ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ВКЛЮЧЕНИЯ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МАТРИЦАМИ С КОНЕЧНЫМИ СТРОКАМИ

Г. А. Михалин

В работе [1] отмечено одно свойство включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами. Оно заключается в следующем.

Теорема А. *Пусть* $A=\|a_{nk}\|$ — *нижняя треугольная матрица,* $B=\|b_{nk}\|$ — *нормальная матрица. Если* $B\subseteq A$, *то* $F_B\subseteq F_A$, *где* F_B, F_A — множества всех последовательностей $\{S_n\}$, *для которых соответственно*

$$\sum_{k=0}^{n} b_{nk}S_k = O(1) \text{ и } \sum_{k=0}^{n} a_{nk}S_k = O(1).$$

С помощью этой теоремы в работе доказывается ряд других фактов.

В этой же работе [1] отмечено, что указанное свойство, а следовательно, и доказанные на его основе другие факты для матриц с конечными строками, вообще говоря, не имеют места.

Дадим прежде всего определение.

Если матрица $B=\|b_{nk}\|$ такая, что система уравнений

$$t_n=\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}S_k \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

имеет единственное решение, соответствующее каждой последовательности $\{t_n\}$, то назовем ее матрицей типа R'.

В вопросе остальных определений и обозначений будем придерживаться работы [2].

Известно [3, стр. 41], что для каждой матрицы $B=\|b_{nk}\|$ типа R' существует матрица $B^{-1}=\|\overset{-1}{b_{nk}}\|$ такая, что решение системы (1) имеет вид

$$S_k=\sum_{i=0}^{\infty} \overset{-1}{b_{ki}}t_i \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

причем $\overset{-1}{b_{ki}}=0$ для всех $i>i_k$ $(k=0,\ 1,\ 2\ \ldots)$.

Известно также [3, стр. 43], что каждая матрица типа R' является матрицей с конечными строками.

Покажем, что матрица $B^{-1} = \| b_{nk}^{-1} \|$ является двусторонней обратной для матрицы $B = \| b_{nk} \|$, т. е.

$$B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = E, \tag{3}$$

где $E = \| e_{nk} \|$ — единичная матрица.

Действительно, если

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{для } n = k_0, \\ 0 & \text{для } n \neq k_0, \end{cases}$$

то система (1) примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k = \begin{cases} 1 & \text{для } n = k_0, \\ 0 & \text{для } n \neq k_0. \end{cases}$$

Эта система должна иметь единственное решение, определяемое по формулам (2), которые в нашем случае примут вид

$$S_k = b_{kk_0}^{-1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} b_{kk_0}^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{для } n = k_0, \\ 0 & \text{для } n \neq k_0, \end{cases}$$

а это и значит, что $BB^{-1} = E$. Далее, если $t_n = b_{nk_0}$ (k_0 — фиксированное) $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, то система (1) преобразуется так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k = b_{nk_0} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Так как, с одной стороны, эта система должна иметь единственное решение, определяемое по формуле

$$S_k = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1} b_{ik_0},$$

а с другой стороны, решением (4) является $S_k = \begin{cases} 1 & \text{для } k = k_0, \\ 0 & \text{для } k \neq k_0, \end{cases}$

то $\sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1} b_{ik_0} = \begin{cases} 1 & \text{для } k = k_0, \\ 0 & \text{для } k \neq k_0; \end{cases}$ это значит, что $B^{-1} \cdot B = E$. Следовательно, (3) доказано.

Совершенно ясно, что каждая нормальная матрица является матрицей типа R', а каждая матрица типа R' реверсивна. Существуют матрицы типа R', которые не являются нормальными, причем они суммируют некоторые расходящиеся последовательности. Такой будет, например, матрица A:

$$A = \left\| \begin{array}{cccccccccccccccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|$$

Можно показать, что A будет матрицей типа R', следовательно, и реверсивной. Так как A является T-матрицей и $\| A^{-1} \| = \infty$, где $\| A^{-1} \|$ — норма матрицы A^{-1}, то по известной теореме [2, стр. 380] она суммирует расходящиеся последовательности. Тот факт, что матрица A не является даже треугольной, очевиден.

Покажем теперь, что справедлива

Теорема 1. *Пусть* $B = \| b_{nk} \|$ — *матрица типа* R', *а* $A = \| a_{nk} \|$ — *произвольная матрица.*

Чтобы из включения $B \subseteq A$ *следовало включение* $F_B \subseteq F_A$, *необходимо и достаточно*

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} b_{ki}^{-1} \right| = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Доказательство. $B = \| b_{nk} \|$ — матрица типа R', следовательно, и реверсивная. Чтобы $B \subseteq A$, необходимо и достаточно следующее [4, стр. 57]:

$$1) \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} b_{ki}^{-1} \neq \infty \quad (n, i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$2) \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1} \neq \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$3) \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} b_{ki}^{-1} = C_i \neq \infty,$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1} = C \neq \infty,$$

$$5)\ \sum_{i=0}^{\infty}\Big|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}b_{ki}^{-1}\Big| \leqslant H_n < \infty \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

где H_n не зависит от m,

$$6)\ \sum_{i=0}^{\infty}\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}b_{ki}^{-1}\Big| \leqslant H < \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где H_n не зависит от n.

Пусть $\{S_n\}$ — произвольная последовательность из F_B, т. е.

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}S_k = O(1).$$

Введем обозначение

$$\tau_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} a_{nk}S_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk}\sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1}t_i = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{m} a_{nk}b_{ki}^{-1}\Big)t_i.$$

Чтобы существовал предел

$$\lim_{m\to\infty}\tau_n^{(m)} = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{m} a_{nk}b_{ki}^{-1}\Big)t_i = \tau_n$$

и выполнялось равенство

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}S_k = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}b_{ki}^{-1}\Big)t_i, \tag{6}$$

в силу известной теоремы [4, стр. 17—18] необходимо и достаточно выполнение условий 1), 5) и (5). Справедливость утверждения теоремы 1 следует из последнего равенства и 6).

Замечания 1. Если матрица $A = \|a_{nk}\|$ является матрицей с конечными строками, то условие (5) необходимо выполняется. Таким образом, теорема A есть следствие теоремы 1.

2. Условие (5) не является следствием условий 1)—6). Это видно из приведенного ниже примера.

Рассмотрим матрицу $B = \|b_{nk}\|$, где

$$b_{nk} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2^k} & \text{для } k < n, \\ -\dfrac{n+1}{2^n} & \text{для } k = n, \\ 0 & \text{для } k > n. \end{cases}$$

Легко показать, что матрица $B^{-1} = \|b_{nk}^{-1}\|$ имеет вид

$$b_{nk}^{-1} = \begin{cases} -\dfrac{2^k}{k+1} & \text{для } k = n, \\ 2^n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) & \text{для } k < n, \\ 0 & \text{для } k > n. \end{cases}$$

Пусть матрица $A = \|a_{nk}\|$ определена следующим образом:

$$a_{nk} = \frac{1}{2^k} \quad (n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда

$$\sum_{k=i}^{\infty} a_{nk} b_{ki}^{-1} = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=i}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} = \lim_{m \to \infty} \left(-\frac{1}{m+1}\right) = 0 \, (n,\ i = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. матрица $\tilde{A} = A \cdot B^{-1}$ является нуль-матрицей, следовательно, и K-матрицей. Кроме того,

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{i=0}^{k} b_{ki}^{-1} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=i}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} = -1 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Big| \sum_{k=i}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} \Big| = \sum_{i=0}^{m} \Big| \sum_{k=i}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} \Big| = 1 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, все условия 1)—6) выполнены. Однако

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Big| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} b_{ki}^{-1} \Big| = \sum_{i=0}^{\infty} \Big| \sum_{k=i}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} \Big| =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \Big| \sum_{k=i}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} \Big| = 1 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

и значит условие (5) не выполнено.

Используя теорему 1, докажем ряд других фактов.

Рассмотрев в качестве матрицы $A = \|a_{nk}\|$ единичную матрицу $E = \|e_{nk}\|$, получим следующее предложение.

Теорема 2. *Если матрица $B = \|b_{nk}\|$ типа R' (в частности K-матрица типа R') суммирует только сходящиеся последовательности, то такая матрица преобразует всякую неограниченную последовательность $\{S_n\}$ в неограниченную последовательность*

$$\{\tau_n\} = \Big\{\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k\Big\}.$$

В данном случае $B \subseteq E$. По теореме 1

$$F_B \subseteq F_E.$$

Но F_E содержит только ограниченные последовательности. Значит, и F_E содержит только ограниченные последовательности.

Для K-матриц типа R' верна следующая теорема.

Теорема 3. *Чтобы K-матрица типа R' суммировала только сходящиеся последовательности, необходимо и достаточно, чтобы эта матрица преобразовывала всякую неограниченную последовательность в неограниченную.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2. Пусть K-матрица типа R' преобразовывает всякую неограниченную последовательность в неограниченную. Так как всякая матрица типа R' является реверсивной, по лемме Виланского [5] получаем и достаточность.

Если $A = \| a_{nk} \|$, $B = \| b_{nk} \|$ — матрицы типа R', $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, по теореме 1 получаем, что $F_A = F_B$.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть* $A = \| a_{nk} \|$ и $B = \| b_{nk} \|$ — *матрицы типа* R'. *Если* $A \approx B$, *то* $F_A = F_B$.

Из равенства (6) вытекает также следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $A \| a_{nk} \|$ — *матрица с конечными строками, а* $B = \| b_{nk} \|$ — *матрица типа* R'. *Чтобы* $F_B \subseteq F_A$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\| AB^{-1} \| < \infty$.

Из этой теоремы следует.

Теорема 6. *Пусть* $A = \| a_{nk} \|$ и $B = \| b_{nk} \|$ — *матрицы типа* R'. *Чтобы* $F_B = F_A$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\| A \cdot B^{-} \| < \infty \text{ и } \| B \cdot A^{-1} \| < \infty.$$

Пусть теперь $B = \| b_{nk} \|$ — матрица типа B^1, а $A = \| a_{nk} \|$ — произвольная матрица такая, что $F_B \subseteq F_A$. Возникает вопрос, когда из этого включения будет следовать включение $B \subseteq A$.

Справедлива

Теорема 7. *Пусть* $B = \| b_{nk} |$ — *матрица типа* R', а $A = \| a_{nk} \|$ — *произвольная матрица.*

Чтобы из включения $F_B \subseteq F_A$ *следовало включение* $B \subseteq A$, *необходимо и достаточно выполнение условий 2)—4), упомянутых при доказательстве теоремы 1.*

Доказательство. Пусть $S_n \in F_B$, *т. е.*

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} S_k = O(1).$$

Рассмотрим

$$\tau_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} S_k = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}^{-1} t_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} a_{nk} b_{ki}^{-1} \right) t_i.$$

Так как $F_B \subseteq F_A$, то для любой ограниченной последовательности $\{t_n\}$ должен существовать предел

$$\lim_{m \to \infty} \tau_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = \tau_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для этого в силу известной теоремы [4, стр. 17—18] необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1), 5), (5), и если эти условия выполнены, то

$$\tau_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} b_{ki}^{-1} \right) t_i.$$

Так как $\{\tau_n\}$ должна быть ограниченной последовательностью для каждой ограниченной последовательности $\{t_n\}$, то [4, стр. 20] справедливо условие 6).

Справедливость теоремы 7 вытекает теперь из известной теоремы [4, стр. 57].

Из теоремы 7 вытекает

Теорема 8. *Пусть* $B = \|b_{nk}\|$ — *матрица типа* R' *такая, что* $\overset{-1}{b_{nk}} \to \alpha_k$ $(n \to \infty)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} \overset{-1}{b_{nk}} \to \alpha$ $(n \to \infty)$, *а* $A = \|a_{nk}\|$ — *произвольная* K-*матрица.*

Тогда из включения $F_B \subseteq F_A$ *следует включение* $B \subseteq A$.

Действительно, если $\overset{-1}{b_{nk}} \to \alpha_k$ $(n \to \infty)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \overset{-1}{b_{nk}} \to \alpha$ $(n \to \infty)$ и $A = \|a_{nk}\|$ является K-матрицей, то условия 2)—4) необходимо выполняются и справедливость теоремы 8 следует из теоремы 7.

Следствие 1. *Если* $B = \|b_{nk}\|$ — *матрица Чезаро порядка* $p > 0$, *а* $A = \|a_{nk}\|$ — *произвольная* K-*матрица, то из включения* $F_B \subseteq F_A$ *следует включение* $B \subseteq A$.

Доказательство. Если $B = \|b_{nk}\|$ — матрица Чезаро порядка $p > 0$, то $\overset{-1}{b_{nk}} \to 0$ $(n \to \infty)$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ и $\sum_{k=0}^{n} \overset{-1}{b_{nk}} = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Все условия теоремы 8, таким образом, выполнены и справедливость следствия 1 доказана.

Следствие 2. *Если матрица* $B = \|b_{nk}\|$ *типа* R' *(в частности* K-*матрица типа* R'*) преобразовывает всякую неограниченную последовательность в неограниченную, то чтобы она суммировала только сходящиеся последовательности, необходимо и достаточно, чтобы* $B^{-1} = \|\overset{-1}{b_{nk}}\|$ *была* K-*матрицей.*

Доказательство. В условиях следствия 2 $F_B \subseteq F_E$, где $E = \|e_{nk}\|$ — единичная матрица. По теореме 7 для того, чтобы из включения $F_B \subseteq F_E$ следовало включение $B \subseteq E$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} e_{nk} \overset{-1}{b_{ki}} = \lim_{n \to \infty} \overset{-1}{b_{ni}} = \alpha_i \neq \infty \; (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} e_{nk} \sum_{i=0}^{\infty} \overset{-1}{b_{ki}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \overset{-1}{b_{ni}} = \alpha \neq \infty.$$

Так как, кроме того, из $F_B \subseteq F_A$ следует, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Big| \sum_{k=0}^{n} e_{nk} \overset{-1}{b_{ki}} \Big| = \sum_{i=0}^{\infty} \big| \overset{-1}{b_{ni}} \big| = O(1),$$

то следствие 2 доказано.

Следствие 3. *Чтобы K-матрица типа R' $B = \| b_{nk} \|$ преобразовывала всякую неограниченную последовательность в неограниченную, необходимо и достаточно, чтобы $B^{-1} = \| b_{nk}^{-1} \|$ была K-матрицей.*

Доказательство. Пусть K-матрица типа R' преобразовывает всякую неограниченную последовательность в неограниченную. Тогда по лемме Виланского [5] она суммирует только сходящиеся последовательности. На основании следствия 2 получаем, что $B^{-1} = \| b_{nk}^{-1} \|$ является K-матрицей. Необходимость доказана.

Пусть $B^{-1} = \| b_{nk}^{-1} \|$ — K-матрица. По известной теореме [2, стр. 189] матрица $B = \| b_{nk} \|$ вполне неэффективна, т. е. не суммирует ни одной расходящейся последовательности. Следовательно, $B \subseteq E$. По теореме 1 получаем, что матрица $B = \| b_{nk} \|$ преобразовывает всякую неограниченную последовательность в неограниченную. Этим доказана достаточность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов. Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами. УМЖ, т. 19, 1970, № 5.
2. Р. Кук. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., Физматгиз, 1960.
3. С. Банах. Курс функціонального аналізу. Київ, «Радянська школа», 1948.
4. С. Барон. Введение в теорию суммируемости рядов. Изд-во Тартуского ун-та, 1966.
5. A. Wilansky. A necessary and sufficient condition that a summability method be stronder that convergence, Bull. Amer. Soc., v 55, 1949, 914—916.

Поступила 8 октября 1971 г.