ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ КОМБИНАЦИЯХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ»

А. А. Гольдберг, С. Б. Тушканов

В [1] были получены некоторые оценки числа исключительных комбинаций целых функций. Использованный там метод позволяет получить аналогичные результаты для более широких классов исключительных комбинаций, причем не только для целых функций, но и для функций, аналитических в единичном круге. Приведем также одну теорему из теории чисел, которая легко получается тем же методом. В этой заметке мы сформулируем теоремы и коротко отметим лишь новые по сравнению с [1] моменты в доказательствах.

Пусть $U(r)$ — положительная неубывающая функция, заданная при $r \geqslant 0$, такая, что $\ln r = O(U(r))$ и $U(2r) = O(U(r))$ при $r \to \infty$. Обозначим через C_2 множество мероморфных в конечной плоскости функций $f(z)$ таких, что $T(r, f) = O(U(r))$, $r \to \infty$. Очевидно, C_2 является полем. Пусть C_1 — произвольное подполе поля C_2. Приведем некоторые примеры подполей C_1: 1) $C_1 = C_2$; 2) C_1 — множество комплексных чисел; 3) C_1 — множество мероморфных в $\{z \neq \infty\}$ функций таких, что $T(r, f) = o(U(r))$, $r \to \infty$; 4) C_1 — множество мероморфных в $\{z \neq \infty\}$ функций таких, что $T(r, f) = O(U_1(r))$, $r \to \infty$, где $U_1(r)$ — некоторая функция на $[0, \infty)$ такая, что $U_1(r) \geqslant 1$ и $U_1(r) = O(U(r))$, $r \to \infty$.

Пусть задана система целых функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$, $\nu \geqslant 2$. Обозначим через r_j $(j = 1, 2)$ максимальное число функций $g_k(z)$, линейно независимых над полем C_j. Выражение

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j(z)\, g_j(z), \quad \alpha_j(z) \in C_1$$

будем называть линейной комбинацией. Линейная комбинация $F(z)$ называется исключительной, если $N(r, 0, F) = O(U(r))$, $r \to \infty$. Система линейных комбинаций

$$F_k(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{kj}(z) g_j(z), \quad k = 1, \ldots, \varkappa, \quad \nu \leqslant \varkappa < \infty$$

называется допустимой, если в матрице $\|\alpha_{kj}\|$, $1 \leqslant k \leqslant \varkappa$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, каждый минор порядка ν не равен тождественно нулю.

Теорема 1. *Пусть задана система целых функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ с $r_2 \geqslant 2$. Тогда допустимая система исключительных линейных комбинаций не может состоять из более чем*

$$q = \nu + \left[\frac{\nu - r_1}{r_2 - 1}\right]$$

комбинаций.

При доказательстве теоремы 1 используется

Лемма 1. *Система мероморфных в $\{z \neq \infty\}$ функций $\{F_1(z), \ldots, F_n(z)\}$ таких, что $N(r, \infty, F_j) = O(U(r))$,*

$$N(r, 0, F_j) = O(U(r)), \quad r \to \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{T(r, F_i/F_j)}{U(r)} = \infty, \quad i \neq j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{2}$$

является линейно независимой над полем C_2.

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 2 из [1]. При этом дополнительно используются следующие факты.

А) Если $f(z) \in C_2$, то $f(z)$ можно представить в виде частного двух целых функций из C_2 [2].

Б) Если $G(z) = \{g_1(z), \ldots, g_p(z)\}$ — трансцендентная целая кривая, причем функции $g_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, могут иметь общие нули, то для любых допустимых p-мерных векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q$ выполняется

$$(q - p) T(r, G) < \sum_{j=1}^{p} N(r, \boldsymbol{a}_j) + o(T(r, G)), \quad r \to \infty,$$

$$r \overline{\in} E, \quad \operatorname{mes} E < \infty.$$

Этот известный факт [3] легко получить также, слегка изменяя рассуждения в [4] (по сравнению с [4] новым обстоятельством является отсутствие требования, чтобы функции $g_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, не имели общих нулей).

В) Если

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{U(r)} = \infty,$$

то для всякого $E \subset [0, \infty)$, $\operatorname{mes} E < \infty$,

$$\varlimsup_{\substack{r \to \infty \\ r \overline{\in} E}} \frac{T(r, f)}{U(r)} = \infty.$$

Теорема 2. *Теорема 1 остается справедливой, если множество C_2 определять как множество мероморфных в $\{z \neq \infty\}$ функций, имеющих категорию роста более низкую, чем целая кривая $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$, а линейную комбинацию $F(z)$ считать исключительной, если категория роста $N(r, 0, F)$ более низкая, чем у G.*

Категорию роста мы понимаем в смысле [5, стр. 62, 65]. Для доказательства теоремы 2 надо воспользоваться леммой, которая получается, если в лемме 1 по-новому определить множество C_2, а условие (2) заменить требованием, чтобы частные F_i/F_j, $i \neq j$, имели одинаковую категорию роста с целой кривой G. Отметим, что при доказательстве этой леммы можно ссылаться не на результат Майлза [2], а на более раннюю теорему Рубела и Тейлора [6].

Рассмотрим теперь случай, когда $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ — функции, аналитические в круге $\{|z| < 1\}$. Пусть $U(r)$ — положительная неубывающая функция на $[0, 1)$ такая, что

$$\text{а)}\ \ln\frac{1}{1-r} = O(U(r)) \text{ при } r \to 1,$$

$$\text{б)}\ U(r') = O(U(r)), \text{ если } r \leqslant r' \leqslant r + o(1-r),\ r \to 1,$$

в) любую мероморфную в $\{|z| < 1\}$ функцию $f(z)$ такую, что $T(r, f) = O(U(r))$, $r \to 1$, можно представить в виде частного двух аналитических в $\{|z| < 1\}$ функций $h_1(z)$ и $h_2(z)$, таких, что $T(r, h_j) = O(U(r))$, $r \to 1$.

Теперь все определения, связанные с рассмотренным раньше случаем функций, мероморфных в конечной плоскости, без изменений переносятся на случай функций, мероморфных в $\{|z| < 1\}$.

Теорема 3. *Пусть задана система функций $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$, аналитических в $\{|z| < 1\}$, с $r_2 \geqslant 2$. Тогда допустимая система исключительных линейных комбинаций не может состоять из более чем q комбинаций, где число q определяется по формуле* (1).

При доказательстве теоремы 3 используется

Лемма 2. *Система мероморфных в $\{|z| < 1\}$ функций $\{F_1(z), \ldots, F_n(z)\}$ таких, что $N(r, \infty, F_j) = O(U(r))$,*

$$N(r, 0, F_j) = O(U(r)),\ r \to 1,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{T(r, F_i/F_j)}{U(r)} = \infty,\ i \neq j,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

является линейно независимой над полем C_2.

Условиям, наложенным на $U(r)$, удовлетворяют, в частности, функции $U(r) = (1-r)^{-\rho}$, $0 < \rho < \infty$ (по поводу условия в) см. [7, 8]), а также $U(r) = (-\ln(1-r))^{\sigma}$, $1 \leqslant \sigma < \infty$. В случае, когда $U(r) = -\ln(1-r)$, функции $g_1(z), \ldots, g_\nu(z)$ не имеют общих нулей и $C_1 = C_2$, из теоремы 3 следует теорема 7. II Тоды [9], а если C_1 — множество комплексных чисел, то теорема 3 дает более точную оценку, чем теорема 7.I Тоды.

Из теорем 1—3 обычным путем легко вывести следствия для алгеброидных функций.

Укажем теперь одно приложение метода работы [1] к теории чисел. Обозначим через C_1, C_2 подполя поля алгебраических чисел, $C_1 \subset C_2$. Пусть заданы ν комплексных чисел $g_1, \ldots, g_\nu$, $\nu \geqslant 2$. Обозначим через r_j $(j = 1, 2)$ максимальное число чисел g_k, линейно независимых над полем C_j. Выражение $F = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j g_j$, $\alpha_j \in C_1$, будем называть линейной комбинацией, притом исключительной, если $F = Ae^B$, где A и B — алгебраические числа. Система линейных комбинаций $F_k = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{kj} g_j$, $k = 1, \ldots, \varkappa$, $\nu \leqslant \varkappa < \infty$ называется допустимой, если в матрице $\|\alpha_{kj}\|$, $1 \leqslant k \leqslant \varkappa$, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, каждый минор порядка ν не равен нулю.

Теорема 4. *Пусть задана система комплексных чисел* $g_1, \ldots, g_\nu$ *с* $r_2 \geqslant 2$. *Тогда допустимая система исключительных линейных комбинаций не может состоять из более чем* q *комбинаций, где число* q *определяется по формуле* (1).

Эта теорема доказывается аналогично тому, как доказывалась теорема 1 из [1], причем ссылка на лемму 2 в [1] заменяется ссылкой на теорему Линдемана [10, стр. 58]. Покажем здесь лишь, что при заданных ν, r_1, r_2, $2 \leqslant r_2 \leqslant r_1 \leqslant \nu$ оценка, даваемая теоремой 4, не может быть улучшена (ср. пример [1, стр. 73]) ограничившись случаем, когда C_2 — поле алгебраических чисел, а C_1 — поле рациональных чисел. Обозначим $r_2 = r$, $r_1 = R$. Выберем натуральные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ так, чтобы $\sum_{j=1}^{r} \lambda_j = R$. Согласно лемме 1 из [1] и замечанию к ней существуют такие натуральные числа $q_1, \ldots, q_r$, для которых выполняется

$$\sum_{k=1}^{r} q_k = q = \nu + \left[\frac{\nu - R}{r - 1}\right],$$

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant r} (q_j - \lambda_j) = q - \nu. \qquad (3)$$

Обозначим члены конечной последовательности $\{1, 2, \ldots, q\}$ следующим образом: $\{n_{11}, \ldots, n_{1q_1}, n_{21}, \ldots, n_{2q_2}, \ldots, n_{r1}, \ldots, n_{rq_r}\}$. Пусть $\{p_1, p_2, \ldots\} = \{1, 2, 3, 5, \ldots\}$ — последовательность простых чисел. Пусть $(1 \leqslant j \leqslant r)$

$$\mu_j(x) = \prod_{k=1}^{q_j} (x - n_{jk}), \quad \psi_j(x) = \prod_{k=1}^{\lambda_j} (x - n_{jk}),$$

$$\tau_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{r} \mu_k(x),$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{\sqrt{p_k}\, \psi_j(x)}{(x - n_{jk})\, \psi_j'(n_{jk})}.$$

Очевидно, $\varphi_j(n_{jk}) = \sqrt{p_k}$, а $\tau_j(n_{jk}) \neq 0$ — целое число. Степень многочлена $\tau_j(x)$ равна $q - q_j$. Пусть

$$F(x) = \sum_{j=1}^{r} \tau_j(x) \varphi_j(x) e^j.$$

Степень многочлена $F(x)$ равна $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant r}(q - q_j + \lambda_j - 1) = \nu - 1$ в силу (3). Поэтому

$$F(x) = x^{\nu-1} g_1 + \cdots + x g_{\nu-1} + g_\nu, \; g_1 \neq 0.$$

Комбинации $F_k = F(k)$ чисел $g_1, \ldots, g_\nu$, $1 \leqslant k \leqslant q$ являются искомыми. Они допустимые, так как матрица коэффициентов есть матрица Вандермонда. Поскольку $F(n_{jk}) = \tau_j(n_{jk}) \varphi_j(n_{jk}) e^j$, $F(n_{jk})$ — исключительная комбинация, $1 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant k \leqslant q_j$. Среди F_k имеется r линейно независимых над полем алгебраических чисел — числа $F(n_{j1})$, с точностью до целого множителя равные $e^1, e^2, \ldots, e^r$, и R линейно независимых над полем рациональных чисел — с точностью до целого множителя это числа $\sqrt{p_k} e^j$, $1 \leqslant k \leqslant \lambda_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гольдберг, С. Б. Тушканов. Об исключительных комбинациях целых функций. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 13. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.

2. J. Miles, Representing a meromorphic function as the quotient of two entire functions of small characteristic, Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76, № 6.

3. L. Ahlfors. The theory of meromorphic curves, Acta Soc. sci. fenn., 1941, 3, № 4.

4. А. А. Гольдберг. Некоторые вопросы теории распределения значений. Дополнение к книге Г. Виттих «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям». М., Физматгиз, 1960.

5. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970.

6. L. A. Rubel, B. A. Taylor. A Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bull. Soc. Math. France, 1968, 96, № 1.

7. А. Г. Нафталевич. Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге. ДАН СССР, 88, 1953.

8. А. Г. Нафталевич. Об интерполировании функций, мероморфных в единичном круге. «Литовск. матем. сб.», 1, 1961, № 1—2.

9. N. Toda. Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes, Tôhoku Math. J., 1970, 22, № 2.

10. А. О. Гельфонд. Трансцендентные и алгебраические числа. М., Гостехиздат, 1952.

Поступила 29 ноября 1971 г.