного. Харьков, 1971.
10. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
11. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970.
12. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М.. Гостехиздат, 1956.
13. В. П. Петренко. О росте мероморфных функций конечного нижнего порядка и величинах их дефектов. «Сиб. матем. ж.» VIII, 1967, № 5.

Поступила 15 марта 1972 г.