ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Вл. Д. Мильман

В настоящей работе исследуются некоторые вопросы применения теории когомологий для изучения голоморфных функций на некомпактных римановых поверхностях. При этом мы ограничиваемся случаем финитных линейных голоморфных расслоений, у которых все, кроме конечного числа, функции перехода равны единице.

Ниже под Ω будем понимать аддитивный пучок ростков голоморфных функций, под Ω^* — мультипликативный пучок ростков голоморфных, не обращающихся в нуль функций, а под Z — пучок ростков целых чисел, а также группа целых чисел.

1. Пусть на открытой поверхности M задан конечный дивизор $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$ и пусть M покрыта параметрическими окрестностями так, чтобы каждая точка γ принадлежала не более чем N и не менее чем двум элементам покрытия (существование такого покрытия см. [1]). Сопоставим с каждой окрестностью U, не содержащей точек дивизора, функцию $\gamma_U \equiv 1$, а с каждой окрестностью, содержащей эти точки, — произвольную рациональную в ней функцию γ_U такую, чтобы дивизор $\gamma|_U$ равнялся дивизору γ_U. Далее, с каждым $U \cap V$ связываем $h_{UV} = \frac{\gamma_U}{\gamma_V}$. Ясно, что h_{UV} — голоморфная и не обращающаяся в нуль функция в $U \cap V$, так что система $\{h_{UV}\}$ определяет линейное финитное голоморфное расслоение B_γ и порождает класс когомологий из $H^1_*(\Omega^*)$, где $\{H^i_*\}_i$ — группы когомологий с компактными носителями [2].

Пусть на поверхности M задана замкнутая компактная кривая Ляпунова Γ и непрерывная по Гельдеру функция G на ней, задающие краевую задачу Гильберта $(G; \Gamma)$ [3]. Зададим покрытие поверхности M аналогично тому, как мы это делали выше. Каждой окрестности U, не содержащей точек Γ, относим $\gamma_U \equiv 1$, а окрестности U, высекающей из Γ кривую Γ_U, — решение задачи Гильберта $(G|_U; \Gamma_U)$, где $G|_U$ — ограничение G на Γ_U. При этом считаем

U достаточно малой так, чтобы функция γ_U не имела в U нулей и полюсов.

Система голоморфных и не обращающихся в нуль функций $h_{UV}=\frac{\gamma_U}{\gamma_V}$ задает линейное финитное голоморфное расслоение, которое мы назовем расслоением Гильберта, и порождает класс когомологий из $H^1_*(\Omega^*)$ [4].

Определим теперь класс Черна расслоения B, $\operatorname{ch} B$ [5]. Точной последовательности

$$0 \to Z \to \Omega \xrightarrow{e(f)} \Omega^* \to 0,$$

где $e(f)=\exp 2\pi i f$, отвечает точная последовательность

$$\ldots \to H^1_*(\Omega) \to H^1_*(\Omega^*) \xrightarrow{\nu} H^2_*(Z) \to \ldots$$

Так как система функций $\{h_{UV}\}$ расслоения B образует 1-коцикл, при гомоморфизме ей отвечает элемент из $H^2_*(Z)$. По определению $\operatorname{ch}(B)=\nu(\{h_{UV}\})$. Очевидно, что этот класс порождается 2-коциклом

$$c_{UVW}=\frac{1}{2\pi i}(\ln h_{UV}-\ln h_{UW}+\ln h_{VW}). \tag{1}$$

2. Следующие теоремы 1—4 позволяют установить соответствие между классами Черна финитных линейных расслоений, порядками дивизоров и индексами Коши задач Гильберта с компактными контурами.

Обозначим через A группу классов эквивалентности финитных линейных голоморфных расслоений, равно как и группу из $H^1_*(\Omega^*)$, порождаемую соответствующими функциями перехода.

Теорема 1. 1) *Существует изоморфизм* Ch *группы* $\nu(A)$ *в некоторую группу* (Ch) *классов дифференциальных форм 2-го порядка.*

2) *Для всякого дивизора* $\gamma=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i$, $\operatorname{ord}\gamma=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\int_M \operatorname{Ch}(B_\gamma)$.

3) *Для всякой задачи* $(G;\ \Gamma)$.

$$\chi=\int_M \operatorname{Ch}(B_G),$$

где $\chi=\int_\Gamma \frac{dG}{G}$ — *индекс Коши задачи* $(G;\ \Gamma)$.

4) *Если* $\operatorname{ch}(B)=\{c_{UVW}\}$, *то* $\sum_{U\cap V\cap W} c_{UVW}=\int_M \operatorname{Ch}(B)$.

(Всюду в теореме 1 интегралы берутся по любой из форм класса $\operatorname{Ch}(B)$).

Пункты 2), 3) теоремы 1 играют основную роль в доказательстве теорем 2 и 3.

Группу классов эквивалентности конечных дивизоров, заданных на M, обозначим D. Ее подгруппу дивизоров порядка нуль обозначим D_0. Группу классов эквивалентности расслоений, отвечающих конечным дивизорам, равно как и соответствующую подгруппу из $H^1(\Omega^*)$, обозначим через A_D.

Теорема 2.

$$\nu(A_D) \approx \frac{D}{D_0}.$$

Рассматривая задачи Гильберта, договоримся фиксировать контур Г. Тогда задачу Гильберта можно обозначать просто (G). Множество задач Гильберта представляет собой группу

$$(G_1) + (G_2) \stackrel{\text{def}}{=} (G_1 \cdot G_2).$$

Эта операция, очевидно, согласована с операцией в расслоениях. Две задачи (G_1) и (G_2) назовем эквивалентными, если их разность

$$(G_1) - (G_2) = \left(\frac{G_1}{G_2}\right)$$

(имеющая смысл, поскольку в задачах Гильберта G предполагается не обращающимся в нуль) представляет собой задачу Гильберта, которая разрешима глобально на M в классе функций, не обращающихся в нуль, т. е. задачу, отвечающую расслоению, эквивалентному тривиальному. Группу классов эквивалентности задач Гильберта обозначим Q, а ее подгруппу классов, имеющих нулевой индекс Коши, — Q_0.

Через A_Q обозначим подгруппу классов эквивалентности расслоений на M, отвечающих рассматриваемым задачам Гильберта, равно как и соответствующую подгруппу $H^1_*(\Omega^*)$.

Теорема 3.

$$\nu(A_Q) \approx Q_{/Q_0}.$$

Имеет место двойственность Серра для группы $H^1_*(\Omega)$ [2]. Этого достаточно для изоморфности групп A и A_D. Учитывая это и используя п. 2), 4) теоремы 1, получаем следующую теорему, вариантами которой являются теоремы 2 и 3.

Теорема 4.

$$\nu(A) \approx A/A_0,$$

где $A_0 = \{B \in A | \sum_{U \cap V \cap W} c_{UVW} = 0,$ *если* $\operatorname{ch}(B) = \{\overline{c_{UVW}}\}\}$.

Однако для доказательства теоремы 4 не обязательно использовать изоморфность групп A и A_D, а следовательно и теорему двойственности Серра. Достаточно построить преобразование A в A_D, сохраняющее классы Черна. Действительно, в этом случае из равенств ядер отображений

$$\mathrm{ord}: A_D \to Z \text{ и } \nu|_{A_D}: A_D \to \nu(A_D)$$

следует равенство ядер отображений

$$\mathrm{ind}_k: A \to Z \text{ и } \nu: A \to \nu(A)$$

(здесь $\mathrm{ord}(B_\gamma) = \mathrm{ord}(\gamma)$ и, если

$$\mathrm{ch}(B) = \{c_{UVW}\}, \quad \mathrm{ind}_\kappa(B) = \sum_{U \cap V \cap W} c_{UVW}).$$

Для построения упомянутого преобразования зададим прежде всего параметрическое покрытие M так, чтобы из

$$c_{UVW} \neq c_{U'V'W'}$$

следовало

$$U \cap V \cap W \cap U' \cap V' \cap W' = \varnothing.$$

При этом расслоению B с

$$\mathrm{ch}(B) = \{\overline{c_{UVW}}\}$$

ставим в соответствие расслоение B_γ, построенное по дивизору $\gamma = \sum_{U \cap V \cap W} c_{UVW} p_{UVW}$, где p_{UVW} — какая-нибудь точка из $U \cap V \cap W$. Нетрудно доказать, что $\mathrm{ch}(B) = \mathrm{ch}(B_\gamma)$.

Приведем теперь доказательство пункта 4) теоремы 1.

Пусть $\{h_{UV}\}$ — функции перехода расслоения B. Гомоморфизм Ch ставит в соответствие классу $\mathrm{ch}(B)$ класс $\mathrm{Ch}(B)$, представителем которого является форма $dT_U = d\sum_W \alpha_W d \ln h_{UW}$. Подсчитаем $\int_M dT_U$. Возьмем полиэдрическое исчерпание $\{T_n\}_n$ поверхности M, столь мелкое, чтобы каждый его треугольник принадлежал одному из элементов покрытия. Будем рассматривать T_n начиная с такого номера, чтобы граница его пересекла лишь те U, для которых $\gamma_U \equiv 1$. Поставим в соответствие каждой окрестности U набор $\{U_i\}_i$ треугольников из T_n, лежащих в U так, чтобы $\bigcup_U (\bigcup_i U_i) = T_n$ и $U_i \neq V_j$. Каждому U_i относим функцию γ_U.

Теперь легко видеть

$$\int_M dT_U = \sum_U \sum_i \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_i} \sum_W \alpha_W d \ln h_{UW}.$$

В силу (1)

$$d \ln h_{UV} + d \ln h_{VW} = d \ln h_{UW}. \tag{2}$$

Поэтому

$$\sum_W \alpha_W \, d \ln h_{UW} = \sum_W \alpha_W \, d \ln h_{VW} + d \ln h_{UV}.$$

Рассмотрим 1-цепь, общую для $\partial(\bigcup\limits_i U_i)$ и $(\bigcup\limits_j V_j)$. Ясно, что она принадлежит окрестности U и окрестности V. Обозначим ее $\partial(U\cap V)$. Тогда имеем

$$\sum_U\sum_i\int_{\partial U_i}\sum_W \alpha_W\, d\ln h_{UW} = \sum_U \int_{\partial(\bigcup\limits_i U_i)}\sum_W \alpha_W d\ln h_{UW} =$$

$$= \sum_{U\cap V}\Big(\int_{\partial(U\cap V)}\sum_W \alpha_W d\ln h_{UW} - \int_{\partial(U\cap V)}\sum_W \alpha_W d\ln h_{VW}\Big) +$$

$$+ \int_{\partial T_n}\sum_W \alpha_W d\ln h_{UW} = \sum_{U\cap}\int_{\partial(U\cap V)} d\ln h_{UV} + \int_{\partial T_n}\sum_W \alpha_W d\ln h_{UW}.$$

Последнее равенство выполняется в силу (2) с учетом того, что в нашей сумме встречаются члены с положительным и отрицательным направлением интегрирования по $\dot\partial(U\cap V)$ (рисунок).

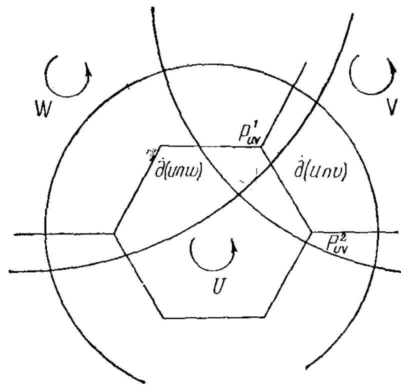

Рис. 1.

Наконец,

$$\sum_{U\cap V}\int_{\dot\partial(U\cap V)} d\ln h_{UV} =$$

$$= \sum_{U\cap V}[\ln h_{UV}(p'_{UV}) - $$

$$-\ln h_{UV}(p''_{UV})] =$$

$$= \sum[\ln h_{UV}(p'_{UV}) - \ln h_{UW}(p'_{UV}) +$$

$$+\ln h_{VW}(p'_{UV})] = \sum_{U\cap V\cap W} c_{UVW},$$

где суммирование в предпоследнем члене равенства ведется по всем точкам, принадлежащим $\partial(\dot\partial(U\cap V))$.

Кроме того,

$$\int_{\partial T_n}\sum_W \alpha_W\, d\ln h_{UW} = 0,$$

так как $h_{UV}\equiv 1$ на ∂T_n.

Итак,

$$\int_M dT_U = \lim_{n\to\infty}\int_{T_n} dT_U = \sum_{U\cap V\cap W} c_{UVW}.$$

3. Задача факторизации Гильберта на римановой поверхности определяет некий аналог 2-й проблемы Кузена. Так называемая D-теория когомологий [6] позволяет условия ее разрешимости сфор-

мулировать в виде, представляющем собой очевидный аналог и вестных условий Абеля.

Теорема 5. *Для разрешимости задачи факторизации $\Phi^+ = G\Phi^-$ нулевого индекса $\chi = \int\limits_\Gamma \frac{dG}{G} = 0$, заданной с помощью непрерывной по Гельдеру функции G и компактной замкнутой кривой Ляпунова Γ на открытой римановой поверхности класса $0''$, необходимо и достаточно, чтобы в целых числах была разрешима система уравнений*

$$\int\limits_\Gamma \varphi_\nu(p)\, d \ln G(p) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(c_{2\mu-1} \int\limits_{K_{2\mu}} d\varphi_\nu - c_{2\mu} \int\limits_{K_{2\mu-1}} d\varphi_\nu\right),$$

где φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ — базис пространства абелевых интегралов 1 рода поверхности M.

В доказательстве этой теоремы основную роль играет один результат Ю. Л. Родина [6].

Считаю приятным долгом выразить благодарностью Ю. Л. Родину за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна. Униформация, ИЛ, 1956.

2. Ж-П. Серр. Некоторые задачи, связанные с изучением в целом многообразии Штейна. Сб. переводов «Расслоенные пространства и их приложения», М., ИЛ, 1958.

3. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 2968.

4. H. Röhrl. Math. Ann. 5, 1961.

5. Ш. Ш. Чжень. Комплексные многообразия М., ИЛ, 1961.

6. Ю. Л. Родин. Тезисы докладов. Всесоюзная конференция по теории функций комплексного переменного (целые и мероморфные функции и функции многих переменных). Сентябрь, 1971. (См. также ДАН СССР, т. 203, 1972, № 6)

Поступила 21 сентября 1971 г