О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕСА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ

Д. Л. Гурарий

Известная теорема Ли утверждает, что каждое конечномерное представление T разрешимой алгебры Ли A в комплексном[1] пространстве обладает весом, т. е. существует скалярная функция $\chi(a)$ на A такая, что $T_a x = \chi(a)x$ для некоторого вектора $x \neq 0$ при всех a. Соответствующий вариант этой теоремы имеет место для связных разрешимых групп[2]. В совместной работе автора и Ю. И. Любича [2] был получен аналог группового варианта теоремы Ли для бесконечномерных представлений нильпотентных и разрешимых групп. При этом было использовано обобщение понятия веса, предложенное ранее [3]. Именно согласно [3] функция $\chi(g)$ (на абе-

1. Или над алгебраическим замкнутым полем.
2. Обе теоремы изложены в [1, гл. 2].

левой группе) является весом представления T, если существует не стремящаяся к нулю последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset B$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (T_g x_n - \chi(g) x_n) = 0.$$

Точно так же следует определить вес для бесконечномерных представлений неабелевых групп и алгебр. Это расширение понятия веса неизбежно при переходе к бесконечномерным представлениям в виду того, что оператор в бесконечномерном пространстве может не иметь собственных замечаний. Веса в прежнем смысле будем называть собственными.

Цель настоящей статьи состоит в получении теорем существования веса для бесконечномерных представлений разрешимой алгебры Ли.

Пусть A — нормированная сепарабельная[1] алгебра Ли, т. е. нормированное пространство, бесконечномерное, в котором определена непрерывная по каждому переменному операция коммутирования, удовлетворяющая обычным аксиомам алгебры Ли. Рассмотрим представление T_a $(a \in A)$ этой алгебры линейными ограниченными операторами, действующими в банаховом пространстве B.

Доказательство нижеследующей теоремы, как и групповых теорем [2], основано на геометрическом методе, посредством которого в [3] доказано существование веса в коммутативном случае.

Опишем вкратце этот метод. Каждый линейный ограниченный оператор S в B действует покоординатно в пространстве $m(B)$ ограниченных последовательностей $\{x_n\}_1^\infty$ с членами из B: $S\{x_n\} = \{S x_n\}$. Так как S ограничен на B, подпространство $c_0(B)$ последовательностей, стремящихся к нулю, инвариантно относительно этого действия. Тем самым оператор S переносится в фактор-пространство $\overline{m}(B) = m(B)/c_0(B)$. Легко видеть, что при этом алгебра ограниченных операторов в B изометрически вкладывается в алгебру ограниченных операторов в $\overline{m}(B)$. Если λ — точка существенного спектра оператора S в B, то существует не стремящаяся к нулю (можно считать ограниченная) последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset B$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (Sx_n - \lambda x_n) = 0.$$

Пусть X — образ этой последовательности в фактор-пространстве $\overline{m}(B)$ при естественном отображении $m(B) \to \overline{m}(B)$. Тогда $X \in \overline{m}(B)$ и $SX = \lambda X$, т. е. X — собственный вектор оператора S в $\overline{m}(B)$, отвечающий собственному значению λ. Обратно, для каждого собственного вектора X оператора S в $\overline{n}(B)$ при собственном значении λ

---

[1] Всюду в дальнейшем сепарабельность алгебры предполагается.

прообразом X в $\overline{m}(B)$ служит последовательность $\{x_n\}_1^\infty \subset B$, не стремящаяся к нулю, и такая, что

$$\lim_{n\to\infty}(Sx_n - \lambda x_n) = 0.$$

Таким образом, λ принадлежит существенному спектру оператора S в B. Мы видим, что существенный спектр оператора S в B при переходе в фактор-пространство становится множеством собственных значений. Кроме того, все точки существенного спектра оператора S в $\overline{m}(B)$ являются его собственными значениями. Это устанавливается при помощи диагонального процесса [3].

Из сказанного следует, что вес равномерно непрерывного представления алгебры Ли A является линейным функционалом на A, аннулирующим ее производную подалгебру.

Чтобы функционал χ был весом представления T в B, необходимо и достаточно, чтобы он был собственным весом представления T в фактор-пространстве $\overline{m}(B)$.

В дальнейшем все рассматриваемые операторы действуют в фактор-пространстве $\overline{m}(B)$, т. е. если они задаются в B, мы сразу же переносим их в $\overline{m}(B)$.

Множество всех весов представления T будем, согласно [3], называть существенным спектром представления $\sigma_e(T)$. Для равномерно непрерывного представления T, так же, как и в [3], можно показать, что $\sigma_e(T)$ компакт в $*$-слабой топологии пространства, сопряженного к A, и естественно возникает вопрос, когда он не пуст.

Теорема. *У любого равномерно непрерывного представления банаховой разрешимости алгебры Ли существует вес.*

Доказательство теоремы будет проведено в несколько этапов Вначале докажем теорему для нильпотентных и некоторых специальных разрешимых алгебр Ли, а затем общий случай сведем к указанным частным случаям.

Лемма 1. *Пусть A — алгебра Ли, I — идеал в A, T — представление алгебры A и $\chi(h)\,(h \in I)$ — вес ограничения представления T на идеал I, т. е. $T_h X = \chi(h) X$, $(h \in I)$, где X — соответствующий собственный вектор. Тогда для любого элемента $a \in A$ $e^{T_a}(X)$ также есть собственный вектор представления $T_h\,(h \in I)$, соответствующий весу $\chi(e^{ad_a}(h))$.*

Для доказательства воспользуемся следующим соотношением, справедливым для двух произвольных элементов R и Q ассоциативной алгебры:

$$QR^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} R^{n-k} \mathrm{ad}_R^k(Q), \tag{1}$$

где $\mathrm{ad}_R(Q) = [Q, R] = QR - RQ$.

Отсюда легко следует

$$Q \cdot e^R = e^R \cdot e^{\mathrm{ad}_R}(Q). \tag{2}$$

Здесь e^R, e^{ad_R} — формальные степенные ряды

$$e^R = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!\, R^k, \quad e^{\mathrm{ad}_R} = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!(\mathrm{ad}_R)^k.$$

Подставим T_a вместо R, T_h $(h \in I)$ — вместо Q и применим (2) к собственному вектору X. Получим

$$T_h \cdot e^{T_a}(X) = e^{T_a} \cdot T_{e^{\mathrm{ad}_a}(h)}(X) = \chi(e^{\mathrm{ad}_a}(h))\, e^{T_a}(X), \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если A — нильпотентная высоты 2, банахова алгебра Ли, T — равномерно непрерывное представление алгебры A, то у этого представления существует вес.*

Доказательство. Пусть $A \supset A' \supset \{0\}$ $(A' = [A, A]$; $[A, A'] = 0)$. Производная подалгебра A' абелева, следовательно (см. [3]), ограничение представления на A' обладает весом $\chi(h)$ $(h \in A')$, т. е. подпространство $N = \{X \mid T_h X = \chi(h)\, X\ (h \in A')\}$ отлично от нуля. Оно инвариантно относительно всего представления, так как A' лежит в центре A.

Обозначим через S ограничение представления T на подпространство N. Пусть λ принадлежит существенному спектру оператора S_a для некоторого $a \in A$. Применяя, как и в [3], диагональный процесс, можно показать, что λ — собственное значение оператора S_a. Обозначим X соответствующий собственный вектор. Формула (1) с элементами $Q = S_a$ для выбранного нами a и $R = S_b$, где b — произвольный элемент из A, примененная к вектору X, дает

$$S_a S_b^n X = S_b^n S_a X + n S_b^{n-1} S_{[b,\, a]} X = \lambda S_b^n X + n \cdot \chi([a,\ b])\, S_b^{n-1} X,$$

или

$$(S_a - \lambda I)\, S_b^n X = n\ \ \chi([a,\ b]) \cdot S_b^{n-1} X. \tag{4}$$

Покажем, что $\chi\ ([a,\ b]) = 0$. Предположим противное. Тогда из (4) видно, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ $S_b^n X \neq 0$. Если элемент b выбрать так, чтобы $\| S_b \| \leqslant 1$, то $\| S_b^n X \| \leqslant \| S_b^{n-1} X \|$ и из соотношения (4) следует

$$\| S_a - \lambda I \| \geqslant n\ \ | \chi([a,\ b]) |$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$, что противоречит ограниченности оператора $S_a - \lambda I$. Итак, $\chi([a, b]) = 0$. Поскольку a и b произвольны, $\chi \mid A' = 0$. Тем самым на подпространстве N действует фактор-алгебра A/A'. Она абелева и, следовательно, ее представление обладает весом. Используя, как и выше, диагональный процесс [3], можно показать, что этот вес собственный и значит является весом исходного представления алгебры A. Лемма доказана.

Введем специальный класс разрешимых алгебр, который понадобится нам в доказательстве теоремы.

Пусть E — банахово пространство, S — ограниченный оператор в E. Будем рассматривать E как абелеву алгебру Ли, S — как дифференцирование в E. Построим полупрямое произведение A алгебры E на одномерную алгебру, порожденную дифференцированием S. Напомним, что операция коммутирования в A, задается формулой

$$[(h_1, \alpha S), (h_2, \beta S)] = (\alpha S(h_1) - \beta S(h_2), 0),$$

где $h_1, h_2 \in E$; α, β — скаляры. Легко видеть, что A — разрешимая алгебра высоты 2 (т. е. $A'' = 0$), производная подалгебра которой A' совпадает с образом оператора S, а идеалы, лежащие в E, — с инвариантными подпространствами оператора S.

Будем называть такие алгебры элементарными разрешимыми алгебрами Ли.

Лемма 3. *У любого равномерно непрерывного представления элементарной разрешимой алгебры Ли существует вес.*

Доказательство. Так как E — абелев идеал алгебры A, ограничение представления T на E обладает весом χ. К представлению T алгебры A можно применить результат леммы 1. Положим $a = \lambda S$ и подставим в (3). Получим

$$T_h e^{\lambda T_S}(X) = \chi(e^{\lambda S}(h))\, e^{\lambda T_S}(X).$$

Целая функция $f(\lambda) = \chi(e^{\lambda S}(h))$ для каждого $h \in E$ принимает значения из компактного множества $\{z = \chi(h) \mid \chi \in \sigma_e(T_h(h \in E))\}$ и в силу теоремы Лиувилля $f(\lambda) = \mathrm{const}$. Поскольку h произвольно, отсюда следует, что вес χ аннулирует образ оператора S, совпадающий с A'. Так же, как в лемме 2, на подпространстве $N = \{X \mid T_h X = 0, (h \in A')\}$ действует абелева фактор-алгебра A/A', представление которой обладает весом. Найденный вес и будет весом исходного представления.

Лемма 4. *Любое равномерно непрерывное представление метабелевой (т. е. разрешимой, высоты 2) алгебры Ли обладает весом.*

Доказательство. Пусть $A \supset A' \supset \{0\}$. В силу леммы 2 можно считать, что A не нильпотентна высоты 2. Тогда существует элемент $a \in A$ такой, что оператор $\mathrm{ad}_a \mid A' \neq 0$. Подпространство L_a, порожденное A' и элементом a, является, очевидно, элементарной подалгеброй (и даже идеалом, потому что $L_a \supset A'$) алгебры A. Роль E здесь играет A', а роль S оператор ad_a. По лемме 3 ограничение представления T на L_a обладает весом χ', который, очевидно, аннулирует производную подалгебру $L_a' = \mathrm{ad}_a(A')$. L_a' является ненулевым идеалом алгебры A, лежащим в A', который аннулируется некоторым весом χ из $\sigma_e(T_h(h \in A'))$.

Рассмотрим множество всех таких идеалов, упорядоченное по включению. Оно обладает максимальным элементом. Действительно, пусть $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_\nu \subset \ldots$ — возрастающая цепочка идеалов,

I_ν аннулируется весом χ_ν. Последовательность весов χ_ν принадлежит компакту $\sigma_e(T_h\,(h \in A'))$ и, следовательно, содержит слабо сходящуюся подпоследовательность $\chi_{\nu_n} \to \chi$. Очевидно, χ аннулирует любой из идеалов I_{ν_n} и, значит, идеал $I = \{\overline{\bigcup_\nu I_\nu}\}$. Таким образом, каждая возрастающая цепочка имеет максимальный элемент. Тогда по лемме Цорна существует максимальный идеал $M \subset A'$, аннулируемый некоторым весом χ. Покажем, что фактор-алгебра $\overline{A} = A/M$ нильпотентна высоты 2 и потому, в силу леммы 2, ее представление обладает весом, который является и весом исходного представления.

Алгебра $\overline{A}$ действует в ненулевом подпространстве $N = \{X \mid T_h X = 0\ (h \in M)\}$. Обозначим это представление через S и применим к нему полученный выше результат: если алгебра не нильпотентна высоты 2, то существует ненулевой идеал $\overline{I}$ в $\overline{A}' = A'/M$, аннулируемый весом $\overline{\chi}$, ограничения представления S на $\overline{A}'$. Вес $\overline{\chi}$ определяет некоторый вес χ представления $T_h\,(h \in A')$ и этот вес аннулирует прообраз идеала $\overline{I}$, лежащий в A'. Таким образом, вопреки предположению, мы получаем нетривиальное расширение идеала M. Лемма доказана.

Доказательство теоремы завершается индукцией по высоте алгебры и сводится к случаю алгебры высоты 2.

Пусть $A \supset A' \supset \ldots \supset A^{(m)} \supset \{0\}$, $(A^{(k)} = [A^{(k-1)}, A^{(k-1)}])$.

Ограничение представления T на A' обладает (по предположению индукции) весом χ. Очевидно, $\chi \mid A'' = 0$. Тогда подпространство

$$N = \{X \mid T_h X = 0 \ \ (h \in A'')\}$$

инвариантно относительно всей алгебры и на нем действует метабелева фактор-алгебра A/A'', представление которой, по лемме 4, обладает весом. Это и есть вес исходного представления.

Замечание 1. Теорема о существовании веса носит алгебраически локальный характер. В частности, справедливо следующее утверждение. Если A — локально разрешимая, нормированная алгебра Ли, T — равномерно непрерывное представление алгебры A ограниченными операторами в пространстве B, то у этого представления существует вес.

Напомним, что алгебра Ли называется локально разрешимой, если любой конечный набор ее элементов порождает разрешимую подалгебру (см., например, [4]).

Для доказательства выберем счётное, всюду плотное множество элементов алгебры A: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Любой конечный их набор $a_1 \ldots a_n$ принадлежит некоторой разрешимой (можно считать банаховой, в силу равномерной непрерывности представления) алгебре Ли A_n. Представление алгебры A_n, порождаемое исходным представлением алгебры A, обладает в силу теоремы весом χ, т. е. семейство операторов $T_{a_1}, T_{a_2} \ldots T_{a_n}$ в $\overline{m}(B)$ имеет общий собственный вектор. Метод работы [3] позволяет получить отсюда общий собственный вектор для всех операторов $\{T a_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$T a_k X = \chi(a_k) X.$$

Функция χ, продолженная по непрерывности на всю алгебру A, и будет искомым весом.

Замечание 2. Теоремы о существовании веса для представлений алгебр Ли позволяют получать аналогичные результаты для равномерно непрерывных представлений банаховых групп Ли. Действительно, каждое равномерно непрерывное представление группы Ли порождает равномерно непрерывное представление ее алгебры Ли по формуле

$$T_a = \lim_{\tau \to 0} \frac{T_{\exp \tau a} - I}{\tau}.$$

Тогда формула $\chi(\exp a) = e^{\chi(a)}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между спектром представления группы и спектром представления ее алгебры Ли.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Ю. И. Любича за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. М., ИЛ, 1962.

2. Д. Л. Гурарий, Ю. И. Любич. Бесконечный аналог теоремы Ли о весе. «Функциональный анализ и его приложения», 4, 1972.

3. Ю. И. Любич, О спектре представления топологической абелевой группы. ДАН СССР, т. 200, № 4, 1971.

4. Б. И. Плоткин. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли. УМН, 13, 1958, № 6.

Поступила 12 ноября 1971 г.