ДВОЙСТВЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

В. Д. Мильман

Пусть B — пространство Банаха; $S(B)=\{x\in B:\|x\|=1\}$, $E(M)$ — обозначает замкнутую линейную оболочку множества M; B — непустое семейство ненулевых подпространств пространства B. Определим (для $x\in S(B)$) две функции (локальные модули β и δ)

$$\beta(\varepsilon, x, \mathrm{B}) = \sup_{E\in\mathrm{B}}\inf_{y\in S(E)} \|x+\varepsilon y\| - 1; \quad \delta(\varepsilon; x, \mathrm{B}) = \inf_{E\in\mathrm{B}}\sup_{y\in S(E)} \|x+\varepsilon y\| - 1.$$

Кроме того, усреднив специальным образом локальные модули β и δ, получим числовые функции, зависящие лишь от пространства B и семейства подпространств B:

$$\beta\beta(\varepsilon; \mathrm{B}) = \sup_{E \in \mathrm{B}} \inf_{x \in S(E)} \beta(\varepsilon; x, \mathrm{B}); \quad \delta\delta(\varepsilon; \mathrm{B}) = \inf_{E \in \mathrm{B}} \sup_{x \in S(E)} \delta(\varepsilon; x, \mathrm{B}).$$

Функции β и δ связывают многие топологические свойства пространства Банаха с геометрией его единичной сферы (подробно об этом см. [2]). Можно показать [2, гл. I], что в том случае, когда B — семейство всех одномерных подпространств E_1, модуль $\beta\beta(\varepsilon, E_1)$ совпадает с классическим модулем гладкости Дэя $\rho_{\mathrm{B}}(\varepsilon) = 1/2 \sup\limits_{\substack{x \in S(B) \\ \|y\| = \varepsilon}} (\|x+y\| + \|x-y\| - 2)$, а функция $\delta\delta(2\varepsilon; E_1)$ эквивалентна (при $\varepsilon \to 0$) модулю выпуклости Кларксона ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$) $\delta_B(\varepsilon) = \inf \{1 - \frac{1}{2}\|x+y\| : x, \ y \in S(B), \ \|x-y\| = \varepsilon\}$.

Однако в связи с топологическими приложениями особый интерес представляют следующие примеры семейств B: а) B^0_F — семейство всех подпространств B с конечным дефектом, имеющих вид $E = \bigcap\limits_i H_{f_i}$, где $H_\varphi = \{x \in B : \varphi(x) = 0, \ \varphi \in B^*\}$ и $\{f_i\} \subset F \subset B^*$; кроме того $B^0_{B^*} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{B}^0$ — семейство всех подпространств B с конечным дефектом; б) пусть $X = \{x_k\}_1^\infty$ — последовательность элементов пространства B; тогда $\mathrm{B}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{E(\{x_k\}_{k=n}^\infty)\}_{n=1}^\infty$.

В настоящей статье изучается двойственность модулей β и δ (часть результатов анонсирована ранее в [3]). Под двойственностью β- и δ-модулей мы понимаем связь между этими функциями для пространства и его сопряженного. Таким образом, эти результаты выявляют зависимость геометрических свойств выпуклого множества и его поляры. Статья построена следующим образом. В начале вводится семейство преобразований выпуклых функций, включающее преобразование Лежандра — Юнга. Далее, в п. 2, приводятся свойства специальных минимальных систем, которые играют существенную роль при выводе двойственности. В п. 3 доказываются основные неравенства. Наконец, в п. 4 мы получаем теоремы двойственности.

Ниже используются следующие обозначения и понятия. Если $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B$ — минимальная система, то сопряженная к ней обозначается $X^* = \{x_k^*\}_1^\infty \subset B^*$; таким образом $x_k^*(x_j) = \delta_{kj}$. Говорят, что минимальная система $X \subset B$ имеет 1-нормирующую (строго нормирующую) сопряженную X^*, если $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E(X^*)$ и $\|f\| = 1\}$ для любого $x \in B$. В том случае, когда $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$ для любого $f \in F \subset B^*$, мы пишем $x_n \xrightarrow{F} x_0$. Вся используемая далее терминология, касающаяся базисов и минимальных систем, согласована с [1].

1. Об одном семействе функциональных преобразований выпуклых функций

Хорошо известно преобразование Лежандра выпуклых функций (a_i могут принимать и бесконечные значения)

$$\psi(\xi)=\sup_{a_1<\eta_1<a_2}(\xi\eta-\varphi(\eta)). \tag{1}$$

Его изучению в n-мерном пространстве посвящено много работ, начиная от работ Фенхеля [4]. Однако нас интересует одномерный случай. При этом в классе выпуклых функций $\varphi(\eta)$ имеет место формула обращения $\varphi(\eta)=\sup_{b_1<\xi<b_2}(\xi\eta-\psi(\xi))$, где интервал $[b_1, b_2]$ — это интервал конечности для $\psi(\xi)$. Классические модули выпуклости $\delta_B(\varepsilon)$ и гладкости $\rho_{B^*}(\eta)$, как показал Линденштраусс [5], после удвоения связаны преобразованием Лежандра.

Но модули β и δ оказываются связанными посредством другого преобразования

$$\psi(\xi)=\sup_{\eta\geqslant 0}\frac{\xi\eta-\varphi(\eta)}{1+\varphi(\eta)}\overset{\text{def}}{=}L_1[\varphi]. \tag{2}$$

Следующая теорема выясняет свойства преобразования L_1. Обозначим при $\mu\geqslant 0$ через V_μ класс выпуклых неубывающих функций $\psi(\xi)$, определенных при $\xi\geqslant 0$ и таких, что $1+\mu\psi(\xi)>0$ и $\frac{1+\mu\psi(\xi)}{\xi}$ не возрастает.

Теорема 1. *Преобразование*

$$\psi(\xi)=L_1[\varphi(\eta)]\overset{\text{def}}{=}\sup_{\eta\geqslant 0}\frac{\xi\eta-\varphi(\eta)}{1+\varphi(\eta)},$$

где $1+\varphi(\eta)>0$ *при* $\eta\geqslant 0$, *обладает следующими свойствами: а)* $\psi(\xi)\in V_1$, *т. е. при* $\xi\geqslant 0$ $\psi(\xi)$ *выпуклая неубывающая функция,* $1+\psi(\xi)>0$ и $\frac{1+\psi(\xi)}{\xi}$ *не возрастает; б) формула обращения: в классе функций, принадлежащих* V_1, *существует единственная функция* $\varphi(\eta)=L_1[\psi(\xi)]$, *для которой выполнено (2), т. е. в указанном классе*

$$L_1\{L_1[\varphi]\}=\varphi;$$

в) для произвольной функции $\varphi(\eta)$ *обратное преобразование* $L_1[\psi]=L_1[L_1(\varphi)]$ *дает функцию* $\psi(\eta)=\sup\{r(\eta):r(\eta)\leqslant\varphi(\eta)$ и $r(\eta)\in V_1\}$.

Замечание 1. Если $\psi_i\in V_1$ $(i=1,2)$, то $\max_{i=1,2}\psi_i(\xi)\in V_1$ и $\lambda\psi_1+(1-\lambda)\psi_2\in V_1$, где $1\geqslant\lambda\geqslant 0$.

Замечание 2. Обозначим $1+\varphi(\eta)=\varphi_1(\eta)$ и $1+\psi(\xi)=\psi_1(\xi)$. Тогда преобразование (2) переписывается в виде

$$\psi_1(\xi)=\sup_{\eta\geqslant 0}\frac{1+\xi\eta}{\varphi_1(\eta)}. \tag{2a}$$

Доказательство. Будем исследовать преобразование (2) в записи (2а). Ясно, что $\psi_1(\xi)$ — неубывающая выпуклая функция; если $\psi_1(\xi_0) = 0$ (при некотором $\xi_0 \geqslant 0$), то $\varphi_1(\eta) = \infty$ $(\eta \geqslant 0)$ и, значит, $\psi_1(\xi) > 0$ при $\xi \geqslant 0$. Сделаем замену $\eta_1 = \frac{1}{\eta}$ и $\xi_1 = \frac{1}{\xi}$. Тогда

$$\xi_1 \varphi_1\left(\frac{1}{\xi_1}\right) = \sup_{\eta_1 \geqslant 0} \frac{1 + \xi_1 \eta_1}{\eta_1 \varphi_1\left(\frac{1}{\eta_1}\right)}.$$

Таким образом, функции $\eta_1 \varphi_1\left(\frac{1}{\eta_1}\right)$ и $\xi_1 \psi_1\left(\frac{1}{\xi_1}\right)$ также связаны преобразованием (2а), откуда следует, что $\xi_1 \psi_1\left(\frac{1}{\xi_1}\right)$ не убывает, т. е. $\frac{\psi(\xi)}{\xi}$ не возрастает. Тем самым доказано, что $L_1[\varphi] \in V_1$.

Переходим к доказательству п. б) теоремы. Пусть $\varphi_1 \in V_1$. Из (2а) следует, что

$$\psi_1(\xi) \cdot \varphi_1(\eta) \geqslant 1 + \xi\eta, \tag{3}$$

откуда

$$\varphi_1(\eta) \geqslant \sup_{\xi \geqslant 0} \frac{1 + \xi\eta}{\psi_1(\xi)}. \tag{4}$$

Кроме того, для $\forall \xi_0 \exists \eta_0$ $(0 \leqslant \eta_0 < \infty)$ такое, что

$$\psi_1(\xi_0) \cdot \varphi_1(\eta_0) = \xi_0 \eta_0 + 1. \tag{5}$$

При этом если для ξ_0 существует два разных значения η' и η'', при которых выполнено (5), т. е.

$\psi_1(\xi_0)\varphi_1(\eta') = \xi_0\eta' + 1$, $\quad \psi_1(\xi_0)\varphi_1(\eta'') = \xi_0\eta'' + 1$, то при $\lambda, \mu \geqslant 0$ и $\lambda + \mu = 1$: $\psi_1(\xi_0)[\lambda\varphi_1(\eta') + \mu\varphi_1(\eta'')] = \xi_0(\lambda\eta' + \mu\eta'') + 1$. Из выпуклости функции φ следует, что

$$\psi_1(\xi_0)\varphi_1(\lambda\eta' + \mu\eta'') \leqslant \xi_0(\lambda\eta' + \mu\eta'') + 1.$$

В сочетании с (3) это дает $\varphi_1(\lambda\eta' + \mu\eta'') = \lambda\varphi_1(\eta') + \mu\varphi_1(\eta'')$, и для $\eta = \lambda\eta' + \mu\eta''$ также выполнено (5). Таким образом,

1°) множество всех тех η, для которых при заданном ξ_0 достигается (3), есть отрезок $I(\xi_0) = [\eta'(\xi_0), \eta''(\xi_0)]$ и при $\eta \in I(\xi_0)$ функция $\varphi(\eta)$ линейна.

Из непрерывности функции $\psi_1(\xi)$ и $\varphi_1(\eta)$ следует также, что если $\xi_n \to \xi_0$ $(n \to \infty)$, то все предельные точки последовательности $\{\eta_n\}_{n=1}$ такой, что $\psi_1(\xi_n) \cdot \varphi_1(\eta_n) = \xi_n \cdot \eta_n + 1$, лежат на отрезке $I(\xi_0)$. Значит,

2°) многозначное соответствие $\xi \to I(\xi)$ полунепрерывно. Так как функции $\varphi_1(\eta)$ и $\frac{\varphi_1(\eta)}{\eta}$ монотонны, то

3°) $0 \in I(0)$;

4°) при $\xi_n \to \infty$ $\exists \eta_n \in I(\xi_n)$ и $\eta_n \to \infty$.

Объединение результатов 1° — 4° показывает, что $\forall \eta_0 \exists \xi_0$ такое, что выполнено (5). Но тогда, учитывая (4), получаем при всех $\eta \geqslant 0$

$$\varphi_1(\eta) = \sup_{\xi \geqslant 0} \frac{\xi\eta + 1}{\psi_1(\xi)}.$$

в) Обозначим $\tilde{\varphi} = L_1[\psi]$, где $\psi = L_1[\varphi]$, $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi} + 1$ и $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi} + 1$ (функция $\hat{\varphi}$ определена в п. *в*) теоремы 1). Из (4) получаем, что при $\eta \geqslant 0$

$$\varphi_1(\eta) \geqslant \tilde{\varphi}_1(\eta). \tag{6}$$

В силу п. *а*) теоремы $\tilde{\varphi}(\eta) \in V_1$, поэтому из определения функции $\hat{\varphi}(\eta)$ и (6) следует

$$\varphi_1(\eta) \geqslant \hat{\varphi}_1(\eta) \geqslant \tilde{\varphi}_1(\eta). \tag{7}$$

Применим к неравенствам (7) преобразование (2а), которое обращает знак неравенства. Получим

$$\psi_1(\xi) \leqslant \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{1 + \xi\eta}{\hat{\varphi}_1(\eta)} \leqslant \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{1 + \xi\eta}{\tilde{\varphi}_1(\eta)} = \psi_1(\xi). \tag{8}$$

Последнее равенство в (8) следует из уже доказанного п. *б*) теоремы, так как $\tilde{\varphi}(\eta) \in V_1$ и $\tilde{\varphi} = L_1[\psi]$. Таким образом, из (8) вытекает, что $L_1[\hat{\varphi}(\eta)] = L_1[\tilde{\varphi}(\eta)] = \psi(\xi)$. Так как $\hat{\varphi}(\eta) \in V_1$, то, как показано в п. *б*), $\hat{\varphi}(\eta) = \tilde{\varphi}(\eta) = L_1(\psi)$, что завершает доказательство теоремы.

Преобразование (2) можно связать[1] с преобразованием Лежандра (1), введя параметр $\mu : 0 \leqslant \mu \leqslant 1$,

$$\psi_\mu(\eta) = L_\mu[\varphi] \overset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \geqslant 0} \frac{\xi\eta - \varphi(\xi)}{1 + \mu\varphi(\xi)}. \tag{9}$$

Замечание 3. Для преобразования L_μ $(\mu > 0)$ имеют место все утверждения теоремы 1 и, в частности, формула обращения (в классе функций $\varphi(\xi) \in V_\mu$)

$$\varphi(\xi) = L_\mu[\psi_\mu(\eta)] = \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{\xi\eta - \psi_\mu(\eta)}{1 + \mu\psi_\mu(\eta)}. \tag{10}$$

Таким образом, в указанном классе функций V_μ при всех $\mu > 0$ $L_\mu \cdot L_\mu = I$, где I — тождественное преобразование.

Действительно, умножим (9) на μ и произведем замены $\mu\eta = \eta_{(1)}$, $\mu\varphi(\xi) = \varphi_{(1)}(\xi)$, $\mu\psi_\mu(\eta) = \psi_{(1)}(\eta_{(1)})$. Тогда к функциям $\varphi_{(1)}$ и $\psi_{(1)}$ применима теорема 1. Если же в формулу обращения $L_1[\psi_{(1)}] = \varphi_{(1)}$ опять подставить $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$, то получится (10).

[1] На эту связь обратил мое внимание М. Г. Крейн.

Для полноты анализа семейства преобразований (9) рассмотрим предельный переход при $\mu \to \infty$. Из (9) ясно, что $\psi_\mu(\eta) \to 0\ (\mu \to \infty)$. Однако умножив (9) на μ и обозначив

$$\lim_{\mu \to \infty} \mu\psi_\mu(\eta) = \psi_\infty(\eta)$$

(нетрудно показать, что предел существует), получим предельное преобразование

$$\psi_\infty(\eta) = L_\infty[\varphi] \overset{\text{def}}{=} \sup_{\xi \geqslant 0} \frac{\xi\eta - \varphi(\xi)}{\varphi(\xi)}.$$

Легко показать, что для преобразования $L_\infty[\varphi]$ имеет место следующая формула обращения, которая получается из (10) предельным переходом $\mu \to \infty$, если учесть, что $\psi_\mu \to 0$, а $\mu\psi_\mu(\eta) \to \psi_\infty(\eta)$:

$$\varphi(\xi) = L_\infty^{(1)}[\psi_\infty] \overset{\text{def}}{=} \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{\xi\eta}{1 + \psi_\infty(\eta)}.$$

Приведем простую геометрическую интерпретацию семейства преобразований (9) при $0 < \mu \leqslant \infty$ и формулы обращения. Проводимые рассуждения нетрудно сделать строгими и тем самым дать другое доказательство теоремы 1. Заметим, что именно преобразование Лежандра L_0 лишено указанной ниже трактовки. Перепишем преобразование (9) в виде

$$\psi_{1,\mu}(\xi) = \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{\xi\eta + \frac{1}{\mu}}{\varphi_{1,\mu}(\eta)}, \tag{9a}$$

где обозначено $\varphi_{1,\mu}(\eta) = \dfrac{1 + \mu\varphi(\eta)}{\sqrt{\mu}}$, $\psi_{1,\mu}(\xi) = \dfrac{1 + \mu\psi_\mu(\xi)}{\sqrt{\mu}}$.

В положительном конусе двумерного пространства (η_1, η_2) введем при фиксированном μ норму по формуле $\left\| \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}, \eta \right) \right\| = \varphi_{1,\mu}(\eta)$ (мы не анализируем сейчас условий, при которых функция $\varphi_{1,\mu}(\eta)$ задаст норму в конусе $\eta_1 \geqslant 0$, $\eta_2 \geqslant 0$: принадлежность φ классу V_μ служит, в частности, этой цели). Тогда норма функционала (ξ_1, ξ_2) при $\xi_1 \geqslant 0$ и $\xi_2 \geqslant 0$ задается формулой

$$\|(\xi_1, \xi_2)\|_\mu = \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{\frac{1}{\mu}\xi_1 + \xi_2\eta}{\varphi_{1,\mu}(\eta)}.$$

В силу однородности нормы достаточно знать норму функционала на прямой $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}, \xi \right)$:

$$\psi_{1,\mu}(\xi) = \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}, \xi \right) \right\|_\mu = \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{\frac{1}{\mu} + \xi\eta}{\varphi_{1,\mu}(\eta)}.$$

Так как двумерное нормированное пространство рефлексивно, применение преобразования (9а) к функции $\psi_{1,\mu}(\xi)$ снова дает норму первоначального пространства $\varphi_{1,\mu}(\eta)$.

Замечание 4. Если в теореме 1 п. *б*) отказаться от требования монотонности функции $\varphi(\eta)$, но сохранить все остальные ограничения, вызванные принадлежностью классу V_1, то также имеет место формула обращения, если функцию $\psi(\xi)$ рассматривать на всей оси $(-\infty, \infty)$):

$$\varphi(\eta) = \sup_{-\infty<\xi<\infty} \frac{\xi\eta - \psi(\xi)}{1+\psi(\xi)}.$$

2. Натягивающие базисы и асимптотически ортогональные минимальные системы

Пусть $X = \{x_k\}_1^\infty$ — минимальная в B система с сопряженной $X^* = \{x_k^*\}_1^\infty \subset B^*$. Обозначим $E(\{x_k\}_1^n) = E_n$, $E(\{x_k\}_{n+1}^\infty) = E^n$, $E_m \cap E^n = E_m^n$. Аналогичные обозначения введем в сопряженном пространстве: $E(\{x_k^*\}_1^n) = F_n$, $E(\{x_k^*\}_{n+1}^\infty) = F^n$ и $F_m \cap F^n = F_m^n$.

Напомним [1, гл. 3, § 1], что минимальная система $X \subset B$ называется натягивающей, если X^* полно в B^*. Требование натягиваемости базиса в изложенном ниже утверждении существенно. Даже для ортогональных базисов, если только сопряженная последовательность функционалов не полна в B^*, предложение 1 не имеет места. В силу важности предложения 1 в приложениях (см. следующий пункт) было бы интересно выяснить, выполняется ли она для натягивающих минимальных систем. Нам это неизвестно.

Предложение 1. *Пусть* $X\{x_k\}_1^\infty$ — *натягивающий базис в* B *с сопряженной системой* $X^* = \{x_k^*\}_1^\infty$. *Для любых* n_0, $x_0 \in E_{n_0}$ и $\varepsilon > 0$ *найдутся* n' *и целочисленная функция* $N = N(r)$, *где* $N \to \infty$ *при* $r \to \infty$, *такие, что при любом* $y \in E^r$ *норма элемента* $x_0 + y$ *с точностью* ε *достигается на функционале* $f \in F_{n'} + F^N$, т. е. для указанного f: $\frac{f(x_0+y)}{\|f\|} \geqslant (1-\varepsilon)\|x_0 + y\|$.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in E_{n_0}$. Пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ утверждение не выполнено, т. е. не найдутся n' и $N(r)$ с указанными в теореме свойствами. Тогда для любого n_k найдется $n_{k+1} > n_k$, при котором для всех $r > n_{k+1}$ $\exists y_r \in S(E^r)$ такое, что при любом $\theta > 0$ функционал $f_r \in S(B^*)$, для которого[1]

$$f_r(x_0 + y_r) \overset{\theta}{\cong} \|x_0 + y_r\|,$$

имеет вид

[1] Обозначение $a \overset{\theta}{\cong} b$ означает $|a - b| \leqslant \theta$.

$$f_r = \varphi^1_{n_k, r} + \varphi_{n_{k+1}, r} + \varphi_r,$$

где

$$\varphi^1_{n_k, r} \in F_{n_k}, \ \varphi_{n_{k+1}, r} \in F^{n_k}_{n_{k+1}}, \ \varphi_r \in F^{n_{k+1}} \text{ и } \|\varphi_{n_{k+1}, r}\| \geqslant \varepsilon_0.$$

Значит, существует такая последовательность $n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, что для любого $r \ \exists \ y_r \in S(E^r)$ и функционал $f_r \in S(B^*)$: $f_r(x_0 + y_r) \geqslant (1 - \varepsilon)\|x_0 + y_r\|$, который имеет вид

$$f_r = \varphi_{0, r} + \varphi_{1, r} + \ldots + \varphi_{k, r} + \varphi_r,$$

$$\text{где } \varphi_{0, r} \in F_{n_0}, \ \varphi_{1, r} \in F^{n_0}_{n_1}, \ \ldots, \ \varphi_{k, r} \in F^{n_{k-1}}_{n_k}, \ \varphi_r \in F^{n_k},$$

$n_k \leqslant r < n_{k+1}$ и $\|\varphi_{i, r}\| \geqslant \varepsilon_0$ (при $i = 1, \ldots, k$). Поскольку $\{x^*_k\}^\infty_1$ — минимальная система и $\|f_r\| = 1$, то существуют [1, лемма 1, 2] числа $\{c_k > 0\}^\infty_{k=1}$ такие, что $\|\varphi_{k, r}\| \leqslant c_k$.

В силу компактности конечномерного шара конечного ($-c_k$) радиуса из последовательности $\{\varphi_{k, r}\}_r$ при каждом фиксированном k можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Диагональным процессом получаем подпоследовательность $\{r_j\}_j$ такую, что при всех $i = 0, 1, \ldots$

$$\varphi_{i, r_j} \to \varphi_i \ (j \to \infty). \tag{11}$$

Последовательность $\{f_{r_j} = \sum_{i=0}^{k(j)} \varphi_{i, r_j} + \varphi_r\}_j$ слабо сходится (на любом $x \in B$), так как $\|f_{r_j}\| = 1$ и $\{f_{r_j}\}$ слабо сходится на плотном в B множестве всех конечных линейных комбинаций $\{x_k\}^\infty_1$. Но тогда существует $f_0 \in B^*$ и $f_{r_j} \xrightarrow{B} f_0 (j \to \infty)$. В силу (11) формальное разложение f_0 по X^* может быть записано в виде $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i$, где $\varphi_i \in F^{n_i}_{n_{i+1}}$. Так как X — натягивающий базис в B, то X^* — базис в B^* [6, стр. 119]. Поэтому ряд $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i$ сходится, но это противоречит тому факту, что $\|\varphi_i\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть X — натягивающий базис в B. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что при $\{\forall y_n \in S(E^n)\}^\infty_{n=1}$ $\exists f_n \in S(F_{n_0} + F^{n_1 (n)}) : f_n(y_n) \geqslant 1 - \varepsilon$ и $n_1 \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Далее нам понадобится также понятие *асимптотически ортогональной минимальной системы*, т. е. такой минимальной системы $X = \{x_k\}^\infty_1 \subset B$, что для любых $\varepsilon > 0$ и целого n существует такое целое число $N = N(\varepsilon; n)$, что подпространства $E_n = E(\{x_k\}^n_1)$ и $E^N = E(\{x_k\}^\infty_{N+1})$ ε-ортогональны:

$$\|y + z\| \geqslant (1 - \varepsilon) \max(\|y\|, \|z\|)$$

при любых $y \in E_n$ и $z \in E^N$.

Не любое сепарабельное B-пространство имеет полную асимптотически ортогональную минимальную систему. Так, пространство $c[0,1]$ такой системы не имеет. Вместе с тем из теоремы 1,6 работы [1] нетрудно получить

Предложение 2. *Любое бесконечномерное подпространство B_1 пространства B, имеющего полную асимптотически ортогональную минимальную систему (в частности, с ортогональным[1] базисом) содержит полную асимптотически ортогональную минимальную систему.*

Примером асимптотически ортогонального, но не ортогонального базиса является естественный базис пространства Джеймса [7].

Приведем некоторые свойства асимптотически ортогональных минимальных систем, которые используются в следующем пункте.

Лемма 1. *а) Если $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B$ — полная асимптотически ортогональная минимальная система с сопряженной $X^* = \{x_k^*\}_{k=1}^\infty$, то для любых $\varepsilon > 0$ и n существует $N = N(\varepsilon;\ n)$ такое, что при всяком $x \in E^N = E(\{x_k\}_{k=N+1}^\infty)$ найдется $f \in S(F^n)$, где $F^n = E(\{x_k^*\}_{k=n+1}^\infty)$ и $\|x\| \geqslant |f(x)| \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|$.*

б) Если же X — полная минимальная система с 1-нормирующей сопряженной, то в утверждении п. а) следует поставить более слабое неравенство $\|x\| \geqslant |f(x)| \geqslant (1/2 - \varepsilon)\|x\|$.

Доказательство. а) Возьмем то $N = N(\varepsilon_1;\ n)$, которое указано в определении асимптотической ортогональности. Обозначим $P_n x$ образ x в фактор-пространстве $P_n B = B/E_n$, где $E_n = E(\{x_k\}_{k=1}^n)$.

Тогда: 1) при $x \in E(\{x_k\}_{N+1}^\infty)$ $\|x\| \geqslant \|P_n x\| \geqslant (1-\varepsilon_1)\|x\|$

2) $F^n = E(\{x_k^*\}_{k=n+1}^\infty)$ изометрично вкладывается в $(P_n B)^*$, является 1-нормирующим подпространством в $(P_n B)^*$ и $f(x) \equiv f(P_n x)$ для $\forall f \in F^n$.

Из 1) и 2) следует, что для любого $x \in E^N$ найдется $f \in S(F^n)$ такое, что $|f(x)| \geqslant (1-\varepsilon_1)^2\|x\|$. Для завершения доказательства п. *а*) остается выбрать $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы $(1-\varepsilon_1)^2 > 1-\varepsilon$.

Доказательство п. *б*) аналогично. В этом случае в 1) будет более слабое неравенство $\|x\| \geqslant \|P_n x\| \geqslant \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)\|x\|$ и соответствующим образом ослабляется утверждение леммы.

Утверждение п. *а*) леммы допускает полное обращение.

Предложение 3. *Если $X = \{x_k\}_1^\infty$ полная минимальная система с сопряженной $X^* = \{x_k^*\}_1^\infty$, то для ее асимптотической ортогональности необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ и n $\exists N = N(\varepsilon;\ n)$ такое, что при $\forall x \in E^N = E(\{x_k\}_{N+1}^\infty)$*

$$\exists f \in S(F^n) \text{ и } \|x\| \geqslant |f(x)| \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|. \tag{12}$$

[1] Определение ортогональности базиса см. [1, стр. 118].

Доказательство. Необходимость утверждения есть п. a) леммы. Докажем достаточность. Из условия предложения следует, что $E(X^*)$ — 1-нормирующее подпространство. Поэтому (см. [8]), для любых $\varepsilon > 0$ и n найдется $N_1 = N_1(\varepsilon;\ n)$ такое, что при любых $x \in E_n$ и $y \in E^{N_1}$

$$\|x + y\| \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|. \tag{13}$$

Выберем $N_2 = N_2(\varepsilon;\ n) = \max(N(\varepsilon;\ n),\ N_1(\varepsilon;\ n))$, где $N(\varepsilon;\ n)$ указано в формулировке предложения. Тогда при $x \in E_n$ и $y \in E^{N_2}$ в силу (12) получим

$$\|x + y\| = \sup_{f \in S(B^*)} |f(x + y)| \geqslant \sup_{f \in S(F^n)} |f(x + y)| = \sup_{f \in S(F^n)} |f(y)| \geqslant$$
$$\geqslant (1 - \varepsilon)\|y\|.$$

Поскольку, кроме того, выполнено (13), предложение доказано.

Из предложения 3 и изложенного выше следствия 1 нетрудно получить

Предложение 4. *Если B — рефлексивное пространство с асимптотически ортогональным базисом X, то X^* — асимптотически ортогональный базис в B^*.*

3. Вспомогательные неравенства

Напомним, что для последовательности $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B$ через $\mathrm{B}(X)$ обозначается семейство подпространств $\{E(\{x_k\}_{k=n+1}^\infty)\}_{n=1}^\infty$. Будем пользоваться также введенными в предыдущем пункте обозначениями: E_n, E^m, E_n^m и F_n, F^m, F_n^m.

Лемма 2. *а) Пусть $X = \{x_k\}_1^\infty \subset B$ — полная минимальная последовательность с 1-нормирующей сопряженной $X^* = \{x_k^*\}_{k=1}^\infty \subset B^*$. Тогда для любого $x_0 \in S(B)$ и $f_0 \in S(E(X^*))$,* где $f_0(x_0) = 1$,

$$[1 + \beta(\varepsilon;\ x_0,\ \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + \delta(\eta;\ f_0,\ \mathrm{B}(X^*))] \geqslant 1 + \frac{\varepsilon\eta}{2};$$
$$[1 + \delta(\varepsilon,\ x_0,\ \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + \beta(\eta;\ f_0,\ \mathrm{B}(X^*))] \geqslant 1 + \frac{\varepsilon\eta}{2}. \tag{14}$$

б) Если же, кроме того, X — асимптотически ортогональная минимальная последовательность, то

$$[1 + \beta(\varepsilon;\ x_0,\ \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + \delta(\eta;\ f_0,\ \mathrm{B}(X^*))] \geqslant 1 + \varepsilon\eta. \tag{15}$$

Доказательство. Для минимальной системы $X^* = \{x_k^*\}_1^\infty$ биортогональная X является 1-нормирующей. Поэтому доказательство обоих неравенств п. a) леммы аналогично. Мы проведем доказательство первого неравенства.

По произвольному фиксированному $\theta > 0$ найдем n и $x_0 \in S(E_n)$, $f_0 \in S(F_n)$ так, чтобы

$$\|x_0 - x_\theta\| < \frac{\theta}{4}, \ \|f_0 - f_\theta\| < \frac{\theta}{4}.$$

Тогда для любых $y \in E^m$ и $\varphi \in F^m$ при $m \geqslant n$

$$\|x_0 + \varepsilon y\| \cdot \|f_0 + \eta\varphi\| \geqslant -\frac{\theta}{2} + \|x_0 + \varepsilon y\| \cdot \|f_0 + \eta y\| \geqslant$$

$$\geqslant (f_0 + \eta y)(x_\theta + \varepsilon y) - \frac{\theta}{2} = f_0(x_0) - \frac{\theta}{2} + \varepsilon\eta\varphi(y) \geqslant 1 - \theta + \varepsilon\eta\varphi(y). \quad (16)$$

Выберем m так, чтобы

$$1 + \delta(\eta; \ f_0, B(X^*)) \geqslant (1-\theta)\|f_0 + \eta\varphi\| \quad (17)$$

для $\forall\varphi \in S(F^m)$. Воспользуемся теперь 1-нормируемостью сопряженной системы X^*. В силу леммы 1 *б*) для любых $\theta > 0$ и m существует $N = N(\theta; \ m)$ такое, что для $\forall y \in S(E^N) \exists\varphi \in S(F^m)$ и

$$\varphi(y) \geqslant \frac{1}{2}(1-\theta). \quad (18)$$

Выберем теперь y_0 в $S(E^N)$ так, чтобы

$$(1-\theta)\|x_0 + \varepsilon y\| \leqslant 1 + \beta(\varepsilon; \ x_0, B(X)),$$

и найдем для этого y_0 указанное выше φ_0. Тогда из (16) и (17) получаем

$$[1 + \beta(\varepsilon; \ x_0, B(X))] \cdot [1 + \delta(\eta; \ f_0, B(X^*))] \geqslant (1-\theta)^3 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon\eta}{2}\right).$$

Так как $\theta > 0$ произвольно, получено неравенство (14).

Для доказательства п. *б*) леммы заметим, что из асимптотической ортогональности последовательности X и леммы 1 получаем, что для $\forall\theta > 0$ и $\forall m$ существует $N = N(\theta, m)$, при котором для $\forall y \in S(E^N) \exists\varphi \in S(F^m)$ и

$$\varphi(y) \geqslant 1 - \theta.$$

Это соотношение заменит неравенство (18), которое использовалось при доказательстве п. *а*) леммы. Других отклонений в доказательстве п. *б*) нет.

Замечание. Если $1 \geqslant f_0(x_0) \geqslant 1 - \theta$, то в неравенствах (14), (15) справа следует писать $1 - \theta + \frac{\varepsilon\eta}{2}$ либо, соответственно, $1 - \theta + \varepsilon\eta$.

Обозначим $\inf\{\beta(\varepsilon; \ x, B(X)) : x \in ES(X)\} = i\beta(\varepsilon; \ B(X))$ и $\sup\{\delta(\varepsilon; \ x, B(X)) : x \in SE(X)\} = s\delta(\varepsilon; \ B(X))$.

Следствие 2. *а) В условиях леммы 2а имеют место неравенства*

$$[1 + i\beta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + s\delta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))] \geqslant 1 + \frac{\varepsilon\eta}{2},$$

$$[1 + s\delta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + i\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))] \geqslant 1 + \frac{\varepsilon\eta}{2}.$$

б) В условиях леммы 2б)

$$[1 + i\beta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + s\delta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))] \geqslant + 1\,\varepsilon\eta.$$

Лемма 3. Пусть $X = \{x_k\}_1^\infty$ — натягивающий базис в B, т. е. X^* *полно в* B^*. *Тогда для* $\forall \varepsilon > 0,\ \theta > 0$ *и* $\forall x_0 \in S(B)$ *существует* $f_{0,\varepsilon} \in S(B^*)$ *такое, что*

$$1 + \delta(\varepsilon;\ x_0, \mathrm{B}(X)) \leqslant (1+\theta) \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{f_{0,\varepsilon}(x_0) + \eta\varepsilon}{1 + \beta(\eta;\ f_{0,\varepsilon}, \mathrm{B}(X^*))} \leqslant$$

$$\leqslant (1+\theta) \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{1 + \varepsilon\eta}{1 + \beta(\eta;\ f_{0,\varepsilon}, \mathrm{B}(X^*))}. \tag{19}$$

Доказательство. Возьмем $\theta_1 > 0$ такое, что $(1+\theta_1)^3 < 1 + \theta$. *Так как* X — *базис, то существует* n_0 *и такой элемент* $x_{\theta_1} \in S(E_{n_0})$, что

$$\| x_{\theta_1} - x_0 \| < \theta_1.$$

Натягиваемость базиса X дает возможность воспользоваться предложением 1, согласно которому по целому числу n_0 найдется целое n_1 такое, что при $\forall z \in E_{n_0} + E^r$ существует $\psi \in F_{n_1} + F^{N(r)}$, $\psi \neq 0$ и

$$(1 + \theta_1)\,\psi(z) \geqslant \|z\| \cdot \|\psi\|. \tag{20}$$

При этом $N(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Выберем r_0 так, чтобы при любом $r > r_0$ и $N > N(r)$ на подпространстве F^N с точностью $\theta_1 > 0$ достигалось $\beta(\eta;\ f, \mathrm{B}(X^*))$ при $\forall f \in S(F_{n_1})$ и $\forall \eta \geqslant 0$, т. е. для указанных f и η

$$1 + \beta(\eta;\ f, \mathrm{B}(X^*)) \leqslant (1+\theta_1)\,\| f + \eta\varphi \| \tag{21}$$

при $\forall \varphi \in S(F^N)$. Существование такого N доказано в [2, теорема 3. 1г]. Для завершения конструкции нам осталось выбрать $y_0 \in S(E^{r_0})$ таким образом, чтобы

$$1 + \delta(\varepsilon;\ x_0, \mathrm{B}(X)) \leqslant (1 + \theta_1)\,\| x_0 + \varepsilon y_0 \|, \tag{22}$$

и для элемента $z = x_0 + \varepsilon y_0$ взять функционал $\psi_0 \in F_{n_1} + F^N$, для которого выполнено (20). Этот функционал запишем в виде

$$\psi_0 = f_0 + \eta_0\varphi,$$

где $f_0 \in S(F_{n_1})$, $\varphi \in S(F^N)$, $\eta_0 \geqslant 0$. Применим последовательно пол ченные выше неравенства (21), (22) и (20):

$$[1+\delta(\varepsilon;\ x_0, \mathrm{B}(X))]\,[1+\beta(\eta_0;\ f_0, \mathrm{B}(X^*))] \leqslant (1+\theta)^2 \| f_0 + \eta_0\varphi \| \cdot \| x_0 + \varepsilon y_0 \| \leqslant (1+\theta_1)^3 (f_0 + \eta_0\varphi)(x_0 + \varepsilon y_0) = (1+\theta_1)^3 [f_0(x_0) + \varepsilon\eta_0\varphi(y_0)] \leqslant (1+\theta)[f_0(x_0) + \varepsilon\eta_0].$$

Таким образом, существует η_0 такое, что

$$1+\delta(\varepsilon;\ x_0, \mathrm{B}(X)) \leqslant (1+\theta)\frac{f_0(x_0)+\varepsilon\eta_0}{1+\beta(\eta_0;\ f_0, \mathrm{B}(X^*))},$$

откуда следует неравенство (19).

Замечание. Так как в лемме 3 $E(X^*) = B^*$, то $\delta(\varepsilon;\ x, \mathrm{B}(X)) \equiv \delta(\varepsilon;\ x, B)$.

Следствие. 3. *В условиях леммы 3*

$$s\delta(\varepsilon;\ B) \leqslant L_1[i\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))] = \sup_{\eta\geqslant 0}\frac{\varepsilon\eta - i\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))}{1+i\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))}.$$

Предложение 5. *Пусть X — асимптотически ортогональна минимальная последовательность в B и X^* — ее сопряженна. Тогда*

$$[1+\delta\delta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))]\cdot[1+\beta\beta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X))] \geqslant 1+\varepsilon\eta. \qquad (23)$$

Если же, кроме того, X — базис и $E(X^*) = B^*$, то

$$\delta\delta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X)) \leqslant L_1[\beta\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))] = \sup_{\eta\geqslant 0}\frac{\varepsilon\eta - \beta\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))}{1+\beta\beta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))}. \qquad (24)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 1, *а*). В сил асимптотической ортогональности X для $\forall n$ и $\theta > 0$ найдется $N = N(n)$ такое, что при любом $x \in E^N \exists f \in S(F^n)$, на котором

$$f(x) \geqslant (1-\theta)\|x\|.$$

Выберем n_1 так, чтобы при $n > n_1$

$$\delta\delta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*)) \geqslant (1-\theta)\,\delta(\eta;\ f, \mathrm{B}(X^*)) - \theta$$

для всех $f \in S(F^n)$ и фиксированном $\eta \geqslant 0$. Возможность такого выбора n_1 следует из определения функции $\delta\delta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))$. Элемент $x_0 \in S(E^{N_1})$, где $N_1 = N(n_1)$, определим таким образом, чтобы

$$\beta\beta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X)) \geqslant (1-\theta)\,\beta(\varepsilon;\ x_0, \mathrm{B}(X)) - \theta.$$

Применим теперь лемму 2, *б*) и замечание к этой лемме к указанному выше элементу $x_0 \in S(E^{N_1})$ и функционалу $f_0 \in S(F^{n_1})$, где $1 \geqslant f_0(x_0) \geqslant 1-\theta$. В результате получим

$$[1+\delta\delta(\eta;\ \mathrm{B}(X^*))]\cdot[1+\beta\beta(\varepsilon;\ \mathrm{B}(X))] \geqslant (1-\theta)^2[1+\delta(\eta;\ f_0, \mathrm{B}(X^*))]\cdot[1+\beta(\varepsilon;\ x_0, \mathrm{B}(X))] \geqslant (1-\theta)^2[1-\theta+\varepsilon\eta].$$

Но $\theta > 0$ произвольно, что доказывает (23).

Для доказательства (24) аналогично воспользуемся леммой 3. Заметим, что если $x_0 \in S(E^N)$, то указанный в лемме 3 $f_0 \in S(F^n)$ (где $N = N(n)$ находится, как и выше, из определения асимптотической ортогональности). Это нетрудно усматривается из доказательства леммы 3, так как построенный при доказательстве элемент $z \in E^N$, а значит можно выбрать функционал φ из F^n; но f_0 является частью разложения φ по минимальной системе X^*, поэтому и $f_0 \in F^n$. Дальнейшие рассуждения следуют тому же шаблону, что и вывод неравенства (23), однако в финале используется, естественно, неравенство (19). Поскольку $\theta > 0$ произвольно, получаем

$$1 + \delta\delta(\varepsilon;\, \mathrm{B}(X)) \leqslant \sup_{\eta \geqslant 0} \frac{1 + \varepsilon\eta}{1 + \beta\beta(\eta;\, \mathrm{B}(X^*))}\,.$$

4. Основные соотношения двойственности

При рассмотрении сопряженного пространства B^* будем пользоваться обозначениями $\beta^0(\varepsilon;\, x, B^*)$, $\delta^0(\varepsilon;\, x, B^*)$, $\beta^0\beta^0(\varepsilon;\, B^*)$ и т. д. не только в том случае, когда $\beta = \beta^0$ — семейство всех подпространств с конечным дефектом, но и когда $\beta = \beta^0_B$, т. е. β — все подпространства с конечным дефектом, порожденные пересечением гиперплоскостей $\{H_x\}_{x \in B}$.

Начнем со следующего наиболее характерного утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $X = \{x_k\}_1^\infty$ — *ортогональный натягивающий базис в* B. *Тогда*

$$\delta^0\delta^0(\varepsilon;\, B) = L_1[\beta\beta(\eta;\, \mathrm{B}(X^*))] = \sup_{\eta} \frac{\varepsilon\eta - \beta\beta(\eta;\, \mathrm{B}(X^*))}{1 + \beta\beta(\eta;\, \mathrm{B}(X^*))}\,. \tag{25}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что X^* — ортогональный базис в B^*. Поэтому в (23) можно поменять местами последовательности X и X^*:

$$[1 + \delta\delta(\varepsilon;\, \mathrm{B}(X))] \cdot [1 + \beta\beta(\eta;\, \mathrm{B}(X^*))] \geqslant 1 + \varepsilon\eta.$$

Полученное неравенство вместе с (24) дает утверждение теоремы так как из-за полноты X^* в B^* $\delta\delta(\varepsilon;\, \mathrm{B}(X)) = \delta^0\delta^0(\varepsilon;\, B)$.

Ослабление условий теоремы 2 может быть проведено в разных направлениях. При этом вследствие предложения 4 оказываются выделенными рефлексивные пространства.

Теорема 3. *Если в рефлексивном сепарабельном пространстве* B *существует асимптотически ортогональный базис* X, *то*

$$\delta^0\delta^0(\varepsilon;\, B) = L_1[\beta^0\beta^0(\eta;\, B^*)], \tag{26}$$

$$\delta^0\delta^0(\eta;\, B^*) = L_1[\beta^0\beta^0(\varepsilon;\, B)]. \tag{26'}$$

Доказательство. В силу предложения 4 сопряженная к X система X^* есть также асимптотически ортогональный базис. Поэтому в соотношениях (23) и (24) предложения 5 можно поменять местами X и X^*. Сравнение полученных таким способом четырех неравенств дает (26) и (26′). При этом следует помнить, что $E(X^*) = B^*$ и, значит, $\delta\delta(\varepsilon; \mathrm{B}(X)) = \delta^0\delta^0(\varepsilon; B)$, $\beta\beta(\varepsilon; \mathrm{B}(X) = \beta^0\beta^0(\varepsilon; B)$. Кроме того, $E(X) = B = B^{**}$, и потому $\delta\delta(\varepsilon; \mathrm{B}(X^*)) = \delta^0\delta^0(\varepsilon; B)$ и $\beta\beta(\varepsilon; \mathrm{B}(X^*)) = \beta^0\beta^0(\varepsilon; B^*)$.

Соотношения (26) и (26′) для рефлексивных пространств с базисом в несколько ослабленном виде можно получить без всяких дополнительных ограничений.

Теорема 4. *Пусть B — рефлексивное пространство с базисом. Для $\forall\theta > 0$ существует число $n = n(\theta) < \infty$ и подпространство $E^n \subset B$ с конечным в B дефектом n такое, что*

$$(1-\theta)\,[1 + \delta^0\delta^0(\eta; (E^n)^*)] \leqslant \sup_{\varepsilon \geqslant 0} \frac{1+\varepsilon\eta}{1+\beta^0\beta^0(\varepsilon; E^n)} \leqslant$$
$$\leqslant (1+\theta)\,[1 + \delta^0\delta^0(\eta; (E^n)^*)].$$

(Напомним, что $(E^n)^* = B^*/(E^n)^\perp$, где аннулятор $(E^n)^\perp$ есть n-мерное подпространство в B^*, и $\beta^0\beta^0(\varepsilon; B) = \beta^0\beta^0(\varepsilon; E^n)$ вследствие конечности дефекта подпространства E^n [2, гл. 3, § 1]).

Доказательство этой теоремы громоздко и не следует непосредственно из результатов предыдущего параграфа. Поэтому мы приведем его в конце работы.

Теорема 5. *Если пространство B имеет натягивающий базис, то*

$$s\delta(\varepsilon; B) \leqslant L_1[i\beta(\eta; B^*)] \leqslant s\delta(2\varepsilon; B). \tag{27}$$

Доказательство следует из сравнения следствия 3 и следствия 2 (п. а.).

Все результаты этого пункта выражают функции $\delta\delta(\varepsilon)$ и $s\delta(\varepsilon)$ через функции $\beta\beta(\varepsilon)$ и $i\beta(\varepsilon)$. Чтобы обратить эти результаты и выразить β-функции через δ-функции, следует воспользоваться теоремой 1. Однако не все свойства, указанные в п. 1 теоремы 1 выполнены для β-функций. Нетрудно показать, что при $\varepsilon \leqslant 1$ функция $\beta\beta(\varepsilon)$ неубывающая и $(\beta\beta(\varepsilon) + 1)\varepsilon^{-1}$ не возрастает (для функции $i\beta(\varepsilon)$ это также верно), но нельзя утверждать, что β-функции выпуклы. Поэтому при обращении соотношений двойственности (23) — (27) следует использовать утверждение *в*) теоремы 1. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Следствие 4. *Пусть B имеет натягивающий базис и $s\delta(\varepsilon; B) \geqslant C\varepsilon$ для некоторого $C > 0$. Тогда $i\beta(\eta; B^*) = 0$ при $\eta \leqslant C$.*

Доказательство. В нашем случае функции $s\delta(\varepsilon; B)$ и $i\beta(\eta; B^*)$ связаны неравенствами (27). Обратим левое неравенство с помощью теоремы 1. Получим $[\widehat{i\beta(\eta; B^*)}] \leqslant L_1[s\delta(\varepsilon; B)] \leqslant L_1[C\varepsilon]$, где построение $\hat{\psi}(\eta)$ по $\psi(\eta)$ указано в теореме 1 *в*). Так как $\varphi(\eta)=L_1[C\varepsilon]=0$ при $0\leqslant\eta\leqslant C$ и $i\beta(\eta)\geqslant 0$, то $i\beta(\eta; B^*)=0$ при $\leqslant\eta\leqslant C$.

Заметим, что наличие различных условий на пространство теоремах двойственности вызвано не методом, а существом вопроса. Примеры показывают, что какие-то ограничения действительно нужны.

Пример. $\delta^0(\varepsilon; x, l_1)=\beta^0(\varepsilon; x, l_1)=\varepsilon$. Однако $(l_1)^*=m$, а в m для большого числа элементов $f_0: \delta^0(\varepsilon; f_0, m)=\varepsilon$. Действительно, если только $f_0=(a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots)\in S(m)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$, то $(\varepsilon; f_0, m)=\varepsilon$ (мы не будем объяснять это подробней). Вместе тем таких элементов f_0 столь много, что они содержатся в любом подпространстве с конечным дефектом. Таким образом, $\delta^0\delta^0(\varepsilon; m)=\varepsilon$, но это противоречит формулам двойственности, так как $\beta^0\beta^0(\varepsilon; l_1)=\varepsilon$. В данном примере двойственность не выполняется вследствие несепарабельности m (напомним, что в большинстве предыдущих результатов требовалась сепарабельность B^*). Однако существуют примеры с сепарабельным B^*, в котором не выполняется (25).

В заключение приводим доказательство теоремы 4, которое выше было опущено.

Пусть $X=\{x_k\}_1^\infty\subset S(B)$ — базис в B; тогда $X^*=\{x_k^*\}_1^\infty$ — базис в B^*. Сначала докажем существование для любого $\theta>0$ и фиксированного $\varepsilon>0$ такого $n_0(\varepsilon)$, что при $\forall n\geqslant n_0$ и любого $\eta\geqslant 0$

$$[1+\beta^0\beta^0(\varepsilon; E^n)]\cdot[1+\delta^0\delta^0(\eta; (E^n)^*)]\geqslant(1-\theta)(1+\varepsilon\eta). \qquad (28)$$

Очевидно, $(E^n)^*=B^*/F_n$, так как $F_n=(E^n)^\perp$. Кроме того, поскольку E^n имеет конечный дефект в B, то $\beta^0\beta^0(\varepsilon; E^n)=\beta^0\beta^0(\varepsilon; B)$ (см. [2].). Из определения $\beta^0\beta^0(\varepsilon; B)$ следует существование последовательностей $\{y_n\in S(E^n)\}_1^\infty$ и $\{z_N\in S(E^N)\}_1^\infty$ таких, что $1+\beta^0\beta^0(\varepsilon; B)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{N\to\infty}\|y_n+\varepsilon z_N\|$.

Согласно следствию 1 $\exists n_0$ и последовательности функционалов $\{\varphi_n\in S(F_{n_0}+F^{k_n})\}$ и $\{\psi_N\in S(F_{n_0}+F^{k'_N})$ такие, что $1\geqslant\varphi_n(y_n)\geqslant 1-\theta$ и $1\geqslant\psi_N(z_N)\geqslant 1-\theta$. При этом $k_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ и $k'_N\to\infty$ при $N\to\infty$. Обозначим $\hat{\varphi}$ образ функционала $\varphi\in B^*$ в фактор-пространстве B^*/F_{n_0}. Заметим, что $1\geqslant\|\hat{\varphi}_n\|\geqslant 1-\theta$ и $1\geqslant\|\hat{\psi}_N\|\geqslant 1-\theta$ при n и N бо́льших n_0, так как $\hat{\varphi}_n(y_n)=\varphi(y_n)\geqslant 1-\theta$ и $\hat{\psi}_N(z_N)\geqslant 1-\theta$, а норма в фактор-пространстве может лишь уменьшиться.

Дальнейшие рассуждения следуют схеме, указанной в лемме 2. Вот их набросок. По $\forall\theta_1>0$ $\exists n_1$ такое, что при $\forall\hat{\varphi}\in S(F^{n_1}/F_{n_0})$

$$\delta^0\delta^0(\eta; B^*/F_{n_0})\geqslant\delta^0(\eta, \varphi; B^*/F_{n_0})-\theta_1.$$

Кроме того, при фиксированном φ_0 для $\forall\theta_1 > 0$ $\exists N_1$ такое, что $1 + \delta^0(\eta; \hat{\varphi}_0; B^*/F_{n_0}) \geqslant \|\hat{\varphi}_0 + \eta\hat{\varphi}\| - \theta_1$ при $\forall\hat{\varphi} \in S(F^{n_1}/F_{n_0})$.

В качестве $\hat{\varphi}_0$ выберем $\hat{\varphi}_{n_1} \in S(F^{n_1}/F_{n_0})$ Таким образом, предполагая дополнительно, что N_1 столь велико, что $\hat{\varphi}_{n_1}(z_{N_1}) = 0$, $\hat{\varphi}_{N_1}(y_{n_1}) = 0$ и $\|y_{n_1} + \varepsilon z_{N_1}\| \leqslant 1 + \theta_1 + \beta^0\beta^0(\varepsilon; B)$, получаем

$$[1 + \theta_1 + \beta^0\beta^0(\varepsilon; B)] \cdot [1 + 2\theta_1 + \delta^0\delta^0(\eta; B^*/F_{n_0})] \geqslant$$
$$\geqslant \|y_{n_1} + \varepsilon z_{N_1}\| \cdot \|\hat{\varphi}_{n_1} + \eta\hat{\psi}_{N_1}\| \geqslant (y_n + \varepsilon z_{N_1})(\hat{\varphi}_{n_1} + \eta\hat{\psi}_{N_1}) =$$
$$= \hat{\varphi}_{n_1}(y_{n_1}) + \varepsilon\eta\hat{\psi}_{N_1}(z_{N_1}) \geqslant (1 - 0)(1 + \varepsilon\eta).$$

Поскольку $\theta_1 > 0$ произвольно, получено (28). Значение $\eta \geqslant 0$ не влияло на рассуждения, однако изменение ε меняет последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_N\}$, а значит, и число $n_0(\varepsilon)$.

Чтобы найти n_0, не зависящее от ε, заметим, что (28) выполняется при достаточно больших ε (и любых $\eta \geqslant 0$), так как $\frac{1 + \beta\beta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ при $\varepsilon \to \infty$ и $1 + \delta\delta(\eta) \geqslant (1 - 0)\eta$ при всех $\eta \geqslant 0$. Таким образом, мы должны доказать (28) лишь на некотором конечном интервале $\varepsilon \in [0, A]$, для чего следует указать на этом интервале конечную достаточно мелкую сеть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{k} \subset [0, A]$ так, чтобы из выполнения (28) в точках $\{\varepsilon_i\}$ следовало (28) при всех $\varepsilon \in [0, A]$ с удвоенным θ. После этого выберем $n_0 = \max\limits_i n_0(\varepsilon_i)$.

Осталось доказать противоположное неравенство (аналогичное лемме 3): $\forall\theta > 0$ $\exists n_0$ такое, что при всех $n \geqslant n_0$

$$1 + \delta^0\delta^0(\eta; B^*/F_n) \leqslant (1 + \theta) \sup_{\varepsilon \geqslant 0} \frac{1 + \varepsilon\eta}{1 + \beta^0\beta^0(\varepsilon; B)}. \tag{29}$$

Опустим доказательство (29). Оно повторяет доказательство леммы 3 с учетом приема, использованного выше (при доказательстве (28)).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Мильман. Геометрическая теория пространства Банаха, ч. 1. Теория базисных и минимальных систем. УМН, 25, 1970, № 3.
2. В. Д. Мильман. Геометрическая теория пространства Банаха, ч. 2. Геометрия единичной сферы. УМН, 26, 1971, № 6.
3. В. Д. Мильман. Об одном преобразовании выпуклых функций и двойственность β- и δ-характеристик B-пространства. ДАН СССР, 187, 1969, № 1.
4. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. УМН, 23, 1968, № 6.
5. J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces, Michigan Math. J., 10, 1963, № 3.
6. М. М. Дэй. Нормированные линейные пространства. М., ИЛ, 1961.

7. R. C. J a m e s. A non-reflexive Banach spaces isometric with its second conjugate, Proc. Nat. Acad. Sci (USA) 37, 1951.

8. М. И. К а д е ц, А. П е л ч и н с к и й. Базисные последовательности, ортогональные системы и нормирующие множества в пространствах Банаха и Фреше. Studia Math, 25, 1965.

Поступила 21 сентября 1971 г.