НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

Е. А. Горин, Ю. Ю. Кочетков, Б. С. Митягин

Пусть A — кольцо. Дифференцированием в A называется такое отображение $d: A \to A$, что

$$d(x+y) = dx + dy$$

и

$$d(xy) = x\,dy + (dx)\,y.$$

Если A — алгебра, то дополнительно предполагается, что d линейно. Абстрактное дифференцирование рассматривалось в самых разнообразных ситуациях. Мы отметим лишь некоторые работы, в которых (непрерывный) оператор дифференцирования изучался в банаховых алгебрах над полем C комплексных чисел.

Зингер и Вермер [1] показали, что непрерывное дифференцирование переводит коммутативную банахову алгебру в ее радикал. Их способ доказательства основан на рассмотрении целой функции $\lambda \to e^{\lambda d}$, значениями которой служат автоморфизмы алгебры. Ф. В. Широков по существу рассмотрел дифференцирования частного вида $x \to ax - xa$, снова используя аналитические средства [2]. Его результат состоит в том, что $ax - xa$ является обобщенным нильпотентом, если этот элемент коммутирует с x. Иной, более элементарный подход к этому кругу вопросов был осуществлен в работе Кляйнике [3].

Теорема Зингера — Вермера, а также результат Широкова могут быть получены единым чисто алгебраическим способом. Этот способ (близкий к [3], но более непосредственный) будет описан ниже. Основой служит формула дифференциального исчисления, без которой, видимо, нельзя обойтись при выводе известной формулы Фаа-де-Бруно для n-й производной от сложной функции [4, стр. 33, формула 0,430].

В конечномерном случае дифференцирование может осуществлять изоморфизм радикала. Возникает вопрос, на который наводит рассмотрение алгебр степенных рядов: осуществима ли подобная ситуация в бесконечномерной коммутативной банаховой алгебре с нетривиальным радикалом, но без нильпотентов. Приводим пример такого непрерывного дифференцирования банаховой алгебры без нильпотентов, но с бесконечномерным радикалом, что образом служит весь радикал этой алгебры. Хотя мы не знаем, может ли в такой обстановке дифференцирование осуществлять изоморфизм радикала, но показываем, что наличие подобного дифференцирования в алгебре A накладывает серьезные ограничения на убывание последовательности

$$\chi_n = \sup\{\|r^n\| : r \in \mathrm{Rad}(A),\ \|r\| \leqslant 1\},$$

где $\mathrm{Rad}(A)$ — радикал алгебры A.

1. Основная формула. Пусть $d: A \to A$ — дифференцирование кольца A. Как обычно, полагаем $[a, b] = ab - ba$ и $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Теорема. *Если* $[x, dx] = 0$, *то*

$$n!\,(dx)^n = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \binom{n}{m} x^m d^n x^{n-m}. \qquad (1)$$

Доказательство разбито на леммы. Положим

$$v_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k}{m} x^m d^n x^{k-m}.$$

Лемма 1. $dv_n^{(k)} = v_{n+1}^{(k)} - k\,dx v_n^{(k-1)}$.

Эта формула очевидна, если не забывать, что $dx^l = lx^{l-1}\,dx$, поскольку $[x, dx] = 0$.

Лемма 2. *Если* $k > n$, *то* $v_n^{(k)} = 0$.

Действительно, при $n = 1$ $(k > 1)$ имеем

$$v_1^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k}{m} x^m dx^{k-m} = kx^{k-1}\,dx \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k-1}{m} = 0.$$

Если $k > n + 1$, то $k - 1 > n$, и для завершения индукции достаточно использовать лемму 1.

Доказательство теоремы. Полагая $k = n + 1$ в лемме 2, получаем $v_{n+1}^{(n+1)} = (n + 1)\,dx v_n^{(n)}$. Так как $v_1^{(1)} = dx$, то $v_n^{(n)} = n!(dx)^n$, что эквивалентно формуле (1).

Предположим, что A — банахова алгебра, а d — непрерывное дифференцирование.

Следствие 1. *Если* $[x, dx] = 0$, *то*

$$\|(dx)^n\|^{1/n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следствие 2 [1]. *Непрерывное дифференцирование коммутативной банаховой алгебры отображает в радикал.*

Следствие 3 [2]. *Если в банаховой алгебре $ax - xa$ коммутирует с x, то $ax - xa$ — обобщенный нильпотент.*

2. Примеры.

1) Рассмотрим алгебру $J\{\omega_n\}$ формальных степенных рядов, сходящихся с весом ω_n. Точнее, пусть ω_n — такая положительная последовательность, что $\omega_0 = 1$ и $\omega_{n+m} \leqslant \omega_n \omega_m$, а $J\{\omega_n\}$ — совокупность рядов вида

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau^k$$

с обычными операциями и нормой

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \omega_k.$$

Тогда $J\{\omega_n\}$ — банахова алгебра. Если дополнительно

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n^{1/n} = 0,$$

эта алгебра примарна (ее образующая τ удовлетворяет условию $\|\tau^n\|^{1/n} \to 0$ и, следовательно, принадлежит радикалу). В такой алгебре при некоторых условиях на ω_n возможно нетривиальное непрерывное дифференцирование. В частности, при $\omega_n = \frac{1}{n!}$ можно положить $d\tau = \tau^2$. В общем случае для определения d достаточно задать элемент $b = d\tau$. Пусть

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \tau^k.$$

Тогда $\beta_0 = 0$ и

$$d\tau^n = n\tau^{n-1} b,$$

так что

$$\|n\tau^{n-1} b\| \leqslant C \|\tau^n\|.$$

Поэтому при любом k

$$|\beta_k| \leqslant C \inf_n \frac{\omega_n}{n\omega_{k+n-1}}.$$

Полагая здесь $k = 1$, получаем $\beta_1 = 0$.

Таким образом, *никакое непрерывное дифференцирование алгебры $J\{\omega_n\}$ не может иметь образом весь радикал этой алгебры.*

2) Приведем пример непрерывного дифференцирования алгебры без нильпотентов, но с бесконечномерным радикалом, при котором

образом служит весь радикал алгебры. Рассмотрим алгебру A степенных рядов от двух переменных

$$x = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} a_{k,\, l}\sigma^k\tau^l$$

с нормой

$$\|x\| = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} |a_{k,\, l}| \frac{k!}{(k+l)!}.$$

Нетрудно описать пространство максимальных идеалов этой алгебры. Если φ — гомоморфизм алгебры в поле комплексных чисел, то $|\varphi(\sigma)| \leqslant 1$, а $\varphi(\tau) = 0$. Отсюда легко следует, что пространство максимальных идеалов отождествляется с диском $|z| \leqslant 1$ на комплексной плоскости. Радикал состоит из тех и только тех x, для которых $a_{k,\, l} = 0$ при $l = 0$. Зададим дифференцирование $d: A \to A$, полагая

$$d(\sigma^k\tau^l) = \begin{cases} k\sigma^{k-1}\tau^{l+1}, & \text{если } k \neq 0, \\ 0, & \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Другими словами, $d\sigma = \tau$ и $d(\tau) = 0$. Ясно, что $\|d\| = 1$.

Пусть теперь $x \in \mathrm{Rad}(A)$. Тогда

$$x = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} b_{k,\, l}\,\sigma^k\tau^{l+1} = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} \frac{b_{k,\, l}}{k+1} d(\sigma^{k+1}\tau^l).$$

Понятно, что

$$y = \sum_{k,\, l=0}^{\infty} \frac{b_{k,\, l}}{k+1} \sigma^{k+1}\tau^l \in A$$

и $x = dy$. Построение закончено.

3. Оценка последовательности χ_n. Последовательность

$$\chi_n = \{\|r^n\| : r \in \mathrm{Rad}(A),\ \|r\| \leqslant 1\}$$

часто возникает, когда речь идет о тех или иных свойствах неполупростых алгебр [5, 6]. Мы покажем, что наличие дифференцирования, индуцирующего отображения радикала на себя, накладывает ограничение на характер убывания этой последовательности. Оценка, приводимая ниже, основана на формуле (1).

Теорема. *Предположим, что имеется непрерывное дифференцирование* d, *индуцирующее отображение радикала на себя. Тогда*

$$\chi_n \leqslant e^{-\varepsilon n \log^2 n}$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

Доказательство. По условию, отображение d индуцирует надъективный оператор

$$d: \mathrm{Rad}(A) \to \mathrm{Rad}(A)$$

банаховых пространств. Согласно теореме Банаха, существует такое $\rho > 0$, что образ шара $\|r\| < 1$ содержит шар $\|r\| < \rho$. Поэтому

$$\sup \{ \|(dr)^n\| : \|r\| \leqslant 1,\ r \in \operatorname{Rad}(A)\} \geqslant \rho^n \chi_n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\rho^n \chi_n \leqslant \frac{\|d\|^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \chi_k \chi_{n-k},$$

т. е.

$$\chi_n \leqslant \frac{c^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \chi_k \chi_{n-k} \tag{3}$$

с некоторой константой c. Так как $\chi_n \leqslant 1$, из (3) получаем

$$\chi_n \leqslant \frac{c^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} < \frac{2^n c^n}{n!}. \tag{4}$$

Подставив оценку (4) в (3), будем иметь

$$\chi_n \leqslant \frac{c^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{2^n c^n}{k!\,(n-k)!} = \frac{2^n c^{2n}}{(n!)^2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 < \frac{2^{3n} c^{2n}}{(n!)^2}.$$

Продолжая итерации, видим, что при любом p

$$\chi_n \leqslant \frac{c^{pn} 2^{\frac{p(p+1)}{2} n}}{(n!)^p}$$

и, следовательно,

$$\chi_n \leqslant \inf_p \frac{a^{p^2 n}}{n^{pn}} \tag{5}$$

с некоторым фиксированным $a > 1$. Нижняя грань справа в (5) достигается, если

$$p = \frac{1}{2} \frac{\log n}{\log a},$$

и это дает

$$\log \chi_n \leqslant -\frac{1}{4} \frac{n \log^2 n}{\log a},$$

что эквивалентно утверждению теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. M. Singer, J. Wermer. Derivations on commutative normed algebras, Math. Ann., 129 (1955), 260—264.

2. Ф. В. Широков. Доказательство гипотезы Капланского. УМН 11, 4 (66), (1956), 167—168.

3. D. C. Kleinike. On operator commutators, Proc. Am. Math. Soc., 8, 3 (1957), 535—536.

4. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

5. А. Я. Хелемский. Об одном аналитическом условии на радикал коммутативной банаховской алгебры и связанных с ним вопросах разложимости. ДАН СССР, **167**, 3, (1966), 525—527.

6. Е. А. Горин и В. Я. Лин. Об одном условии на радикал банаховой алгебры, обеспечивающем сильную разложимость. «Математические заметки», **2**, 6, (1967), 589—592.

Поступила 9 ноября 1971 г.