О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Б. И. Локшин

Пусть $f(z, w)$ — целая функция двух комплексных переменных. Пусть, далее,

$$M_f(z, r_2) = \max_{|w|=r_2} |f(z, w)|,$$

$$M_f(r_1, r_2) = \max_{|z|=r_1,\ |w|=r_2} |f(z, w)|,$$

$$\bar{\rho}_w = \bar{\rho}_w(f) = \varlimsup_{r_2 \to \infty} \frac{\ln \ln^+ M_f(r_1, r_2)}{\ln r_2}$$

(Известно, что $\bar{\rho}_w$ не зависит от выбора $r_2 > 0$). При $0 < \bar{\rho}_w < \infty$ обозначим также

$$\sigma_f(z) = \sigma_f(z; \bar{\rho}_w) = \varlimsup_{r_2 \to \infty} \frac{\ln^+ M_f(z, r_2)}{r_2^{\bar{\rho}_w}},$$

$$\sigma_w(r_1; \ln^+ M_f, \bar{\rho}_w) = \varlimsup_{r_2 \to \infty} \frac{\ln^+ M_f(r_1, r_2)}{r_2^{\bar{\rho}_w}}.$$

В настоящей работе изучается связь между $\sigma_f(z)$ и $\sigma_w(r_1; \ln^+ M_f, \bar{\rho}_w)$. Известно [1, стр. 232], что если при некотором $r_1 > 0$ тип функции $M_f(r_1, r_2)$ по переменному r_2 конечен, то при $R_1 < r_1$

$$\sigma_w(R_1; \ln^+ M_f, \bar{\rho}_w) = \sup_{|z| < R_1} \sigma_f(z).$$

Естественно, возникает вопрос о существенности ограничения $\sigma_w(r_1;\ \ln^+M_f,\ \bar{\rho}_w) < \infty$, которое снять нельзя. Мы построили целую функцию $f(z, w)$ (пример 2) такую, что

$$A_2)\ \bar{\rho}_w = 1;\quad Б_2)\ \int^{\infty} \frac{\ln M_f(z, r_2)}{r_2^2}\, dr_2 < \infty \qquad \forall z \neq 0$$

(из Б$_2$) следует, что $\sigma_f(z) \equiv 0$);

$$B_2)\ \sigma_w(r_1;\ \ln^+M_f,\ \bar{\rho}_w) = \infty \quad \forall r_1 > 0.$$

Далее, если целая функция $g(z, w)$ имеет конечный порядок по совокупности переменных, то как известно [1, стр. 189], интеграл

$$\int^{\infty} \frac{\ln M_g(r_1, r_2)}{r_2^{\bar{\rho}_w(g)+1}}\, dr_2$$

при всех $r_1 > 0$ только сходится либо только расходится. Мы показываем здесь, что условие конечности порядка по совокупности переменных существенно. Построим целую функцию $g(z, w)$ (пример 1) бесконечного порядка по совокупности переменных со свойствами

$$A_1)\ \bar{\rho}_w(g) = 1.$$

$$Б_1)\ \sigma_w(r_1;\ \ln^+M_g,\ \bar{\rho}_w) = 0 \quad \forall r_1 > 0,$$

$$B_1) \int^{\infty} \frac{\ln M_g(r_1, r_2)}{r_2^2}\, dr_2 < \infty, \quad 0 < r_1 < 1,$$

$$Г_1) \int^{\infty} \frac{\ln M_g(z, r_2)}{r_2^2}\, dr_2 = \infty, \quad |z| \geqslant 1.$$

Перейдем к построению примеров.

Пример 1. Следующая функция является искомой:

$$g(z, w) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^{n[\sqrt{\ln \ln n}]}}{(n \ln n)^n}\, w^n = \sum_{n=3}^{\infty} c_n(z)\, w^n.$$

Свойства A_1) и $Б_1$) проверяются с помощью известных формул [2, стр. 13]

$$\bar{\rho}_w = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{-\ln \max\limits_{|z|=r_1} |c_n(z)|},$$

$$\sigma_w(r_1;\ \ln^+M_g,\ \bar{\rho}_w) = \frac{1}{e} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \sqrt[n]{\max_{|z|=r_1} |c_n(z)|}.$$

Свойства B_1) и $Г_1$) устанавливаются с помощью следующего критерия Карлемана [3, стр. 43]:

пусть коэффициенты целой функции первого порядка

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

удовлетворяют условию $a_n^2 \geqslant a_{n-1}a_{n+1}\,(n \geqslant n_0)$; тогда условия

$$1)\ \int^{\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r^2}\,dr<\infty, \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$$

эквивалентны.

Рассмотрим функцию

$$g_1(r_1,\,w)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{r_1^{n\sqrt{\ln\ln n}-n}}{(n\ln n)^n}\,w^n=\sum_{n=3}^{\infty}a_n(r_1)\,w^n.$$

Это целая функция переменного w первого порядка минимального типа. Заметим, что условия B_1) и Γ_1) для функции $g(z,\,w)$ следуют из выполнения аналогичных условий для функции $g_1(r_1,\,w)$. Далее, при любом фиксированном $r_1>0$ ввиду выпуклости функции $x\ln x+x\ln\ln x-(x\sqrt{\ln\ln x}-x)\ln r_1$ на интервале $(x_0(r_1),\,\infty)$, начиная с некоторого номера $n_0=n_0(r_1)$, выполняется неравенство $a_n^2(r_1)\geqslant a_{n-1}(r_1)\,a_{n+1}(r_1)$. Поэтому можно воспользоваться критерием Карлемана. Так как $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(n\ln n)^{-1}=\infty$, то при $r_1\geqslant 1$

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{r_1^{\sqrt{\ln\ln n}}}{n\ln n}=\infty.$$

При $0<r_1<1$

$$\int^{\infty}\frac{r_1^{\sqrt{\ln\ln x}}}{x\ln x}\,dx=\int^{\infty}r_1^{\sqrt{t}}\,dt<\infty.$$

Поэтому

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{r_1^{\sqrt{\ln\ln n}}}{n\ln n}<\infty \qquad (0<r_1<1).$$

Таким образом, свойства $A_1)-\Gamma_1)$ функции $g(z,\,w)$ установлены.

Пример 2. Положим при $n\geqslant n_0=[e^e]+1$

$$\theta_n=\frac{\pi}{\sqrt{\ln\ln n}},\quad b(n)=\sqrt{\ln\ln n},\quad a(n)=\exp\left\{\frac{\ln\quad+\frac{1}{2}\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}\right\}.$$

Через $E(z;\ \rho)$ обозначим целую функцию Миттаг—Леффлера, т. е. положим

$$E(z;\ \rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\Gamma\left(1+\frac{m}{\rho}\right)},\quad 0<\rho<\infty.$$

Искомой функцией является функция

$$f(z,\ w)=\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{g_n(z)}{(n\exp(\sqrt[4]{\ln n}))^n}w^n,$$

$$g_n(z)=E\left(a(n)\,ze^{-i\theta_n};\ b(n)\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a(n)\,ze^{-i\theta_n})^m}{\Gamma\left(1+\frac{m}{b(n)}\right)}.$$

Известно [4, стр. 113], что

$$E(z;\ \rho)=\rho e^{z^\rho}+I=\rho e^{z^\rho}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{e^t t^{\frac{1}{\rho}-1}}{t^{\frac{1}{\rho}}-z}\,dt$$

$$\left(1<\rho<\infty,\ |z|>\frac{1}{2},\ |\arg z|\leqslant\frac{3\pi}{4\rho}\right),$$

где контур L_1 состоит из луча $\left\{t:\arg t=-\pi,\ |t|\geqslant\frac{1}{2^\rho}\right\}$, окружности $\left\{t:|t|=\frac{1}{2^\rho}\right\}$, луча $\left\{t:\arg t=\pi,\ |t|\geqslant\frac{1}{2^\rho}\right\}$ и пробегается, как показано на рисунке.

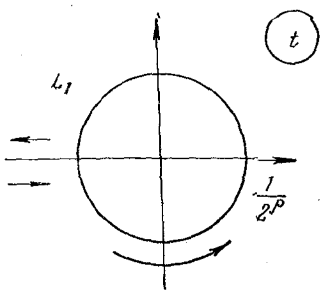

Рис. 1.

Построение примера опирается на две леммы. Для удобства в дальнейшем будем считать $\rho>2$.

Лемма 1. *Существует константа C, не зависящая от z и ρ такая, что 1) $|E(z;\ \rho)|\leqslant C\rho^2$ в углу $\frac{3\pi}{4\rho}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi$; 2) $|I|\leqslant C\rho^2$ для всех $z\in C^1$, $|\arg z|\leqslant\frac{3\pi}{4\rho}$.*

Доказательство. При $|z|\leqslant\frac{1}{4}$ в силу оценки $\Gamma(x)>\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt\geqslant\int_1^\infty e^{-t}\,dt=\frac{1}{e}$ $(x\geqslant 1)$ функция

Миттаг — Леффлера ограничена равномерно по $\rho \in (2, \infty)$:

$$|E(z;\rho)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z|^m}{\Gamma\left(1+\frac{m}{\rho}\right)} \leqslant e \sum_{m=0}^{\infty} |z|^m = \frac{e}{1-|z|} \leqslant 4e.$$

Пусть теперь $|z| > \frac{3}{4}$. Разобьем интеграл I на три части: $I = I_1 + I_2 + I_3$, где I_2 — интеграл по окружности; I_1, I_3 — интегралы соответственно по нижнему и верхнему берегу разреза. Сначала оценим интеграл I_2.

а) Так как при $|z| > \frac{3}{4}$ и $|t| = \frac{1}{2^\rho}$

$$\left|t^{\frac{1}{\rho}} - z\right| \geqslant |z| - |t|^{\frac{1}{\rho}} = |z| - \frac{1}{2} > \frac{1}{4},$$

то

$$|I_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|t|=\frac{1}{2^\rho}} \frac{e^t t^{\frac{1}{\rho}} t^{-1}}{t^{\frac{1}{\rho}} - z}\, dt\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(\frac{1}{2^\rho} e^{i\varphi}\right) \frac{1}{2} e^{i\frac{\varphi}{\rho}} \cdot 2^\rho e^{-i\varphi}}{t^{\frac{1}{\rho}} - z} \frac{e^{i\varphi}}{2^\rho}\, i\, d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\exp\left(\frac{1}{2^\rho} e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{\cos\varphi}{2^\rho}\right) d\varphi \leqslant 2e^{\frac{1}{2^\rho}}\ 2\sqrt{e}.$$

б) Теперь оценим интегралы I_1 и I_3. Так как при $x \geqslant \frac{1}{2^\rho}$ и $z \in A^+ = \left\{z : |z| \geqslant \frac{3}{4},\ |\arg z| \leqslant \frac{3\pi}{4\rho}\right\}$ выполняется неравенство

$$\left|x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\frac{\pi}{\rho}} - z\right| \geqslant \frac{3}{4} \sin\frac{\pi}{4\rho} \geqslant \frac{3}{8\rho},$$

то

$$|I_3| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\frac{1}{2^\rho}}^{\infty} \frac{e^{xe^{i\pi}} \cdot x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\frac{\pi}{\rho}} \cdot x^{-1} e^{-i\pi}}{x^{\frac{1}{\rho}} e^{i\frac{\pi}{\rho}} - z} e^{i\pi}\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{2^{\rho}}}^{\infty} \frac{e^{-x}x^{\frac{1}{\rho}-1}}{\left|x^{\frac{1}{\rho}}e^{i\frac{\pi}{\rho}}-z\right|}dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{8\rho}{3}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}x^{\frac{1}{\rho}-1}dx =$$

$$= \frac{4\rho}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{4\rho^2}{3\pi}\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho}\right) \leqslant C_1\rho^2,$$

где

$$C_1 = \frac{4}{3\pi}\max_{1\leqslant x\leqslant 2}\Gamma(x)$$

— константа, не зависящая от ρ и z. Интеграл I_1 оценивается аналогичным образом той же константой. Итак, $|I| \leqslant C_2\rho^2$ равномерно по $z \in A^+$. Далее, на лучах $\left\{z: |z| \geqslant \frac{3}{4},\ \arg z = \pm\frac{3\pi}{4\rho}\right\}$ функция Миттаг — Леффлера допускает оценку

$$|E(z;\ \rho)| = \left|I + \rho\exp\left(|z|^{\rho}e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}\right)\right| \leqslant |I| + \rho \leqslant C_2\rho^2 + \rho \leqslant C\rho^2.$$

Так как [4, стр. 114]

$$|E(z;\ \rho)| = 0\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

равномерно по $z \in A^- = \left\{z: |z| \geqslant \frac{3}{4},\ \frac{3\pi}{4\rho} \leqslant |\arg z| \leqslant \pi\right\}$ ($\rho > 2$ фиксировано) то найдется такое $R > 1$, зависящее только от ρ, что при $|z| \geqslant R$, $\frac{3\pi}{4\rho} \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$ выполняется $|E(z;\ \rho)| \leqslant 1$.

По принципу максимума для модуля голоморфной функции отсюда немедленно следует, что при $z \in A^-$ имеет место оценка $|E(z;\ \rho)| \leqslant C_2\rho^2 + \rho \leqslant C\rho^2$. Лемма доказана.

В следующей лемме для оценки снизу $|E(z;\ \rho)|$ в $A = \left\{z: |z| > 1,\ \frac{3\pi}{4\rho} \leqslant |\arg z| \leqslant \pi\right\}$ мы воспользуемся следующим представлением ([5], стр. 133 | 135):

$$E(z;\ \rho) = -\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\rho}\right)z} + \frac{\rho}{2\pi iz}\int\limits_{L_2}\frac{e^{t^{\rho}}t}{t-z}dt,$$

где контур L_2 состоит из луча $\left\{t: \arg t = -\frac{2\pi}{3\rho},\ |t| \geqslant 1\right\}$, дуги единичной окружности $\left\{t: |\arg t| \leqslant \frac{2\pi}{3\rho},\ |t| = 1\right\}$ и луча $\left\{t: \arg t = \frac{2\pi}{3\rho},\ |t| \geqslant 1\right\}$. Это представление имеет место в области, содержащей A.

Лемма 2. При некоторых константах C_3 *и* C_4 *в* A *справедлива оценка*

$$|E(z;\ \rho)| \geqslant \frac{C_3}{|z|}\left(C_4 - \frac{\rho}{|z|}\right).$$

Доказательство. Так как

$$\min_{t \in L_2}(|t-z|) = |z| \sin\frac{\pi}{12\rho} \geqslant \frac{|z|}{6\rho},$$

то

$$\left|\int_{L_2} \frac{e^{t^\rho}t}{t-z}\,dt\right| = \left|\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{x^\rho e^{-i\frac{2\pi}{3}}}\cdot x e^{-i\frac{2\pi}{3\rho}}}{t-z}\, e^{-i\frac{2\pi}{3\rho}}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-\frac{2\pi}{3\rho}}^{\frac{2\pi}{3\rho}} \frac{e^{e^{i\rho\varphi}}e^{i\varphi}}{t-z}\, ie^{i\varphi}\,d\varphi + \int_1^\infty \frac{e^{x^\rho e^{i\frac{2\pi}{3}}}\cdot x e^{i\frac{2\pi}{3\rho}}}{t-z}\, e^{i\frac{2\pi}{3\rho}}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6\rho}{|z|}\left\{2\int_1^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^\rho}dx + \int_{-\frac{2\pi}{3\rho}}^{\frac{2\pi}{3\rho}} e^{\cos\rho\varphi}\,d\varphi\right\}.$$

Оценим интегралы в фигурных скобках:

$$\text{а)} \int_{-\frac{2\pi}{3\rho}}^{\frac{2\pi}{3\rho}} e^{\cos\rho\varphi}\,d\varphi \leqslant \frac{4\pi e}{3\rho}.$$

б) В первом интеграле сделаем замену $x^\rho = y$; имеем тогда

$$\int_1^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^\rho}dx = \frac{1}{\rho}\int_1^\infty y^{\frac{2}{\rho}-1} e^{-\frac{y}{2}}\,dy \leqslant \frac{1}{\rho}\int_1^\infty e^{-\frac{y}{2}}\,dy = \frac{2}{\rho\sqrt{e}}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_{L_2} \frac{e^{t^\rho}t}{t-z}\,dt\right| \leqslant \frac{2\pi C_3}{|z|}$$

(константа C_3 не зависит от z и ρ) и

$$|E(z;\ \rho)| \geqslant \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\rho}\right)|z|} - \frac{C_3\rho}{|z|^2}.$$

Пусть

$$C_4 = \min_{\rho \geqslant 2} \frac{1}{C_3 \Gamma\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} \quad (C_4 > 0).$$

Тогда

$$|E(z;\ \rho)| \geqslant \frac{C_3}{|z|}\left(C_4 - \frac{\rho}{|z|}\right).$$

Лемма доказана.

Заметим, что $E(0;\ \rho) = 1$.

Проверим теперь, что $f(z,\ w)$ является целой функцией дву комплексных переменных. Для этого достаточно убедиться в том что для любого $R > 0$ ряд (1) сходится абсолютно и равномерн при $|z| \leqslant R$, $|w| \leqslant R$. В силу оценок, полученных в леммах, достаточно показать, что сходится ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{R}{n \exp(\sqrt[4]{\ln n})}\right)^n \{b(n) \exp[(a(n) R)^{b(n)}] + Cb(n)^2 = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n.$$

Зафиксируем R:

а) $$(a(n) R)^{b(n)} = \exp\{b(n) \ln a(n) + b(n) \ln R\} = \exp\Big\{\ln n + \frac{1}{2} \ln \ln n + \sqrt{\ln \ln n} \ln R\Big\} < \exp\Big\{\ln n + \frac{2}{3} \ln \ln n\Big\} = n (\ln n)^{\frac{2}{3}}$$

(неравенство асимптотическое).

б) Так как асимптотически $Cb(n) < \exp\left[n(\ln n)^{\frac{2}{3}}\right]$, то

$$b(n) \exp[(a(n) R)^{b(n)}] + Cb(n)^2 < 2b(n) \exp\left[n(\ln n)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Воспользовавшись признаком Коши, имеем

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \frac{R}{n \exp(\sqrt[4]{\ln n})} 2^{\frac{1}{n}} (\ln \ln n)^{\frac{1}{2n}} \exp\left((\ln n)^{\frac{2}{3}}\right) = 0;$$

следовательно, $f(z,\ w)$ целая функция.

Найдем порядок и тип функции $f(z,\ w)$ по переменному w:

$$f(0,\ w) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{w^n}{[n \exp(\sqrt[4]{\ln n})]^n}.$$

Так как

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{n(\ln n + \sqrt[4]{\ln n})} = 1, \quad \varlimsup_{n \to \infty} \left(n \cdot \frac{1}{n \exp(\sqrt[4]{\ln n})}\right) = 0,$$

$f(0, w)$ является функцией минимального типа первого порядка. Фиксируем $z \neq 0$. При достаточно больших n будут выполняться неравенства

$$|\theta_n - \arg z| > \frac{3\pi}{4b(n)}, \quad |a(n)z| > 1, \quad \frac{2b(n)}{a(n)|z|} < C_4$$

и, следовательно, справедливы оценки

$$|g_n(z)| = |E(a(n)ze^{-i\theta_n};\ b(n))| \leqslant Cb(n)^2 = C\ln\ln n;$$

$$|g_n(z)| \geqslant \frac{C_3}{a(n)|z|}\left(C_4 - \frac{b(n)}{a(n)|z|}\right) >$$

$$> \frac{C_3C_4}{2a(n)|z|} = \frac{C_3C_4}{2|z|}\exp\left\{-\frac{\ln n + \frac{1}{2}\ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}}\right\}.$$

Из этих оценок вытекает, что $|\ln|g_n(z)|| = o(\ln n)$. Далее,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n\ln n}{n\ln n + n\sqrt[4]{\ln n} - \ln|g_n(z)|} = 1;$$

$$0 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sqrt[n]{|g_n(z)|}}{n\exp(\sqrt[4]{\ln n})} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{(C\ln\ln n)^{\frac{1}{n}}}{\exp(\sqrt[4]{\ln n})} = 0.$$

Следовательно, при любом фиксированном z функция $f(z, w)$ имеет по переменному w первый порядок и минимальный тип. Кроме того, она принадлежит классу сходимости. Действительно, при любом фиксированном z асимптотически по n выполняется неравенство $|g_n(z)| \leqslant C\ln\ln n$. Поэтому достаточно проверить, что классу сходимости принадлежит функция

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\ln\ln n}{[n\exp(\sqrt[4]{\ln n})]^n}w^n = \sum_{n=n_0}^{\infty}a_nw^n.$$

Так как функция $n(\ln n + \sqrt[4]{\ln n}) - \ln\ln\ln n$ выпукла на интервале (n_0, ∞), то выполняется условие $a_n^2 \geqslant a_{n-1}a_{n+1}$ и можно воспользоваться критерием Карлемана. Ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\sqrt[n]{a_n}$ сходится, так как он мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$$

Рассмотрим теперь функцию $M(r_1, r_2)$. Так как при каждом z порядок функции $f(z, w)$ по переменному w равен 1, при любом фиксированном $r_1 \geqslant 0$ порядок функции $M(r_1, r_2)$ равен 1. Рассмотрим, далее, целую функцию

$$F(r_1;\ w) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{M(r_1, g_n)}{[n \exp(\sqrt[4]{\ln n})]^n} w^n = \sum_{n=n_1}^{\infty} c_n(r_1) w^n \quad (r_1 > 0).$$

Так как при фиксированном r_1 асимптотически по n выполняются неравенства

$$b(n) \exp[(r_1 a(n))^{b(n)}] - Cb(n)^2 \leqslant M(r_1, g_n) \leqslant$$
$$\leqslant b(n) \exp[(r_1 a(n))^{b(n)}] + Cb(n)^2$$

и

$$n (\ln n)^{\frac{1}{3}} \leqslant (r_1 a(n))^{b(n)} \leqslant n (\ln n)^{\frac{2}{3}},$$

то $-\ln c_n(r_1) = n \ln n + o(n \ln n)$. Поэтому функция $F(r_1, w)$ имеет порядок 1. Покажем, что эта функция имеет максимальный тип. Действительно, начиная с некоторого n, выполняется неравенство $2Cb(n) < \exp[r_1 a(n)^{b(n)}]$ и поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (n \sqrt[n]{c_n(r_1)}) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ n \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} b(n) \exp[(r_1 a(n))^{b(n)}]\right]^{\frac{1}{n}}}{n \exp(\sqrt[4]{\ln n})} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left[\exp\left(n (\ln n)^{\frac{1}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}}{\exp(\sqrt[4]{\ln n})} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \exp\left\{(\ln n)^{\frac{1}{3}} - (\ln n)^{\frac{1}{4}}\right\} = \infty.$$

Так как типы функций $F(r_1; w)$ и $M(r_1, r_2)$ совпадают, функция $M(r_1, r_2)$ имеет максимальный тип по переменному r_2 при любом фиксированном $r_1 > 0$. Построение примера закончено.

Автор выражает глубокую признательность Л. И. Ронкину за постановку задач и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., «Наука», 1971.

2. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.

3. С. Мандельбройт. Квазианалитические классы функций. М. —Л., ОНТИ, 1937.

4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.

5. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.

Поступила 29 июня 1971 г.