ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССОВ ЛИПШИЦА ЦЕЛОГО ПОРЯДКА НА ОТРЕЗКЕ ПО СКОРОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Р. М. Тригуб

Пусть W^r — класс функций с ограниченной r-й производной ($f^{(r-1)} \in \mathrm{Lip}\,1$, r — натуральное). Чтобы 2π-периодическая функция $f(t)$ с коэффициентами Фурье a_k, b_k принадлежала W^r при четном r, необходимо и достаточно

$$\sup_t \left| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^r}{n^r}\right)(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| =$$

$$= 0\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

(достаточность доказана А. Зигмундом [1], необходимость — М. Замански́м [2]). Тригонометрические полиномы с аналогичным свойством при нечетном r указаны автором. Простейшие из них [3, стр. 412]

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k^{r+1}}{n^{r+1}}\right)(a_k\cos kt+b_k\sin kt)+$$
$$+\frac{k^r}{n^r}\left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k\sin kt-b_k\cos kt)$$

(r — нечетное)[1].

В случае круга (функции аналитичны внутри и принадлежат W^r на замкнутом единичном круге)

$$f\in W^r\leftrightarrow\sup_{|z|\leqslant 1}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k^r}{n^r}\right)\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\right|=O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Целью настоящей статьи является доказательство подобного факта для $W^r[a,\ b]$.

Пусть для простоты $[a,\ b]=[-1,\ 1]$. С. М. Никольский [6] обнаружил, что $\forall f\in W^1\exists$ последовательность алгебраических полиномов $P_n(f,x)$ такая, что $\forall x\in[-1,\ 1]$

$$|f(x)-P_n(f;\ x)|\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)$$

(у концов отрезка порядок приближения лучше, чем $\frac{1}{n}$ по всему отрезку). Позже А. Ф. Тиманом и В. К. Дзядыком была найдена конструктивная характеристика класса функций с r-й производной, удовлетворяющей условию Липшица любого нецелого порядка α [7, 8][2]. Ниже доказывается аналогичная характеристика классов Липшица любого целого порядка. К этому вопросу примыкает лишь теорема Г. Лоренца [8], определившего класс насыщения для полиномов Бернштейна B_n:

$$|f(x)-B_n(f;\ x)|=O\left(\frac{1-x^2}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leftrightarrow f\in W^2.$$

Через W_0^r обозначим множество функций из $W^r[-1,\ 1]$, удовлетворяющих следующим граничным условиям $\left(s=\left[\frac{r+1}{2}\right],\ \left[\frac{r+1}{2}\right]+\right.$ $\left.+1,\ \ldots,\ r-1\right)$:

$$\sum_{p=1}^{r-1}a_{p,\,s}\frac{f^{(p)}(1)}{p!}=0,\quad\sum_{p=1}^{r-1}(-1)^p a_{p,\,s}\frac{f^{(p)}(-1)}{p!}=0,\tag{2}$$

[1] Новое доказательство этого имеется в недавно вышедшей статье [4, теорема 2]. См. также [5].

[2] Отметим, что этот класс (и при целом α) описан с помощью локальных приближений (например, наилучших) полиномами в [9] и с помощью кусочно-полиномиальных приближений в [10].

$$a_{p,s}=\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=p}^{r-1}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{r+m+k+\nu}\binom{p}{m}\binom{\frac{m}{2}}{k}\binom{2k}{k-\nu}4^{-k}\nu^{2s}.$$

Теорема. *Чтобы* $f\in W_0^r$, *необходимо и достаточно*

$$|f(x)-R_n(f;\ x)|=O\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^r, \tag{3}$$

$$R_n(f;\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^{2\left[\frac{r+1}{2}\right]}\right)a_kC_k(x)+$$

$$+\frac{1+(-1)^{r+1}}{2}\sqrt{1-x^2}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{k}{n^r}\,a_kS_{k-1}(x),$$

$C_k(x)=\cos k\arccos x$ — *полиномы Чебышева;* a_k — *коэффициенты Фурье-Чебышева;* S_{k-1} — *полиномы Чебышева II рода* ($kS_{k-1}=C_k'$).

Следствие. $f\in W^r[-1,\ 1]$ *тогда и только тогда, когда* $\exists$ *алгебраический полином* q_r *степени* $\leqslant r$ *такой, что*

$$|f(x)-q_r(x)-R_n(f-q_r;\ x)|=O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^r.$$

Замечание. При нечетном r приближающие функции не являются полиномами. Возможно, что как в периодическом случае при довольно общих условиях нельзя обойтись без привлечения сопряженного ряда [11, теорема 4], так и здесь, приближая выражениями вида

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_ka_kC_k(x)+\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}\mu_ka_kS_{k-1}(x),$$

нельзя считать $\mu_k\equiv 0$. Впрочем, и в этом случае можно охарактеризовать W^r по степени полиномиальной аппроксимации, если несколько изменить постановку задачи. Достаточно учесть, что

$$F(x)=C+\int_0^x f(t)\,dt\in W^{r+1}\leftrightarrow f\in W^r,$$

и применить теорему к $F(x)$.

Теорему можно также сформулировать так: для последовательности линейных операторов $R_n(f;\ x)$ классом насыщения является W_0^r.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть r — четное. Делая в (3) стандартную замену $x = \cos t$, $g(t) = f(\cos t)$, получим ($\varepsilon_n \to 0$)

$$\left| g(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^r}{n^r}\right) a_k \cos kt \right| \leqslant M \left(\frac{|\sin t|}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^r. \tag{4}$$

Отсюда, учитывая (1), следует существование r производных у $f(x)$, ограниченных внутри отрезка. Применяя к левой части (4), которую мы обозначим через $\Delta_n(t)$, оператор Фейера ($F_m(u)$ — ядро Фейера) и пользуясь очевидными неравенствами

$$|\sin(t+u)| \leqslant |\sin t| + |\sin u|, \quad (a+b+c)^r \leqslant 3^r(a^r + b^r + c^r),$$

получаем

$$|\sigma_m(\Delta_n)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(t+u) F_m(u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|\sin(t+u)|}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^r F_m(u)\, du \leqslant M \cdot 3^r \left(\frac{|\sin t|^r}{n^r} + \frac{\varepsilon_n^r}{n^r}\right) +$$

$$+ \frac{M \cdot 3^r}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin u|^r F_m(u)\, du = C_r \left(\frac{|\sin t|^r}{n^r} + \frac{\varepsilon_n^r}{n^r} + \frac{\tilde{\varepsilon}_m}{n^r}\right)$$

($\tilde{\varepsilon}_m$ — нуль — последовательность в силу теоремы Фейера, например). Следовательно, $\forall m \leqslant n$

$$|\sigma_m(g^{(r)})| = \left| \sum_{k=1}^{m} k^r \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) a_k \cos kt \right| =$$

$$= |n^r \sigma_m(\Delta_n)| \leqslant C_r(|\sin t|^r + \varepsilon_n' + \tilde{\varepsilon}_m);$$

значит [12], $g \in W^r$ и почти всюду (устремляем $n \to \infty$, а затем $m \to \infty$)

$$|g^{(r)}(t)| \leqslant C_r |\sin t|^r. \tag{5}$$

Такое же неравенство аналогично получается при нечетном r. В силу (5) четная функция $g(t)$ имеет представление Тейлора

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} t^{2k} + \varphi_r(t), \quad |\varphi_r^{(\nu)}(t)| = O(t^{2r-\nu}),$$

$$0 \leqslant \nu \leqslant r \tag{6}$$

при всех t (при $\nu = r$ почти при всех). Отсюда следует, что $f^{(p)}(x)$ ($1 \leqslant p \leqslant r-1$) допускает непрерывное продолжение на $(-1, 1]$, а $f^{(r)}(x)$ ограничена почти всюду около точки $x = 1$. Действительно

$$f^{(0)}(\cos t) = g(t), \quad f^{(p)}(\cos t) = -\frac{1}{\sin t}[f^{(p-1)}(\cos t)]'$$

...ществует предел при $t\to 0$ ($1\leqslant p\leqslant r-1$) (при переходе от ...1) к p теряется множитель t^2. Кроме того, функция удовлетворяет в точке $x=1$ некоторым условиям. Определим их.

Из (6)

$$g(t)=\sum_{k=0}^{r-1} C_k \sin^{2k} t+\tilde{\varphi}_r(t),\quad \varphi_r^{(\nu)}(t)=\tilde{\varphi}(t^{2r-\nu}),\quad 0\leqslant\nu\leqslant r. \tag{7}$$

Но

$$\sin^{2k} t=\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^{2k}=\frac{(-1)^k}{4^k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}(-1)^\nu e^{(2k-2\nu)it}=$$

$$=4^{-k}(-1)^k\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}(-1)^\nu\sum_{q=0}^{2r-1}\frac{(2k-2\nu)^q i^q t^q}{q!}+\tilde{\tilde{\varphi}}_r(t)=$$

$$=4^{-k}\sum_{q=0}^{2r-1}\frac{i^q t^q}{q!}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}(-1)^{\nu+k}(2k-2\nu)^q+\tilde{\tilde{\varphi}}_r(t)$$

...сь q можно давать только четные значения $\geqslant 2k$). Подставляя ...) и сравнивая с (6), имеем

$$\sum_{k=0}^{r-1} C_k 4^{-k}\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}(-1)^{k+\nu}(2k-2\nu)^q=0,\quad r\leqslant q=2s<2r.$$

Для определения C_k сделаем в (7) замену $t=\arccos x$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{r-1} C_k(1-x^2)^k+O[1-x^2]^r\ (x\to 1).$$

Следовательно,

$$C_k=\frac{(-1)^k}{k!}\left.\frac{d^k f(\sqrt{x})}{dx^k}\right|_{x=1}=$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p!}f^{(p)}(1)\sum_{m=1}^{p}\binom{p}{m}(-1)^{p+m}\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{m}{2}-k+1\right).$$

Учитывая, что $g(\pi-t)=f(\cos(\pi-t))=f(-\cos t)$ — тоже четная функция, получаем аналогичные условия в точке $x=-1$ (с заменой $f^{(p)}(1)$ на $(-1)^p f^{(p)}(-1)$).

Чтобы придать граничным условиям форму (2), осталось заметить, что

$$\sum_{\nu=0}^{2k}\binom{2k}{\nu}(-1)^\nu(2k-2\nu)^{2s}=2^{2s+1}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{2k}{k-\nu}(-1)^{k-\nu}\nu^{2s}.$$

Докажем теперь необходимость.

Пусть $f \in W_0^r$. По формуле Тейлора $\left(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1\right)$.

$$f(\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{r-1} C_k (1-x)^k + \varphi_r(x), \quad |\varphi_r^{(\nu)}(x)| = O[1-x]^{r-\nu} (0 \leqslant \nu \leqslant r)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k (1-x^2)^k + \varphi_r(x^2). \tag{8}$$

И значит, учитывая (2) (см. выше сравнение (6) и (7)),

$$g(t) = f(\cos t) = \sum_{k=0}^{r-1} C_k \sin^{2k} t + \varphi_r(\cos^2 t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} t^{2k} + \tilde{\varphi}_r(t). \tag{9}$$

Проверим, что

$$|\tilde{\varphi}_r^{(\nu)}(t)| = O(t^{2r-\nu}), \ 0 \leqslant \nu \leqslant r.$$

Для этого, как видно из предыдущего, достаточно проверить такое условие для $\varphi_r(\cos^2 t)$. Но $[\varphi_r(u)]^{(\nu)}$ — линейная комбинация функций вида

$$\varphi_r^{(p)}(u)(u')^{\alpha_1}(u'')^{\alpha_2} \ldots (u^{(\nu)})^{\alpha_\nu} \qquad (1 \leqslant p \leqslant \nu),$$

при этом $\alpha_1 \geqslant 2p - \nu$ (доказывается индукцией по ν). Поэтому в силу (8)

$$[\varphi_r(\cos^2 t)]^{(\nu)} = O\left(\sum_{p=1}^{\nu} [\sin^2 t]^{r-p} [2 \sin t \cos t]^{2p-\nu}\right) = O(t^{2r-\nu}).$$

Из (9) следует, что почти всюду в окрестности точки $t = 0$

$$|g^{(r)}(t)| \leqslant C_r |t|^r.$$

Аналогично при t, близких к π. Следовательно, выполняется условие (5).

В силу равенства Парсеваля (теорема о свертке)

$$\Delta_n(t) = g(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^r}{n^r}\right) a_k \cos kt =$$

$$= \frac{1}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} g^{(r)}(t+u) K_n(u)\, du,$$

где при четном r

$$K_n(u) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^r \cos ku}{k^r}\right)(-1)^{\frac{r}{2}}.$$

Используя неравенство (5), получаем

$$|\Delta_n(t)| \leqslant \frac{C_r}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin(t+u)|^r\cdot|K_n(u)|\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_r\cdot 2^r}{\pi n^r}|\sin t|^r\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(u)|\,du + \frac{C_r 2^r}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin u|^r\cdot(K_n(u)|\,du.$$

Первый интеграл ограничен по n в силу давно известного неравенства [12, $\lambda_k \to 0$]

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\lambda_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos ku\right|du \leqslant \pi\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta_2\lambda_k|.$$

Второй интеграл есть $O\left(\frac{1}{n}\right)$ в силу аналогичного неравенства [5, $\mu_k \to 0$]

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\sin ku\right|du \leqslant \pi\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)^2\left|\Delta_2\left(\frac{\mu_k}{k}\right)\right|,$$

если учесть сначала, что $|\sin u|^r \leqslant |\sin u|$, а

$$(-1)^{\frac{r}{2}}\,2\sin u\,K_n(u) = \left(1-\frac{n^r}{(n+1)^r}\right)\sin nu + \sum_{k=n+1}^{\infty} n^r\left(\frac{1}{(k-1)^r} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(k+1)^r}\right)\sin ku.$$

При нечетном r

$$K_n(u) = (-1)^{\frac{r-1}{2}}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos ku - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin ku - \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n^r}{k^r}\sin ku\right]$$

второй интеграл (при $r=1$) есть $0\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Теорема полностью доказана.

При $r=2$, например, W_0^r — это класс функций с производной $f' \in \operatorname{Lip} 1$, $f'(\pm 1) = 0$; при $r=3$

$$f'(1)+3f''(1)=0, \quad f'(-1)-3f''(-1)=0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Zygmund. The approximation of functions by typical mean of the Fourier series, Duke Math. J., 12 (1945), 695—704.

2. M. Zamansky. Classes de saturation des procédés de sommatio des series de Fourier et applications aux séries trigonometriques, Ann. Sci Ecole Norm. Sup., 67 (1950), 161—198.

3. Р. М. Тригуб. Линейные методы суммирования и абсолютна сходимость рядов Фурье. «Изв. АН СССР, серия математическая», 32, 1968 № 1, 24—29.

4. G. Alexits, G. Sunouchi. Characterization of classes of fun ctions by polinomial approximation, Acta Sci. Math., Szeged, 31, № 1—2 (1970), 1—7.

5. Р. М. Тригуб. Суммируемость и абсолютная сходимость рядо Фурье в целом. Сб. «Метрические вопросы теории функций и отображени выл. 2. Киев, «Наукова думка», 1971, 173—266.

6. С. М. Никольский. О наилучшем приближении многочленам функций, удовлетворяющих условию Липшица. «Изв. АН СССР, сери математическая», 10, 1946, 295—318.

7. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного пере менного. М., Физматгиз, 1960.

8. G. G. Lorentz. Approximation of Functions, Holt, Rinehart anc Winston, 1966.

9. Д. А. Райков. О локальных приближениях дифференцируемых функций. ДАН СССР, 24, 1939, № 7, 652—655.

10. Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз. Приближение кусочно полиномиальными функциямм. «Изв. АН СССР, серия математическая», 27 1963, № 4, 723—746.

11. Р. М. Тригуб. О линейных методах суммирования рядов Фурь и модулях непрерывности разных порядков. «Сиб. матем. ж.» т. XII, 1971 № 6.

12. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.

Поступила 1 июня 1971 г