О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

В. М. Борок, Я. И. Житомирский

Вопрос о классах единственности решения задачи Коши для линейных уравнений (и даже систем) с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P(D)\,u(x,t),\ x \in R^m,\ t \in [0, T] \tag{1}$$

исчерпывающе изучен в [1, 2, 3].

В [4, 5] исследованы классы единственности решения задачи Коши для дифференциально-разностных (по x) уравнений (и систем), т. е. уравнений, отличающихся от (1) наличием сдвигов пространственного аргумента в правой части. При этом оказалось, что такие сдвиги влекут сужение классов единственности.

В то же время, насколько нам известно, вопрос о влиянии на классы единственности решения задачи Коши других линейных преобразований пространственного аргумента не изучался.

В данной статье исследуются классы единственности решения задачи Коши для уравнений вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{r=1}^{R} L_r P_r(D)\,u(x,t) \equiv Lu(x,t), \tag{2}$$

$$x = (x_1, \cdots, x_m) \in R^m, t \in [0, T],$$

$$P_r(D) = \sum_{\substack{(\alpha) \\ 0 \leqslant p_0 \leqslant |\alpha| \leqslant p}} A_{r(\alpha)} D^{(\alpha)}, (\alpha) = (\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(m)})$$

$$|\alpha| = \alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(m)}, D^{(\alpha)} = D_1^{\alpha^{(1)}} \cdots D_m^{\alpha^{(m)}}, \tag{3'}$$

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$A_{r(\alpha)}$ — (комплексные) постоянные; операторы L_r действуют на функцию $g(x)$ следующим образом:

$$L_r g(x) = g(\Lambda_r x + b_r), \tag{3}$$

где Λ_r — неособая матрица $(m \times m)$, $b_r \in R^m$. При этом оказывается, что если все матрицы Λ_r ортогональны, то не происходит изменения известных ранее классов единственности. Если же среди матриц Λ_r имеются неортогональные, при некотором дополнительном предположении на них (см. условие 1 теоремы 3) происходит сужение этих классов. В заключение приведем примеры, показывающие, что найденные нами классы единственности не могут быть существенно расширены.

Основные результаты работы анонсированы в [6].

1. Постановка задачи. Общая схема исследования

Вопрос о классе единственности решения задачи Коши для уравнения (2) есть вопрос о том, какой должна быть функция $f(r) > 0 \ (r \geqslant 0)$, чтобы всякое решение $u(x, t)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию

$$u(x, 0) = 0 \tag{2$_0$}$$

и оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{f(\|x\|)\}, \tag{4}$$

$$x \in R^m, \ t \in [0, T], \ \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2,$$

тождественно равнялось нулю.

Пусть функция $u(x, t)$ является обобщенным решением [7] задачи (2) — (2$_0$) над пространством Φ основных функций; это означает, что для любой $\varphi(x) \in \Phi$ выполнены два соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x, t), \varphi(x)) = (u(x, t), L^* \varphi(x)), \tag{5}$$

$$\lim_{t \to 0} (u(x, t), \varphi(x)) = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$(u(x, t), \varphi(x)) = \int_{R^m} u(x, t)\, \overline{\varphi}(x)\, dx,$$

$$L^* \varphi(x) = \sum_{r=1}^{R} P_r^*(D)\, L_r^* \varphi(x), \tag{7}$$

$P_r^*(D)$ — сопряженное к $P_r(D)$ дифференциальное выражение. Оператор L_r^* действует следующим образом:

$$L_r^* \varphi(x) = \varphi(\Lambda_r^{-1}(x - b_r)) \cdot |\det \Lambda_r|^{-1}. \tag{8}$$

Обозначим

$$F(t) = (u(x, t), \varphi(x)), \qquad t \in [0, T]. \tag{9}$$

Тогда из (5) следует, что $F(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем

$$F^{(n)}(t) = (u(x, t), L^{*^n}\varphi(x)). \tag{10}$$

На основании (10) и (6) запишем

$$F^{(n)}(0) = 0, \; n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Пусть функция $f(r)$ в (4) и пространство Φ выбраны так, что, во-первых, $(u(x, t) \in \Phi'$ и, во-вторых, из (10) удается получить оценки вида $|F^{(n)}(t)| \leqslant M_n$, где постоянные $M_n > 0$ таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n^{-\frac{1}{n}} = \infty$. Тогда, в силу (11), используя классический критерий квазианалитичности, получим $F(t) \equiv 0$. Отсюда, если пространство Φ достаточно богато функциями [8], в силу произвольности $\varphi(x) \in \Phi$ из (9) будет следовать, что $u(x, t) \equiv 0$.

Приведенная выше схема получения класса единственности задачи Коши была предложена в [3] для систем вида (1).

Очевидно, дальнейшее исследование упирается в получение оценок степеней оператора L^*. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть* $\varphi(x) \in C^\infty(R^m)$. *Тогда*

$$L^{*^n}\varphi(x) = \sum_{r_1, \ldots, r_n = 1}^{K} \sum_{\substack{(\alpha_1), \ldots, (\alpha_n) \\ 0 \leqslant p_0 \leqslant |\alpha_i| \leqslant p \\ i = 1, \ldots, n}} \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{A^*_{r_i (\alpha_i)}}{|\det \Lambda_{r_i}|}\right] S^{(\alpha_1), \ldots, (\alpha_n)}_{r_1, \ldots, r_n}(x), \tag{12}$$

где

$$S^{(\alpha_1), \ldots, (\alpha_n)}_{r_1, \ldots, r_n}(x) = \sum_{\substack{(\alpha) \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|}} [D^{(\alpha)}\varphi(y)]_{y = y_{r_1, \ldots, r_n}(x)} \prod_{i=1}^{n} B_{(\alpha), |\alpha_i|}(\Lambda^{-1}_{r_i} \ldots \Lambda^{-1}_{r_1}), \tag{13}$$

$$A^*_{r, (\alpha)} = (-1)^{|\alpha|} A_{r, (\alpha)},$$

$$y_{r_1, \ldots, r_n}(x) = \Lambda^{-1}_{r_1} \ldots \Lambda^{-1}_{r_n} x - \sum_{i=1}^{n} \Lambda^{-1}_{r_1} \ldots \Lambda^{-1}_{r_i} b_{r_i}, \tag{14}$$

$B_{(\alpha), k}(\Lambda)$ — *произведение k множителей, каждый из которых есть элемент матрицы* Λ.

Доказательство. Элементарные вычисления приводят к формуле

$$D^{(\beta)}\varphi(\Lambda x - b) = \sum_{\substack{(\alpha)\\ |\alpha|=|\beta|}} [D^{(\alpha)}\varphi(y)]_{y=\Lambda x-b} \cdot B_{(\alpha),\,|\beta|}(\Lambda). \tag{15}$$

где $b \in R^m$, Λ — произвольная матрица $(m \times m)$. Из (7), (8) и (15) получаем

$$L^*\varphi(x) = \sum_{r=1}^{R} \sum_{\substack{(\alpha)\\ 0\leqslant p_0\leqslant|\alpha|\leqslant p}} \frac{A^*_{r,\,(\alpha)}}{|\det \Lambda_r|} D^{(\alpha)}\varphi(\Lambda_r^{-1}(x-b_r)) =$$

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{\substack{(\alpha)\\ 0\leqslant p_0\leqslant|\alpha|\leqslant p}} \frac{A^*_{r,\,(\alpha)}}{|\det \Lambda_r|} \sum_{\substack{(\beta)\\ |\beta|=|\alpha|}} [D^{(\beta)}\varphi(y)]_{y=\Lambda_r^{-1}(x-b_r)} \cdot B_{(\beta),|\alpha|}(\Lambda_r^{-1}), \tag{16}$$

что совпадает с (12) при $n = 1$. Пусть теперь формула (12) справедлива при $n = k$. Тогда, используя первую часть (16), получаем

$$L^{*^{k+1}}\varphi(x) = L^*(L^{*^k}\varphi(x)) =$$

$$\sum_{r_{k+1}=1}^{R} \sum_{\substack{(\alpha_{k+1})\\ 0\leqslant p_0\leqslant|\alpha_{k+1}|\leqslant p}} \frac{A^*_{r_{k+1},(\alpha_{k+1})}}{|\det \Lambda_{r_{k+1}}|} D^{(\alpha_{k+1})} \left(L^{*k}\varphi(y)\,|_{y=\Lambda^{-1}_{r_{k+1}}(x-b_{r_{k+1}})}\right). \tag{17}$$

Но из (14) следует, что $y_{r_1,\ldots,r_k}(\Lambda^{-1}_{r_{k+1}}(x-b_{r_{k+1}})) = y_{r_1,\ldots,r_{k+1}}(x)$; поэтому из (13), используя (15), получаем

$$D^{(\alpha_{k+1})} S^{(\alpha_1),\ldots,(\alpha_k)}_{r_1,\ldots,r_k}(x) =$$

$$\sum_{\substack{(\beta)\\ |\beta|=|\alpha_{k+1}|}} \sum_{\substack{(\alpha)\\ |\alpha|=\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i|}} D^{(\alpha+\beta)}\varphi(y)\,|_{y=y_{r_1,\ldots,r_{k+1}}(x)} \cdot B_{(\beta),|\alpha_{k+1}|}(\Lambda^{-1}_{r_1}\ldots\Lambda^{-1}_{r_{k+1}}) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} B_{(\alpha),|\alpha_i|}(\Lambda^{-1}_{r_1}\ldots\Lambda^{-1}_{r_i}) =$$

$$= \sum_{\substack{(\gamma)\\ |\gamma|=\sum_{i=1}^{k+1}|\alpha_i|}} D^{(\gamma)}\varphi(y)\,|_{y=y_{r_1,\ldots,r_{k+1}}(x)} \cdot \prod_{i=1}^{k+1} B_{(\gamma),|\alpha_i|}(\Lambda^{-1}_{r_1}\ldots\Lambda^{-1}_{r_i}).$$

Отсюда и из (17) получаем справедливость (12) при $n = k + 1$. Лемма доказана.

2. Уравнения с ортогональными матрицами Λ_r

Теорема 1. *Пусть для уравнения (2) выполнены следующие условия:*

1) матрицы Λ_r, $r = 1, \ldots, R$ в (3) являются ортогональными;

2) сдвиги $b_r = 0$, $r = 1, \ldots, R$;

3) порядок уравнения (2) $p \geqslant 2$.

Тогда задача (2) — (2$_0$) *имеет лишь тривиальное решение в классе функций (4), если $f(r) = r^{p'}l(r)$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, $l(r) > 0$ — логарифмически выпуклая монотонная медленно растущая функция*[1] *такая, что*

$$\int^{\infty} r^{-1} (l(r))^{1-p}\, dr = \infty. \tag{18}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что функция

$$l_1(r) = c_1 l(c_2 r), \quad c_1 > 0, \ c_2 > 0 \tag{19}$$

обладает теми же свойствами, что и $l(r)$. В качестве пространства основных функций Φ выберем совокупность целых функций $\varphi(z)$, $z = x + iy \in C^m$, для которых при определенных $a > 0$, $b > 0$ и любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ справедливы оценки

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant C_{\varepsilon,\delta} \exp\Big\{-\sum_{i=1}^{m} |(a-\varepsilon)x_i|^{p'} l_1(|(a-\varepsilon)x_i|) + \\ + \sum_{i=1}^{m} |(b+\delta)y_i|^{p'} l_1(|(b+\delta)y_i|)\Big\}. \tag{20}$$

Пространство Φ обладает следующими свойствами [3]: *а*) Φ достаточно богато функциями при любом фиксированном и достаточно большом b; *б*) для любой $\varphi \in \Phi$ и любого мультиндекса α справедливы оценки

$$|D^{(\alpha)}\varphi(x)| \leqslant \\ \leqslant C_{\varepsilon,\delta} \cdot \prod_{i=1}^{m} B^{\alpha_i} \alpha_i^{\frac{\alpha_i}{p}} [l_1(\alpha_i)]^{\frac{\alpha_i}{p'}} \cdot \exp\{-|(a-\varepsilon)x_i|^{p'} l_1(|(a-\varepsilon)x_i|)\}, \tag{21}$$

где B не зависит от α.

---

[1] При $p = 2$ от $l(r)$ дополнительно требуется, чтобы функция $[\ln l(r)](\ln r)^{-1}$ была сильным уточненным порядком [9, стр. 48, 59—60]. Все эти условия выполнены, если функция $\varphi(s) = \ln l(e^s)$ дважды дифференцируема и удовлетворяет условиям $\varphi''(s) < 0$.

$$\lim_{s\to\infty} s^{-1}\varphi(s) = 0, \ \lim_{s\to\infty} \varphi''(s)[\varphi'(s)]^{-1} = 0 \ [10].$$

Из (21) следует, что

$$|D^{(\alpha)}\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_{\varepsilon,\delta} \cdot B^{|\alpha|} \cdot |\alpha|^{\frac{|\alpha|}{p}} [l_1(|\alpha|)]^{\frac{|\alpha|}{p'}} \cdot \exp\{-a_1 \|x\|^{p'} l_1(a_2\|x\|)\}, \quad (22)$$

при некоторых $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Обозначим

$$A = \max_{\substack{1 \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant p_0 \leqslant |\alpha| \leqslant p}} |A_{r,(\alpha)}|. \quad (23)$$

В силу условия 1) теоремы 1 $|\det \Lambda_r| = 1$ и, кроме того, в (13)

$$\left| \prod_{i=1}^{m} B_{(\alpha), |\alpha_i|} (\Lambda_{r_1}^{-1} \ldots \Lambda_{r_i}^{-1}) \right| \leqslant 1. \quad (24)$$

В силу условия 2) теоремы 1 из (14) имеем

$$y_{r_1,\ldots,r_n}(x) = \Lambda_{r_1}^{-1} \ldots \Lambda_{r_n}^{-1} x,$$

откуда

$$\| y_{r_1,\ldots,r_n}(x) \| = \| x \|. \quad (25)$$

Используя теперь (12), (13) и учитывая (22), (23), (24) и (25), получаем для $\varphi(x) \in \Phi$:

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{r_1,\ldots,r_n=1}^{R} \sum_{\substack{(\alpha_1),\ldots,(\alpha_n) \\ 0 \leqslant p_0 \leqslant |\alpha_i| \leqslant p \\ i=1,\ldots,n}} A^n \sum_{\substack{(\alpha) \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|}} |D^{(\alpha)}\varphi(y)|_{y=y_{r_1,\ldots,r_n}(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant A_1^n \max_{\substack{|\alpha| \leqslant np \\ r_1,\ldots,r_n}} |D^{(\alpha)}\varphi(y)|_{y=y_{r_1,\ldots,r_n}(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant A_2^n n^n [l_1(np)]^{n(p-1)} \exp\{-a_1 \|x\|^{p'} l_1(a_2\|x\|)\}. \quad (26)$$

Положим теперь $C_1 = \frac{2}{a_1}$, $C_2 = \frac{1}{a_2}$. Тогда из (26) и (19) получим

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant A_2^n n^n [l_1(np)]^{n(p-1)} \exp\{-2\|x\|^{p'} l(\|x\|)\}. \quad (27)$$

Подставляя оценку (4) при $f(r) = r^{p'} l(r)$ и (27) в (10), получаем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant A_2^n n^n [l_1(np)]^{n(p-1)} \cdot C_1,$$

где

$$C_1 = C \cdot \int_{R^m} \exp\{-\|x\|^{p'} l(\|x\|)\} dx.$$

Поскольку функция $l_1(r)$ удовлетворяет условию (18),

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} [l_1(np)]^{(1-p)} = \infty,$$

откуда в силу (11) следует $F(t) \equiv 0$. Из условия a заключаем, что $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1 и 2 теоремы 1 и, кроме того, $p = 1$.*

Тогда задача $(2)-(2_0)$ имеет при любом $s > 0$ лишь тривиальное решение в классе функций (4), где $f(r) = r^s$.

Доказательство. Фиксируем $s > 0$ и выберем α из условия $0 < \alpha < \frac{1}{s}$; положим $\beta = 1 - \alpha$ и $\Phi = S_\alpha^\beta$. Напомним [8], что пространство S_α^β достаточно богато функциями и для любой $\varphi(x) \in S_\alpha^\beta$ имеют место оценки

$$|D^{(\gamma)}\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varphi \cdot \left(\prod_{i=1}^{m} B_\varphi^{\gamma_i} \gamma_i^{\gamma_i \beta}\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} a_\varphi |x_i|^{\frac{1}{\alpha}}\right\}, \ a_\varphi > 0. \qquad (28)$$

Из (28) вытекает оценка

$$|D^{(\gamma)}\varphi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varphi \cdot B_\varphi^{|\gamma|} \cdot |\gamma|^{\beta|\gamma|} \exp\{-a_1 \|x\|^{\frac{1}{\alpha}}\}, \ a_1 > 0, \qquad (29)$$

которую мы и будем использовать в дальнейшем.

Пользуясь леммой, оценим $L^{*n}\varphi(x), \varphi(x) \in S_\alpha^\beta$. Из (12), (13), (14), используя ортогональность матриц $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_R$ и (29), получаем

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant M_1^n \max_{\substack{r_1, \ldots, r_n \\ |\gamma| \leqslant n}} |D^{(\gamma)}\varphi(y)|_{y = y_{r_1, \ldots, r_n}(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varphi \cdot M_2^n n^{n\beta} \exp\{-a_1 \|x\|^{\frac{1}{\alpha}}\}.$$

Тогда из (10), учитывая (4) и вид $f(r)$, имеем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant C_\varphi \cdot M_2^n n^{n\beta} \int_{R^m} \exp\{\|x\|^s - a_1 x^{\frac{1}{\alpha}}\} dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \cdot M_2^n n^{n\beta}.$$

Поскольку $\beta = 1 - \alpha < 1$, функция $F(t)$ — аналитическая и из (11) заключаем, что $F(t) \equiv 0$, а потому и $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1 и 2 теоремы 1 и, кроме того, $p = 0$.*

Тогда любое непрерывное решение $u(x, t)$ задачи $(2)-(2_0)$ тождественно равно нулю.

...зательство. В рассматриваемом случае в качестве Φ ...совокупность всех финитных непрерывных функций $\varphi(x)$, ...тогда в силу формул (12), (13), ортогональности матриц Λ_r и условия $p=0$, очевидно,

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant M^n \max_{r_1, \ldots, r_n} |\varphi(y_{r_1}, \ldots, {}_{r_n}(x))|. \tag{30}$$

...$u(x, t)$ — решение задачи (2)—(2_0) и $f(r) = \max\limits_{\substack{\|x\|=r \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |u(x, t)|$.

...из (10), используя (14) и (30), получаем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant M^n \int\limits_{R^m} f(\|x\|) \cdot \max_{r_1, \ldots, r_n} |\varphi(y_{r_1}, \ldots, {}_{r_n}(x))| \, dx =$$
$$= M^n \int\limits_{R^m} f(\|x\|)|\varphi(x)| dx = C \cdot M^n.$$

...зательство заканчивается так же, как и в предыдущих слу...

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 1 теоремы 1. Тогда задача Коши (2)—(2_0) имеет лишь тривиальное решение в классе ...ций, удовлетворяющих оценке (4) с $f(r) = Br\ln r$, $r > 0$, где* $B_0^{-1} = [\max\limits_{1 \leqslant r \leqslant R} \|b_r\|]^{-1}$.

Доказательство. Выберем β из условия

$$0 < \beta < \frac{1}{p}(1 - BB_0) \tag{31}$$

...положим $\Phi = S_\alpha^\beta$, где $\alpha = 1 - \beta$.

Из (12) и (13), с учетом (29), имеем

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant M_1^n \max_{\substack{r_1, \ldots, r_n \\ |\gamma| \leqslant np}} |D^{(\gamma)}\varphi(y)|_{y=y_{r_1}, \ldots, r_n(x)}| \leqslant$$
$$\leqslant C_\varphi \cdot M_2^n n^{np\beta} \max_{r_1, \ldots, r_n} \exp\left\{-a_1\|y_{r_1}, \ldots, {}_{r_n}(x)\|^{\frac{1}{\alpha}}\right\}.$$

Тогда из (10), учитывая (4) и вид $f(r)$, находим

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant C_\varphi \cdot M_2^n n^{np\beta} \max_{r_1, \ldots, r_n} \int\limits_{R^m} \exp\{B\|x\|\ln\|x\| -$$
$$- a_1\|y_{r_1}, \ldots, {}_{r_n}(x)\|^{\frac{1}{\alpha}}\} dx \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \quad M_2^n n^{np\beta} \int\limits_0^\infty \exp\left\{B(r + nB_0)\ln(r + nB_0) - a_1 r^{\frac{1}{\alpha}}\right\} r^{m-1} dr.$$

Отсюда нетрудно получить оценку

$$| F^{(n)}(t) | \leqslant C_2 M_3^n n^{n(p\beta+BB_0)}. \tag{32}$$

Из (31), (32) следует, что функция $F(t)$ является аналитической и потому из (11) заключаем, что $F(t) \equiv 0$, откуда и $u(x, t) \equiv 0$.

Отметим, что в случае, когда в уравнении (2) $R = 1$, $\Lambda_1 = E$ — единичная матрица, результат теоремы 1 был получен в [3]. Если же $\Lambda_r = E$, $r = 1, \ldots, R$, результат теоремы 3 совпадает с результатами, полученными в [5] (см. также [7]).

Отметим, что точность результатов, содержащихся в теоремах 1 и 4, подтверждается известными теоремами неединственности, которые относятся к случаю $R = 1$, Λ_1 — единичная матрица [2, 11].

3. Уравнения с неортогональными матрицами Λ_r.

Результаты предыдущего параграфа показывают, что требование ортогональности матриц Λ_r приводит к тем же классам единственности решения задачи (2) — (2_0), что и в случае, когда все эти матрицы единичные.

Отказ от этого требования, а именно допущение «растяжений» пространственного аргумента в правой части уравнения (2), приводит к существенному сужению классов единственности по сравнению с полученными в п. 2.

Теорема 5. *Пусть для уравнения (2) выполнены следующие условия:*

1) *матрицы Λ_r, $r = 1, \ldots, R_1$, $R_1 \leqslant R$ таковы, что*

$$\lambda = \max_{1 \leqslant r \leqslant R_1} \| \Lambda_r^{-1} \| < 1, \tag{32'}$$

где под нормой матрицы понимается ее операторная норма в евклидовом пространстве:

2) *матрицы Λ_r, $r = R_1 + 1, \ldots, R$ являются ортогональными;*

3) *в (3′) $p_0 > 0$.*

Тогда задача (2) — (2_0) имеет лишь тривиальное решение в классе функций (4), если $f(r) = a \ln^2(r+1)$ при

$$a < \frac{p_0 \, | \ln \lambda |}{2 \ln^2 \Lambda},$$

где

$$\Lambda = \max_{1 \leqslant r \leqslant R_1} \| \Lambda_r \|.$$

Доказательство. Выберем в качестве Φ пространство функций $S_{1-\frac{1}{p}}^{\frac{1}{p}}$.

Оценим $L^{*n}\varphi(x)$, $\varphi(x) \in S^{\frac{1}{p}}_{1-\frac{1}{p}}$, используя лемму. В формуле (12) внешнюю сумму (по $r_1, \ldots, r_n$) представим в виде

$$\sum_{r_1, \ldots, r_n = 1}^{R} \psi(\rho) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\rho \in \Omega_k} \psi(\rho),$$

где Ω_k означает множество всех мультииндексов $\rho = (r_1, \ldots, r_n)$, у которых ровно k компонент удовлетворяют условию $1 \leqslant r_j \leqslant R_1$, а остальные $n-k$ компонент — условию $R_1 < r_j \leqslant R$. Оценим $\prod_{i=1}^{n} B_{(\alpha), |\alpha_i|}(\Lambda_{r_1}^{-1} \ldots \Lambda_{r_i}^{-1})$ для случая, когда $\rho = (r_1, \ldots, r_n) \in \Omega_k$. Учитывая структуру множителей вида $B_{(\alpha), k}(\Lambda)$ и условия 1—3 теоремы, получаем

$$\left| \prod_{i=1}^{n} B_{(\alpha), |\alpha_i|}(\Lambda_{r_1}^{-1} \ldots \Lambda_{r_i}^{-1}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^{|\alpha_{n-k+1}| + 2|\alpha_{n-k+2}| + \cdots + k|\alpha_n|} \leqslant \lambda^{\frac{p_0}{2} k(k+1)}. \qquad (33)$$

С учетом (33) и (29) из (12) следует

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{\rho \in \Omega_k} C_\varphi \cdot M_1^n n^n \lambda^{\frac{p_0}{2} k(k+1)} \exp\left\{-a_1 \| y_\rho(x) \|^{\frac{1}{\alpha}}\right\}, \qquad (34)$$

где $y_\rho(x) = y_{r_1, \ldots, r_n}(x)$, $M_1 > 0$ — некоторая постоянная. Из (10), учитывая (34) и (4), имеем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot C_\varphi \cdot M_1^n n^n \sum_{k=0}^{n} \sum_{\rho \in \Omega_k} \lambda^{\frac{p_0}{2} k(k+1)} \int_{R^m} \exp\left\{a \ln^2(1 + \|x\|) - \right.$$

$$\left. - a_1 \| y_\rho(x) \|^{\frac{1}{\alpha}}\right\} dx. \qquad (35)$$

Оценим последний интеграл, учитывая (14):

$$I_\rho = \int_{R^m} \exp\left\{a \ln^2(1 + \|x\|) - a_1 \| y_\rho(x) \|^{\frac{1}{\alpha}}\right\} dx =$$

$$= \int_{R^m} \exp\left\{a \ln^2\left(1 + \left\| \Lambda_{r_n} \ldots \Lambda_{r_1} x + \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{r_n} \ldots \Lambda_{r_{i+1}} b_{r_i} \right\|\right) - \right.$$

$$\left. - a_1 \| x \|^{\frac{1}{\alpha}}\right\} |\det(\Lambda_{r_n} \ldots \Lambda_{r_1})| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_m \cdot \lambda_0^n \int_0^\infty \exp\left\{a \ln^2(1 + \Lambda^k(r + nB_0)) - a_1 r^{\frac{1}{\alpha}}\right\} r^{m-1} dr, \qquad (36)$$

где

$$\lambda_0 = \max_{1\leqslant r\leqslant R} |\det \Lambda_r|, \quad B_0 = \max_{1\leqslant r\leqslant R} \| b_r \|.$$

Поскольку при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\ln^2(1 + \Lambda^k(r + nB_0)) \leqslant [k \ln \Lambda + \ln(1 + r + nB_0)]^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \varepsilon^2) k^2 \ln^2 \Lambda + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \ln^2(1 + r + nB_0) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \varepsilon^2) k^2 \ln^2 \Lambda + 2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \ln^2(nB_0) +$$
$$+ 2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \ln^2(2 + r),$$

из (36) имеем

$$I_\rho \leqslant M_2 \cdot M_3^n \cdot \exp\{a(1 + \varepsilon^2) k^2 \ln^2 \Lambda\}$$

при некоторых $M_2 > 0$, $M_3 > 0$.

Возвращаясь к (35), получаем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant M_4 \cdot M_5^n n^n \sum_{k=0}^{n} \lambda^{\frac{p_0}{2} K^2} \exp\{a(1 + \varepsilon^2) k^2 \ln^2 \Lambda\} \leqslant$$
$$\leqslant M_4 \cdot M_6^n n^n,$$

поскольку, в силу условия на a, ε можно выбрать так, чтобы

$$a(1 + \varepsilon^2) < \frac{p_0 |\ln \lambda|}{2 \ln^2 \Lambda}.$$

Таким образом, $F(t)$ — аналитична и потому $F(t) \equiv 0$, откуда и $u(x, t) \equiv 0$.

Теорема 6. *Пусть матрицы Λ_r, $r = 1, \ldots, R$, в уравнении (2) удовлетворяют условию $\| \Lambda_r^{-1} \| \leqslant 1$. Тогда задача (2) — ($2_0$) имеет лишь тривиальное решение в классе функций (4), если*

$$f(r) = \begin{cases} a \ln r \cdot \ln \ln r, & r \geqslant e, \\ 0, & r \leqslant e \end{cases} \tag{37}$$

при

$$a < \frac{1}{\ln \Lambda}, \quad \Lambda = \max_{1\leqslant r\leqslant R} \| \Lambda_r \|.$$

Доказательство. Положим $\Phi = S_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ будет указано ниже. Условие теоремы гарантирует оценку

$$\left| S_{r_1, \ldots, r_n}^{(\alpha_1), \ldots, (\alpha_n)}(x) \right| \leqslant \sum_{\substack{(\alpha) \\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|}} |D^{(\alpha)} \varphi(y)|_{y = y_{r_1, \ldots, r_n}(x)} |.$$

Отсюда и из (12) заключаем

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant M_1 M_2^n \max_{\substack{|\alpha|\leqslant np \\ r_1, \ldots, r_n}} |D^{(\alpha)}\varphi(y)|_{y=y_{r_1, \ldots, r_n}(x)}|.$$

Используя (29) при $\beta = \varepsilon$, $\alpha = 1 - \varepsilon$, имеем

$$|L^{*n}\varphi(x)| \leqslant C_\varphi \cdot M_1 \cdot M_3^n n^{np\varepsilon} \max_{r_1, \ldots, r_n} \exp\left\{-a_1 \| y_{r_1, \ldots, r_n}(x) \|^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right\}.$$

Подставляя эту оценку в (10) и учитывая (4), получаем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant$$

$$M_4 \cdot M_3^n n^{np\varepsilon} \max_{r_1, \ldots, r_n} \int_{R^m} \exp\left\{f(\|x\|) - a_1 \|y_{r_1, \ldots, r_n}(x)\|^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right\} dx. \qquad (38)$$

Оценим последний интеграл при достаточно больших n, учитывая (37) и монотонность $f(r)$:

$$\int_{R^m} \exp\left\{f(\|x\|) - a_1 \| y_{r_1, \ldots, r_n}(x) \|^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_0^n \cdot C_m \cdot \int_0^\infty \exp\left\{a \ln(\Lambda^n (r + nB_0)) \ln\ln(\Lambda^n(r + nB_0)) - a_1 r^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right\} r^{m-1} dr. \qquad (39)$$

Здесь, как и прежде, $\lambda_0 = \max_r |\det \Lambda_r|$, $B_0 = \max_r \| b_r \|$.

Поскольку

$$\int_0^n \exp\{a \ln(\Lambda^n (r + nB_0)) \ln\ln(\Lambda^n (r + nB_0))\} r^{m-1} dr \leqslant$$

$$\leqslant M_5^n \exp\{an \ln \Lambda \ln n (1 + o(1))\},$$

где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$, а

$$\int_n^\infty \exp\left\{a \ln(\Lambda^n (r + nB_0)) \ln\ln(\Lambda^n (r + nB_0)) - a_1 r^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right\} r^{m-1} dr \leqslant$$

$$\leqslant \int_e^\infty \exp\left\{a \ln(\Lambda^r \cdot r(1 + B_0)) \ln\ln(\Lambda^r \cdot r(1 + B_0)) -\right.$$

$$\left. - a_1 r^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right\} r^{m-1} dr = M_6,$$

то в силу (39) при любом $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно большом $n > n(\varepsilon_1)$ имеем

$$\int_{R^m} \exp\left\{f\left(\|x\| - a_1 \| y_{r_1, \ldots, r_n}(x) \|^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\right)\right\} dx \leqslant$$

$$\leqslant C M_7^n \exp\{(a + \varepsilon_1) n \ln n \cdot \ln \Lambda\}.$$

Возвращаясь к (38), получаем

$$|F^{(n)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot M_4 \cdot M_3^n M_7^n \exp\{(np\varepsilon + \varepsilon_1 \ln \Lambda + a \ln \Lambda) n \ln n\}.$$

Но так как $a \ln \Lambda < 1$, то $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ можно выбрать так, чтобы $np\varepsilon + \varepsilon_1 \ln \Lambda + a \ln \Lambda < 1$, что приводит к аналитичности $F(t)$, откуда, как и прежде, $u(x, t) \equiv 0$. Теорема доказана.

В заключение приведем примеры, подтверждающие точность теорем 5, 6.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + b \frac{\partial u(\alpha x, t)}{\partial x}, \tag{40}$$
$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$a, b \neq 0$ — произвольные комплексные числа, $|\alpha| > 1$. Это уравнение удовлетворяет условиям теоремы 5 и потому задача Коши для него имеет единственное решение в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{c \ln^2(1 + |x|)\} \tag{41}$$

при

$$c < \frac{1}{2 \ln |\alpha|}.$$

В то же время при любом $c = c_0 > \frac{1}{2 \ln |\alpha|}$ уравнение (40) имеет решение $u(x, t) \not\equiv 0$, удовлетворяющее условию $u(x, 0) = 0$ и оценке (41) с $c = c_0$ [6]. Далее рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u(\alpha x, t), \quad \alpha > 1$$
$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В этом случае выполнены условия теоремы 6 и, тем самым в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{a \ln(1 + |x|) \ln[1 + \ln(1 + |x|)]\}$$

задача Коши для рассматриваемого уравнения имеет единственное решение, если $a < \frac{1}{\ln \alpha}$. Однако при любом $a > \frac{1}{\ln \alpha}$ единственность решения задачи Коши в этом классе нарушается [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. УМН, 8, 1953, № 6.

2. Г. Н. Золотарев. Максимальные классы единственности задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными. «Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та», т. 34, 1963.

3. Н. Н. Чаус. О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. УМЖ, 17, 1965, № 1.

4. Л. И. Камынин. Единственность решения системы конечноразностных уравнений. «Изв. АН СССР, серия математическая», 17, 1953.

5. Б. Л. Гуревич. Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем дифференциально-разностных уравнений. ДАН СССР, 108, 1956.

6. В. М. Борок, Я. И. Житомирский. О задаче Коши для линейных уравнений в частных производных с линейно преобразованным аргументом. ДАН СССР, 200, 3, 1972.

7. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

8. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов. Обобщенные функции, вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М., Физматгиз, 1958.

9. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.

10. T. Yamanaka. A. Refinement of the Uniqueness Bound of Solutions of the Cauche Problem. Funkcialy Ekvacioj, 11, 1968, — 75—86.

11. В. М. Борок. Классы единственности решения задачи Коши для разностного аналога уравнений типа Соболева—Гальперина. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во Харьк. ун-та, 1968.

Поступила 20 апреля 1971 г.