БЕЗУСЛОВНО КОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

И. И. Антыпко

В работе [1] получено необходимое и достаточное условие того что краевая задача

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t) = 0,$$
$$x \in R^m, \quad t \in [0,\ T] \tag{1}$$

при краевых условиях

$$\begin{cases} u(x,\ 0) = f_1(x), \\ u(x,\ T) = f_2(x), \end{cases} \tag{2_0}$$

где $P(s)$, $Q(s)$ — произвольные полиномы относительно $s_1, \ldots, s_m$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — заданные функции, была безусловно корректной. Ответ дается описанием вида уравнения (1). При этом задачу (1)—(2_0) называем *безусловно корректной*, если существует такое число $l \geqslant 0$, что при любых заданных функциях $f_1(x)$, $f_2(x)$, обладающих непрерывными производными до порядка l, задача имеет одно и только одно решение $u(x,\ t)$ и оно непрерывно зависит от краевых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ в следующем смысле: если последовательности $f_{1k}(x)$, и $f_{2k}(x)$ при $k \to \infty$ стремятся к нулю равномерно на любом компакте в R^m вместе со всеми своими производными до порядка l, то соответствующая последовательность решений $u_k(x,\ t)$ при каждом $t \in [0,\ T]$ также равномерно на любом компакте в R^m стремится к нулю при $k \to \infty$.

Целью настоящей статьи является обобщение результатов [1] на случай общих краевых условий вида

$$A_1 U_0(x) + A_2 U_T(x) = F(x), \tag{2}$$

где A_1, A_2 — квадратные матрицы типа 2×2; $U_0(x) = (u(x,\ 0),\ u'_t(x,\ 0))$, $U_T(x) = (u(x,\ T),\ u'_t(x,\ T))$, $F(x) = (f_1(x),\ f_2(x))$, ранг матрицы $A = (A_1 A_2)$ равен 2.

Теперь ответ должен зависеть от вида уравнения (1) и от вида матрицы A краевых условий (2). При этом существенную роль будет играть понятие бесконечности типа задачи (1)—(2). Задача (1)—(2) называется задачей бесконечного типа, если она имеет единственное решение в том же классе функций, что и задача Коши для уравнения (1). Вопрос о том, какие задачи вида (1)—(2) имеют бесконечный тип, полностью исследован нами в [2].

Основной результат настоящей статьи состоит в следующем.

Теорема. *Чтобы краевая задача (1)—(2) была безусловно корректной, необходимо и достаточно, чтобы она имела бесконечный тип и чтобы уравнение (1) было гиперболическим.*

Доказательство теоремы осуществляется на основе лемм 1—7. Прежде всего введем некоторые определения.

Наряду с задачей (1)—(2) рассмотрим следующую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $s = (s_1, \ldots, s_m)$:

$$\frac{d^2 v(s, t)}{dt^2} + P(is)\frac{dv(s, t)}{dt} + Q(is)\, v(s, t) = 0,$$
$$A_1 V_0(s) + A_2 V_T(s) = \Phi(s),$$

где $V_0(s) = (v(s, 0),\ v_t'(s, 0);\ V_T(s) = (v(s, T),\ v_t'(s, T));\ \Phi(s) = (\varphi_1(s),\ \varphi_2(s))$.

Ее решение может быть записано в виде

$$v(s, t) = \sum_{k=1}^{2} Q_k(s, t)\,\varphi_k(s).$$

Функции $Q_1(s, t)$, $Q_2(s, t)$ играют основную роль в дальнейшем. Будем называть их разрешающими функциями задачи (1)—(2). Они имеют вид

$$Q_1(s, t) = \frac{1}{\Delta(-s)}\left\{-2a_{21}e^{-\frac{tP(is)}{2}}\frac{\operatorname{sh}\frac{tD(is)}{2}}{D(is)} + a_{22}e^{-\frac{tP(is)}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{tD(is)}{2} + P(is)\frac{\operatorname{sh}\frac{tD(is)}{2}}{D(is)}\right] + 2a_{23}e^{-\frac{(T+t)P(is)}{2}}\frac{\operatorname{sh}\frac{(T-t)D(is)}{2}}{D(is)} + a_{24}e^{-\frac{(T+t)P(is)}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{(T-t)D(is)}{2} - P(is)\frac{\operatorname{sh}\frac{(T-t)D(is)}{2}}{D(is)}\right]\right\}, \tag{3}$$

если

$$D(is) \equiv \sqrt{P^2(is) - 4Q(is)} \neq 0.$$

Если же $D(is) = 0$, то $Q_1(s, t)$ задается формулой (3), где $\operatorname{ch} aD(is)$ и отношение $\frac{\operatorname{sh} aD(is)}{D(is)}$ заменяется соответственно на 1 и a. Выражение $Q_2(s, t)$ получается из $Q_1(s, t)$ заменой чисел a_{2j} числами $-a_{1j}$ (a_{kj} — элементы матрицы A). Вид функции $\Delta(s)$, называемой определителем краевой задачи (1)—(2), был найден в [2], где показано, что если $D(-is) \neq 0$, то

$$\Delta(s) = e^{-\frac{TP(-is)}{2}}\left\{A^{12}e^{\frac{TP(-is)}{2}} + A^{34}e^{-\frac{TP(-is)}{2}} + (A^{14} - A^{23})\operatorname{ch}\frac{TD(-is)}{2} + [2A^{13} + 2A^{24}Q(-is) - (A^{14} + A^{23})P(-is)]\frac{\operatorname{sh}\frac{TD(-is)}{2}}{D(-is)}\right\},$$

а если $D(-is)=0$, то

$$\Delta(s)=e^{-\frac{TP(-is)}{2}}\Big\{A^{12}e^{\frac{TP(-is)}{2}}+A^{34}e^{-\frac{TP(-is)}{2}}+$$
$$+A^{13}T+A^{24}TQ(-is)-$$
$$-A^{23}\left(1+\frac{TP(-is)}{2}\right)+A^{14}\left(1-\frac{TP(-is)}{2}\right)\Big\},$$

где A^{kj}, $1\leqslant k<j\leqslant 4$ — миноры 2-го порядка матрицы A.

Основную роль играет

Лемма 1. *Если краевая задача (1)—(2) безусловно корректна то разрешающие функции $Q_1(s, t)$, $Q_2(s, t)$ — целые функции относительно $s\in C^m$ не выше первого порядка роста, и при любом $t\in[0, T]$ существуют постоянные $C_1^k>0$, $C_2^k>0$, $k=1, 2$, такие, что при всех вещественных $\sigma\in R^m$ справедливы оценки*

$$|Q_k(\sigma, t)|\leqslant C_1^k(1+|\sigma|)^{C_2^k}.$$

Доказательство леммы 1 проводится так же, как в [1].

Обозначим $p=\deg P(s)$, $q=\deg Q(s)$, $2r=\deg D^2(s)$, будем всегда считать $p^2+q^2>0$. Дальнейшие исследования разобьем на случаи: 1^0 — $0\leqslant p<q$ (лемма 2); 2^0 — $p=r$ (леммы 3—6); 3^0 $p>r\geqslant 0$ (лемма 7).

Впредь будем употреблять следующую терминологию. Если $A=(A_1A_2)$ — матрица краевых условий (2), мы то говорим, что краевые условия (2) могут быть приведены к виду (2*) с матрицей $A^*=(A_1^*A_2^*)$, если существует невырожденная матрица B типа 2×2 такая, что $A=(BA_1^*\ BA_2^*)$ или $A=(BA_2^*, BA_1^*)$.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть $0\leqslant p<r$. Краевая задача (1)—(2) безусловно корректна тогда и только тогда, когда уравнение* (1) *имеет вид*

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}+P\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}+\sum_{k, j=1}^{m}A_{kj}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_k\,\partial x_j}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}B_k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_k}+Cu(x, t)=0,$$

где $-\sum_{k, j=1}^{m}A_{kj}\sigma_k\sigma_j$ — положительно определенная квадратичная форма, а краевые условия (2) могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} au(x, 0)-bu(x, T)=f_1(x),\\ aPu(x, 0)+au_t'(x, 0)+bu_t'(x, T)=f_2(x),\end{cases}$$

$$a\neq\pm e^{-\frac{TP}{2}}b.$$

Лемма 3. *Пусть полином* $Q(s)\equiv 0$. *Краевая задача (1)—(2) безусловно корректна тогда и только тогда, когда уравнение (1) имеет вид*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}+B\right)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=0,$$

где A_k, $k=1, \ldots, m$, *— вещественны, а краевые условия (2) могут быть приведены к виду*

$$\begin{cases} u_t'(x,\ 0)=f_1(x), \\ au(x,\ 0)-bu(x,\ T)+cu_t'(x,\ T)=f_2(x), \end{cases}$$

$$a\neq b.$$

Лемма 4. *Пусть* $p=r$ *и* $0\leqslant q<p$, *но* $Q(s)\not\equiv 0$. *Краевая задача (1)—(2) безусловно корректна тогда и только тогда, когда она приводится к задаче Коши для уравнения*

$$\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}+\sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x_k\,\partial t}+B\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}+$$
$$+Cu(x,\ t)=0,$$

где A_k, $k=1, \ldots, m$ *— вещественны,* $C\neq 0$.

Лемма 5. *Пусть* $p=r=q$. *Краевая задача (1)—(2) является безусловно корректной тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *уравнение (1) имеет вид*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\sum_{k=1}^{m} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}+B\right)\left(a\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}+u(x,\ t)\right)=0,$$

где $a\neq 0$, A_k, $k=1, \ldots, m$ *— вещественны, и краевые условия (2) могут быть приведены или к начальным условиям Коши, или к виду*

$$\begin{cases} u(x,\ 0)+au_t'(x,\ 0)=f_1(x), \\ bu(x,\ 0)+cu(x,\ T)+du_t'(x,\ T)=f_2(x), \end{cases}$$

$$e^{\frac{T}{a}}b+c-\frac{d}{a}\neq 0;$$

2) *задача (1)—(2) приводится к задаче Коши для уравнения вида (1), в котором* $P(s)=\sum\limits_{k=1}^{m} A_k s_k+B$, $Q(s)=\sum\limits_{k=1}^{m} C_k s_k+D$, A_k, $k=1, \ldots, m$ *— вещественны, и при любом* $a\neq 0$

$$P(s)\not\equiv aQ(s)+\frac{1}{a}.$$

Лемма 6. *Пусть $p=r$ и $p<q\leqslant 2p$. Краевая задача (1)—(2) безусловно корректна тогда и только тогда, когда она приводится к задаче Коши для уравнения*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\left(\sum_{k=1}^{m} A_k\frac{\partial}{\partial x_k}+B\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+$$
$$+\left(\sum_{k,j=1}^{m} C_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m} D_k\frac{\partial}{\partial x_k}+F\right)u(x,t)=0,$$

где A_k, $k=1,\ldots,m$ — вещественны и

$$\left(\sum_{k=1}^{m} A_k\sigma_k\right)^2>4\sum_{k,j=1}^{m} C_{kj}\sigma_k\sigma_j,\quad \sigma\in R^m.$$

Лемма 7. *Пусть $0\leqslant r<p$. Краевая задача (1)—(2) безусловно корректна тогда и только тогда, когда уравнение (1) имеет вид*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m} A_k\frac{\partial}{\partial x_k}+B\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m} A_k\frac{\partial}{\partial x_k}+C\right)u(x,t)=0,$$

где A_k, $k=1,\ldots,m$ — вещественны, а краевые условия (2) приводятся при $(B-C)T\neq 2k\pi i$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ к виду (2_0) или к начальным условиям задачи Коши, а при $(B-C)T=2k\pi i$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ к виду

$$\begin{cases} u(x,0)=f_1(x),\\ u_t'(x,0)+au(x,T)=f_2(x).\end{cases}$$

Приведем схему доказательства лемм 2—7.

Необходимость. Из безусловной корректности краевой задачи (1)—(2) следует, что она имеет бесконечный тип, поскольку в остальных случаях однородная задача (1)—(2) имеет нетривиальное решение [3]. Это обстоятельство выделяет вид краевых условий (2) [7, 2] при указанных соотношениях между числами p, q и r, а в случае $p=r=q$ — связь между полиномами $P(s)$ и $Q(s)$. Теперь с помощью леммы 1, используя вид функций $Q_1(s,t)$ и $Q_2(s,t)$, можно, с одной стороны, получить соотношение $p_0=\max\left\{p,\frac{q}{2}\right\}\leqslant 1$ (p_0 — приведенный порядок уравнения (1), [4]), откуда

$$p\leqslant 1,\ q\leqslant 2, \tag{4}$$

а с другой — оценку

$$\operatorname{Re}[P(i\sigma)\pm D(i\sigma)]\leqslant C,\ \sigma\in R^m, \tag{5}$$

справедливую при некотором $C > 0$. Оценка (5) в силу (4) равносильна оценкам

$$|\operatorname{Re} P(i\sigma)| \leqslant C_1, \tag{6}$$

$$|\operatorname{Re} D(i\sigma)| \leqslant C_2, \tag{7}$$

$$\sigma \in R^m, \ C_1 > 0, \ C_2 > 0.$$

Теперь из (4) и (6) следует вещественность коэффициентов A_k полинома $P(s) = \sum_{k=1}^{m} A_k s_k + B$; из (4) и (7) можно получить, что если

$$D^2(s) = \sum_{k,\ j=1}^{m} C_{kj} s_k s_j + \sum_{k=1}^{m} D_k s_k + F,$$

то $\sum_{k,\ j=1}^{m} C_{kj}\sigma_k\sigma_j > 0$ при всех $\sigma \in R^m$, $\|\sigma\| > 0$. Отметим, что условие (7) исключает случай $r = \frac{1}{2}$. Полученные условия на $P(s)$, $D(s)$ приводят к определенным соотношениям для коэффициентов полинома $Q(s)$. Получив условия на $P(s)$, $Q(s)$ и учитывая (4), приходим к выводам о виде уравнения (1) в каждой из лемм.

Достаточность в леммах 2—7 доказывается методом, примененным И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым, [4], при доказательстве основной теоремы для гиперболических систем. В силу условий лемм 2—7 $Q_1(s, t)$ и $Q_2(s, t)$ — целые функции не выше первого порядка роста, возрастающие при вещественных $s = \sigma$ не быстрее полинома. Поэтому

$$G_k(x, t) = F^{-1}\{Q_k(s, t)\} =$$
$$= T_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial}{\partial x_m}\right) g_k(x, t),$$

где $T_k(s_1, \ldots, s_m)$, $k = 1, 2$, — полиномы относительно $s_1, \ldots, s_m$; $g_k(x, t)$ — финитные функции; $F^{-1}\{\cdot\}$ — символ обратного преобразования Фурье. Тогда решение $u(x, t)$ краевой задачи (1)—(2) имеет вид

$$u(x, t) =$$
$$= \int \sum_{k=1}^{2} g_k(x - \xi, \ t) T_k^*\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ \ldots, -\frac{\partial}{\partial \xi_m}\right) f_k(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Здесь T_k^* — формально сопряженные T_k дифференциальные выражения.

Каждая из рассмотренных задач имеет бесконечный тип и приведенный порядок соответствующего уравнения $p_0 = 1$. Тогда в силу [3] единственность решения гарантируется в классе функций, растущих при $\|x\| \to \infty$ не быстрее, чем $\exp\{A\|x\|^b\}$ при каких-либо $A > 0$ и $b > 0$. Однако рассуждая точно так же, как в случае задачи Коши для гиперболических систем [4, стр. 69], в нашем случае можно получить единственность решения задачи (1)—(2) в классе всех функций без ограничения роста на бесконечности.

Существование и непрерывная зависимость решения $u(x, t)$ от краевых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ (для достаточно гладких $f_1(x)$, $f_2(x)$) следует из (8) в силу финитности функций $g_k(x, t)$.

Возвращаясь к теореме, отметим, что вид краевых условий (с учетом соотношений между числами p, q и r) в леммах 2—7 равносилен тому, что краевая задача (1)—(2) имеет бесконечный тип. Вид уравнения (1) в условии каждой из лемм 2—7 эквивалентен гиперболичности уравнения (1), 4. Это и завершает доказательство теоремы.

В заключение автор выражает благодарность В. М. Борок постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Безусловно корректные краевые задачи в бесконечном слое. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 36, 1971.

2. И. И. Антыпко. О краевой задаче бесконечного типа. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 38, 1973.

3. И. И. Антыпко. О краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. «Вестник Харьковского университета, математика и механика», вып. 36, 1971.

4. И. И. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз, М., 1958.

Поступила 28 января 1972 г.