НЕСКОЛЬКО НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. А. Фильштинский

Пусть $T_n(\theta) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$ — тригонометрический многочлен; $\sigma(t)$-функция ограниченной вариации, тригонометрические моменты которой

$$\lambda_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt}\, d\sigma(t), \quad \pm k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \tag{1}$$

заданы. Запишем очевидное неравенство

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c e^{ik\theta} \right| = \left| \int_0^{2\pi} T_n(\theta + t)\, d\sigma(t) \right| \leqslant \leqslant \operatorname*{Var}_{[0,2\pi]} \sigma(t) \max |T_n(\theta)|. \tag{2}$$

Предположим, что числа λ_k выбраны следующим образом: если $n = 2m$, то $\lambda_0,\ \lambda_{\pm 1},\ \ldots,\ \lambda_{\pm m}$ произвольны, а

$$\lambda_{\pm(m+1)} = \lambda_{\mp m} e^{\pm i(n+1)\varphi},\ \lambda_{\pm(m+2)} = \lambda_{\pm(m-1)},\ e^{\pm i(n+1)\varphi} \ldots, \lambda_{\pm 2m} = \lambda_{\mp 1} e^{\pm i(n+1)\varphi} \tag{3}$$

при некотором вещественном φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{n+1}$. Если же $n = 2m - 1$, то $\lambda_0, \lambda_{\pm 1}, \ldots, \lambda_{\pm(m-1)}$ и λ_m произвольны, а

$$\lambda_{-m} = \lambda_m e^{-i(n+1)\varphi}, \; \lambda_{\pm(m-1)} = \lambda_{\pm(m-1)} e^{\pm i(n+1)\varphi}, \; \ldots, \\ \lambda_{\pm(2m-1)} = \lambda_{\mp 1} e^{\pm i(n+1)\varphi} \tag{4}$$

при некотором вещественном φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{n+1}$. Функцию скачков $\sigma(t)$ выберем следующим образом: точки скачков

$$\theta_\nu = \varphi + \frac{2\nu\pi}{n+1}, \; \nu = 0, 1, \ldots, n;$$

скачки определяются из системы уравнений

$$\left.\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{n} \rho_\nu e^{ik\theta_\nu}\right\} \; \pm k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

в которой при $n = 2m - 1$ удалено одно уравнение, соответствующее $k = -m$.

Нетрудно проверить, что равенства (1) для так выбранных чисел $\{\lambda_k\}_{k=-n}^{n}$ и функции $\sigma(t)$ справедливы. Следовательно, имеет место неравенство (2). Докажем, что оно точное. С этой целью рассмотрим многочлен Джексона

$$T_n^{(0)}(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)(\theta - \theta_\nu)}{(n+1)\sin\frac{1}{2}(\theta - \theta_\nu)} \right\}^2 \left(\equiv \sum_{k=-n}^{n} c_k^{(0)} e^{ik\theta} \right), \tag{5}$$

где

$$\theta_\nu = \varphi + \frac{2\nu\pi}{n+1}, \; \varepsilon_\nu = e^{-i \arg \rho_\nu}, \; \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Известно [1], что

$$T_h^{(0)}(\theta_\nu) = \varepsilon_\nu, \quad \max_{[0,2\pi]} |T_n^{(0)}(\theta)| = 1. \tag{6}$$

Кроме того,

$$\left| \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c_k^{(0)} \right| = \left| \int_0^{2\pi} T_n^{(0)}(t)\, d\sigma(t) \right| = \sum_{\nu=0}^{n} |\rho_\nu| = \operatorname*{Var}_{[0,2\pi]} \sigma(t).$$

Поэтому

$$\max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c_k^{(0)} e^{ik\theta} \right| \geqslant \operatorname*{Var}_{[0,2\pi]} \sigma(t),$$

откуда (а также из (2), (6)) следует, что

$$\max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k c_k^{(0)} e^{ik\theta} \right| = \operatorname*{Var}_{[0,2\pi]} \sigma(t)$$

Найдем величину полной вариации функции $\sigma(t)$ на интервале $[0,2\pi]$.

Лемма. Если

$$\lambda_k = \sum_{\nu=0}^{n} \delta_\nu e^{ik\varphi_\nu}, \quad \pm k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

то

$$I_n(\theta) \equiv \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{-ik\theta} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{m} \delta_\nu \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)(\theta-\varphi_\nu)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi_\nu)} \right\}^2.$$

Действительно,

$$I_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{-ik\theta} \sum_{\nu=0}^{m} \delta_\nu e^{ik\varphi_\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \delta_\nu \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ik(\varphi_\nu-\theta)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{m} \delta_\nu \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)(\theta-\varphi_\nu)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi_\nu)} \right\}^2.$$

Положим в лемме $m = n$, $\delta_\nu = \rho_\nu$, $\varphi_\nu = \theta_\nu$. Тогда

$$I_n(\theta) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \rho_\nu \left\{ \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)(\theta-\theta_\nu)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_\nu)} \right\}^2,$$

откуда следует, что

$$\rho_\nu = \frac{1}{n+1} I_n(\theta_\nu), \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Пусть

$$R_{2m}(\theta) = \sum_{\nu=-m}^{m} \lambda_\nu e^{-i\nu\theta}, \text{ если } n = 2m,$$

и

$$R_{2m-1}(\theta) = \sum_{\nu=-(m-1)}^{m} \lambda_\nu e^{-i\nu\theta}, \text{ если } n = 2m-1.$$

Легко проверить, что $I_n(\theta_\nu) = R_n(\theta_\nu)$. В самом деле, если $n = 2m$, то, используя (3), находим, что

$$I_{2m}\left(\varphi+\frac{2\nu\pi}{2m+1}\right)=\sum_{k=-2m}^{-(m+1)}+\sum_{k=-m}^{m}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{2m}\left(1-\frac{|k|}{2m+1}\right)\lambda_k e^{-ik\left(\varphi+\frac{2\nu\pi}{2m+1}\right)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2m+1}e^{i(2m+1-k)\left(\varphi+\frac{2\nu\pi}{2m+1}\right)}\lambda_{k-(2m+1)}+$$

$$+\sum_{k=-m}^{m}\left(1-\frac{|k|}{2m+1}\right)\lambda_k e^{-ik\left(\varphi+\frac{2\nu\pi}{2m+1}\right)}+$$

$$+\sum_{k=-m}^{-1}\frac{|k|}{2m+1}e^{-i(2m+1+k)\left(\varphi+\frac{2\nu\pi}{2m+1}\right)}\times\lambda_{2m+1+k}=$$

$$=\sum_{k=-m}^{m}\lambda_k e^{-ik\left(\varphi+\frac{2\nu\pi}{2m+1}\right)}=R_{2m}(\theta_\nu).$$

Аналогично проверяется равенство $I_n(\theta_\nu)=R_n(\theta_\nu)$ в случае нечетного n. Итак,

$$\operatorname*{Var}_{[0,2\pi]}\sigma(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|R_n(\theta_\nu)|.$$

Суммируя сказанное, можно сформулировать.

Предложение. *Если числа* $\{\lambda_k\}_{k=-n}^{n}$ *удовлетворяют условиям (3) (при* $n=2m$*) или* (4) *(при* $n=2m-1$*), то справедливо точное (в классе тригонометрических многочленов порядка не выше* n*) неравенство*

$$\left|\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k c_k e^{ik\theta}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|R_n(\theta_\nu)|\max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\theta}\right|,\qquad(7)$$

в котором равенство достигается на многочлене Джексона (5).

Следствие 1. *Пусть* γ *— некоторое вещественное или комплексное число. Любой многочлен* $T_n(\theta)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik\theta}$ *удовлетворяет точному неравенству*

$$\max_{[0,2\pi]}\left|\gamma c_0+\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}c_k e^{ik\theta}\right|\leqslant\frac{|\gamma+n|+n|\gamma-1|}{n+1}\max_{[0,2\pi]}|T_n(\theta)|.$$

Действительно, последовательность $\lambda_0 = \gamma$, $\lambda_{\pm 1} = \cdots = \lambda_{\pm n} = 1$ удовлетворяет условиям (3) или (4) при $\varphi = 0$.

Поэтому справедливо неравенство (7). Осталось вычислить $R_n(\theta_\nu)$. Но в нашем случае

$$R_n(\theta_\nu) = \begin{cases} \gamma + n, & \text{если } \nu = 0, \\ \gamma - 1, & \text{если } \nu = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Так же доказываются и дальнейшие следствия.

Следствие 2. *Для любого тригонометрического многочлена порядка не выше $2m-1$ справедливо точное неравенство*[1]

$$\max |c_0\gamma + c_m\delta e^{im\theta} + c_m\bar{\delta}e^{-im\theta}| \leqslant \max(|\gamma|, |\delta|) \times \max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} c_k e^{ik\theta} \right|, \tag{8}$$

где γ, δ — произвольные числа, причем γ — вещественное. $\left(\text{Здесь нужно положить } \varphi = \frac{1}{m}\arg\delta\right)$.

Следствие 3. *Неравенство*

$$\max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_n\left(\theta + \frac{2k\pi}{n+1}\right) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \max_{[0,2\pi]} |T_n(\theta)|$$

тривиально, но не улучшаемо.

(Здесь $\varphi = 0$, $R_n(\theta_\nu) = (n+1)\alpha_\nu$).

Следствие 4. *Справедливы точные неравенства*

$$\max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{\pm k = r,\, 2m-r} c_k e^{ik\theta} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} c_k e^{ik\theta} \right| \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2q}}{q}, & \textit{если } q \textit{ — четное}, \\ \dfrac{2}{q\sin\frac{\pi}{2q}}, & \textit{если } q \textit{ — нечетное}, \end{cases} \tag{9}$$

$$\max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=\pm r} c_k e^{ik\theta} - \sum_{k=\pm(2m-r)} c_k e^{ik\theta} \right| \leqslant$$

---

[1] Если c_0 — вещественное, а $c_{-m} = \bar{c}_m$, то неравенство (8) можно переписать в форме

$$|c_0\gamma| + 2|c_m\delta| \leqslant \max(|\gamma|, |\delta|) \max_{[0,2\pi]} \left| \sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} c_k e^{ik\theta} \right|. \tag{8'}$$

$$\leqslant \max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-(2m-1)}^{2m-1} c_k e^{ik\theta}\right| \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2q}}{q}, & \text{если } \begin{matrix} p\text{ — нечетное,} \\ q\text{ — нечетное,} \end{matrix} \\ \dfrac{2}{q\sin\dfrac{\pi}{2q}}, & \begin{matrix} \text{если } q\text{ — четное, } p\text{ — нечетное,} \\ \text{если } q\text{ — нечетное, } p\text{ — четное,} \end{matrix} \end{cases} \tag{10}$$

где $1 \leqslant r \leqslant m-1$, $\frac{r}{m}=\frac{p}{q}$ *и дробь* $\frac{p}{q}$ *несократима.*

$$\max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{\pm k=r,\ 2m+1-r} c_k e^{ik\theta}\right| \leqslant \frac{2}{q\sin\frac{\pi}{2q}} \max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-2m}^{2m} c_k e^{ik\theta}\right|, \tag{11}$$

$$\max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=\pm r} c_k e^{ik\theta} - \sum_{k=\pm(2m+1-r)} c_k e^{ik\theta}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-2m}^{2m} c_k e^{ik\theta}\right| \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2q}}{q}, & \text{если } p\text{ — нечетное,} \\ \dfrac{2}{q\sin\dfrac{\pi}{2q}}, & \text{если } p\text{ — четное,} \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $1 \leqslant r \leqslant m$, $\frac{2r}{2m+1}=\frac{p}{q}$ *и дробь* $\frac{p}{q}$ *несократима.*

Неравенства (8)—(12) примыкают к известным неравенствам [2, 3]:

$$|c_0| + 2|c_r| \leqslant \max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right|, \quad r > \frac{n}{2},$$

$$|c_0| + |c_r| \sec\frac{\pi}{\left[\frac{n}{r}\right]+2} \leqslant \max_{[0,2\pi]}\left|\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. I, стр. 217.
2. J. G. Van der Corput and C. Visser. Inequalities concerning polynomials and trigonommetric polynomials, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 49 (1946), 383—392.
3. R. P. Boas. Jr., Inequalities for the coefficients of trigonometric polynomials, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch, 59 (1947), 492—495.

Поступила 23 ноября 1971 г.