ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ

В. С. Азарин

1. Ряд задач теории роста целых функций состоит в нахождении точных оценок одних величин, характеризующих асимптотическое поведение функций, через другие. Приведем примеры таких задач.

Пусть $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ и нормального типа σ_f. Это означает, что

$$\limsup_{r\to\infty} M_f(r)\, r^{-\rho} = \sigma_f < \infty,$$

где

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} \ln |f(z)|.$$

Пусть $n_f(z)$ — распределение нулей целой функции $f(z)$, т. е. целочисленное распределение масс такое, что массы сосредоточены в нулях z_j функции $f(z)$, а масса z_j равна кратности соответствующего нуля.

Обозначим

$$n_f(r, \theta) = \int_{K_{R,\theta}} dn_f$$

число нулей $f(z)$ в секторе

$$K_{R,\theta} = \{ re^{i\varphi} : r \in [0, R];\ e^{i\varphi} \in \theta \},$$

где θ — подмножество единичной окружности S_1. Если $\theta = S_1$, то $K_{R,\theta}$ будем обозначать K_R, а $n_f(R, \theta)$ — $n_f(R)$.

Величины

$$\overline{\Delta_f}(\theta) = \limsup_{r\to\infty} n_f(r, \theta)\, r^{-\rho}; \tag{1.1}$$

$$\underline{\Delta}_f(\theta) = \liminf_{r\to\infty} n_f(r, \theta)\, r^{-\rho}$$

называются верхней и нижней угловыми плотностями распределения нулей $f(z)$. В частности, при $\theta = S_1$ получаем верхнюю $\overline{\Delta}_f$ и нижнюю $\underline{\Delta}_f$ плотности.

Пусть F_ρ — класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho\,(0 < \rho < \infty)$ и нормального типа σ. Задача о нахождении наилучшей постоянной C в неравенстве

$$\sigma_f \leqslant C\overline{\Delta}_f \quad f \in F_\rho$$

решалась еще Валироном [16, ч. 2, § 2].

Пусть $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика целой функции

$$T(r, f) = \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \tag{1.2}$$

и $\overline{T}_f$ — соответствующая ей асимптотическая характеристика

$$\overline{T}_f = \limsup_{r \to \infty} T(r, f)\, r^{-\rho}. \tag{1.3}$$

Задача о нахождении наилучшей постоянной D в неравенстве [17, стр. 42]

$$\sigma_f \leqslant D\overline{T}_f$$

связана с известной гипотезой Пэйли, доказанной Н. В. Говоровым [11] (подробнее см. [3, стр. 565]).

А. А. Гольдберг [2] рассматривал классы целых функций вида

$$F(\delta_1, \delta_2, U) = \{ f : \overline{\Delta}_f(\theta) \leqslant \delta_2(\theta) \wedge \underline{\Delta}_f(\theta) \geqslant \delta_1(\theta),\ \forall \theta \in U \}, \tag{1.4}$$

где δ_1, δ_2 — функции множества (неаддитивные в общем случае), удовлетворяющие условию

$$0 \leqslant \delta_1(\theta) \leqslant \delta_2(\theta),$$

и U — некоторое множество подмножеств S_1.

В этих классах при различных ограничениях на δ_1, δ_2 и U оценивался и н д и к а т о р функции $f(z)$:

$$h_f(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} \ln |f(re^{i\varphi})|\, r^{-\rho}. \tag{1.5}$$

В выражение для оценки входил интеграл по неаддитивной мере. В случае, когда δ_1 и δ_2 были счетно-аддитивные функции множества или U состояло из одного множества $\theta = S_1$, оценки выражались через обычные интегралы и доказывалась точность этих оценок.

Индикаторы оценивались и в других классах целых функций, задаваемых ограничениями на величину

$$\overline{N}_f = \limsup_{R \to \infty} N_f(R) R^{-\rho},$$

где

$$N_f(R) = \int_0^R r^{-1} n_f(r)\, dr,$$

а также на максимальную или минимальную угловые плотности нулей $f(z)$ [4,6]. Теорию Левина — Пфлюгера [1, гл. II, III] можно также рассматривать как точные оценки индикаторов в достаточно узком классе целых функций.

Напомним формулировку основной теоремы этой теории [1, стр. 205] в удобной для нас форме.

Напомним [1, стр. 120], что C_0-множеством называется такое множество кружков $\{K_j\}$

$$K_j = \{z : |z - z_j| < \delta_j\},$$

что выполняется соотношение

$$\limsup_{R \to \infty} \frac{1}{R} \sum_{|z_j| < R} \delta_j = 0. \tag{1.6}$$

Пусть $\underline{h}_f(\varphi)$ — нижний индикатор функции $f(z)$, определяемый соотношением ([5, стр. 89]; [6, стр. 57])

$$\underline{h}_f(\varphi) = \sup_{C_0} \liminf_{\substack{r \to \infty \\ r \in C_0}} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\varphi})|, \tag{1.7}$$

где sup берется по всем C_0-множествам.

Теорема (Левин — Пфлюгер). *Чтобы целая функция $f(z)$ удовлетворяла условию*

$$\underline{h}_f(\varphi) = h_f(\varphi) \tag{1.8}$$

для всех φ, необходимо и достаточно, чтобы для какого-нибудь α и всех дуг $\theta_{\varphi,\alpha}$ вида

$$\theta_{\varphi\alpha} = \{e^{i\psi} : \psi \in (\alpha, \varphi)\}, \quad 0 \leqslant \varphi - \alpha \leqslant 2\pi, \tag{1.9}$$

за исключением, быть может, счетного множества, выполнялось условие

$$\overline{\Delta}_f(\theta_{\varphi,\alpha}) = \underline{\Delta}_f(\theta_{\varphi,\alpha}).$$

Нахождение точной оценки сверху, например, для индикатора при фиксированном φ можно рассматривать как некоторую экстремальную задачу нахождения $\sup h_f(\varphi)$ в классе $F(\delta_1, \delta_2, U)$.

Характерной с нашей точки зрения особенностью такой задачи является то, что значение функционала $h_f(\varphi)$ на функции f и принадлежность f классу $F(\delta_1, \delta_2, U)$ определяются асимптотическими свойствами $f(z)$. Это и порождает специфику такой экстремальной задачи: функционал не является непрерывным ни даже полунепрерывным, множество не является замкнутым в стандартной топологии. Поэтому в каждой из таких задач индивидуально не только вычисление соответствующего экстремума, но и доказательство того, что он достигается на некоторой функции из класса (точность оценки).

В данной работе предлагается схема, где нахождение экстремума в исходной задаче сводится к вспомогательной задаче — вычислению максимума полунепрерывного сверху (в соответствующей топологии) функционала на замкнутом множестве. При этом достижимость экстремума во вспомогательной задаче (а это гарантируется теоремой Вейерштрасса о максимуме полунепрерывной сверху функции на замкнутом множестве) влечет существование экстремальной функции в исходной задаче.

Подобный подход и раньше служил средством для нахождения вида точных оценок [2, 4]. В явном виде он появился впервые в работе А. А. Кондратюка [4]. Тем не менее для доказательства точности каждой оценки необходимо было строить отдельный пример. В нашей работе эта процедура «унифицируется» по существу с помощью конструкции леммы 3,2, уже использованной в [7].

Отметим еще одну характерную, по нашему мнению, особенность экстремальных задач рассматриваемого типа — существование одной экстремальной функции для большого набора функционалов. Например, существует целая функция $f \in F(\delta_1, \delta_2, U)$, на которой достигается $\sup h_f(\varphi)$ для всех φ одновременно. Эта особенность также улавливается общей схемой (теорема 3, п. 2).

Теоремы, аналогичные теореме о вполне регулярном росте, получаются как предельный случай экстремальной задачи (теорема 2, п. 2).

Основные понятия, применяемые в этой работе, подробно обсуждались в [7], поэтому мы ограничиваемся лишь формальным изложением общих понятий в п. 2.

В качестве примеров приложения теорем 1, 3 п. 2 получены оценки индикаторов целых функций в классах «весьма похожих» на классы $F(\delta_1, \delta_2, U)$. В отличие от гольдберговских наши оценки всегда точны (если соответствующий класс непуст) и экстремальное значение индикатора совпадает с оценками А. А. Гольдберга в случае, когда последние точны и выражаются через обычные интегралы (теоремы 7,8, примеры 6.1, 6.2 из п. 6). Некоторые характерные свойства экстремальных индикаторов также получаются из общих соображений (теорема 4, п. 2, лемма 6.1, п. 6).

В работе [7] была доказана теорема (основная теорема § 7), дающая достаточные условия для того, чтобы регулярность роста одних характеристик не влекла регулярности роста других в классе

F_ρ целых функций порядка ρ. Теорема 2, п. 2 нашей работы отвечает на вопрос, когда набор характеристик роста «достаточно полон» для того, чтобы из регулярности роста этих характеристик следовала регулярность роста «любой другой» характеристики, т. е. вполне регулярность роста функции.

С помощью теоремы 2 вопрос о «достаточности» набора характеристик роста сводится к вопросу о единственности решения некоторых уравнений в специальном классе мер, что естественно приводит к возможности применения техники обобщенных функций (теорема 6′, п. 5).

В качестве примеров применения теоремы 2 в п. 5 приведено несколько критериев вполне регулярности роста функции (теоремы 6, 6′, п. 5). В п. 7 обсуждается задача Пэйли с точки зрения общих теорем п. 2.

I. Асимптотическое поведение функционалов на специальных классах мер

2. Определения и формулировки теорем. Рассмотрим линейное пространство вещественных функций $g(z)$, определенных и непрерывных в открытой плоскости с выколотым началом координат $R^2\setminus 0$ и финитных в $R^2\setminus 0$. Замкнем его по норме

$$\|g\| = \sup_{z \in R^2\setminus 0} \frac{|g(z)|}{W(|z|)},$$

где

$$W(t) = \begin{cases} t^{-p_1} & \text{для } 0 < t \leqslant 1 \\ t^{-p_2} & \text{для } t \geqslant 1 \end{cases} \qquad p_1,\ p_2 > 0.$$

Обозначим полученное пространство $C(p_1, p_2)$. Пусть M^{p_1, p_2} — линейное множество мер (не обязательно неотрицательных) в $R^2\setminus 0$ и таких, что для $\mu \in M^{p_1, p_2}$

$$\|\mu\|_{p_1, p_2} \overset{\text{def}}{=} \int_{R^2\setminus 0} W(|z|)\, d|\mu| < \infty,$$

где $|\mu|$ — вариация μ.

Оно образует линейное векторное пространство.

Введем топологию (слабейшую) в M^{p_1, p_2} с помощью системы преднорм [12, стр. 30].

$$\Pi_f(\mu) = \left| \int_{R^2\setminus 0} f d\mu \right|, \quad f \in C(p_1, p_2).$$

Сходимость последовательности мер $\mu_n \to \mu$ означает в этой топологии сходимость интегралов

$$\int\limits_{R^2 \setminus 0} f d\mu_n \to \int\limits_{R^2 \setminus 0} f d\mu$$

для любой функции $f \in C(p_1, p_2)$.

Пусть $\rho > 0$ и p_1, p_2 выбраны так, что $p_1 < \rho < p_2$. Обозначим $(\cdot)_t$ преобразование M^{p_1, p_2} в себя по формуле

$$\mu_t(G) = \mu(tG) t^{-\rho} \tag{2.1}$$

для любого множества G борелевского кольца $\sigma(R^2 \setminus 0)$. Будем говорить, что неотрицательная мера μ (распределение масс) принадлежит классу $M_{\rho, \Delta}$, если для нее выполняется соотношение

$$\|\mu\|_\rho \overset{\text{def}}{=} \sup_{t \in (0, \infty)} \mu_t(K_1) \leqslant \Delta, \tag{2.2}$$

где K_1 — единичный круг с центром в нуле.

Класс $M_{\rho, \Delta}$ инвариантен относительно преобразования $(\cdot)_t$ и компактен во введенной топологии ([7] леммы 3.1, 3.2]).

Пусть $T[\mu]$ — непрерывный функционал на $M_{\rho, \Delta}$.

Обозначим

$$\bar{\tau}[\mu] \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \sup T[\mu_t]; \; \underline{\tau}[\mu] \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} \inf T[\mu_t] \tag{2.3}$$

его асимптотические характеристики.

Пусть $T^\varepsilon[\mu]$ — невозрастающее при $\varepsilon \downarrow 0$ семейство непрерывных функционалов.

Предел его

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} T^\varepsilon[\mu] = T[\mu]$$

является полунепрерывным сверху функционалом [8, стр. 192].

Для полунепрерывного функционала $T[\mu]$ асимптотические характеристики введем по формуле:

$$\bar{\tau}[\mu] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \bar{\tau}^\varepsilon[\mu]; \quad \underline{\tau}[\mu] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \underline{\tau}^\varepsilon[\mu]. \tag{2.4}$$

Здесь $\bar{\tau}^\varepsilon$, $\underline{\tau}^\varepsilon$ — характеристики непрерывных функционалов T^ε, полученные по формуле (2.3).

Введем еще глобальные характеристики роста непрерывных $T^\varepsilon[\mu]$ и полунепрерывных сверху $T[\mu]$ функционалов

$$\overline{T}^\varepsilon[\mu] = \sup_{t \in (0, \infty)} T^\varepsilon[\mu_t]; \quad \underline{T}^\varepsilon[\mu] = \inf_{t \in (0, \infty)} T^\varepsilon[\mu_t];$$

$$\overline{T}[\mu] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{T}^\varepsilon[\mu]; \quad \underline{T}[\mu] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \underline{T}^\varepsilon[\mu]. \tag{2.5}$$

Пусть $T[\alpha, \mu]$, $\alpha \in A$ — семейство полунепрерывных сверху вогнутых по μ функционалов таких, что T^{ε} тоже вогнуты. Это означает, что для любого из них выполняется соотношение

$$T[a_1\mu_1 + a_2\mu_2] \geqslant a_1 T[\mu_1] + a_2 T[\mu_2] \qquad (2.6)$$
$$a_1, a_2 > 0 \quad a_1 + a_2 = 1$$

при всех $\mu_1, \mu_2 \in M_{\rho, \Delta}$.

Обозначим через $\varkappa$ множество мер вида

$$\varkappa = \{ \mu : \bigwedge_{\alpha \in A} \underline{\tau}[\alpha, \mu] \geqslant 0 \}, \qquad (2.7)$$

а через K множество вида

$$K = \{ \mu : \bigwedge_{\alpha \in A} \underline{T}[\alpha, \mu] \geqslant 0 \}. \qquad (2.8)$$

Отметим, что множество K замкнуто вследствие полунепрерывности сверху функционалов $\underline{T}$ [8, стр. 191] и, следовательно, на нем любой полунепрерывный сверху функционал достигает верхней грани [8, стр. 191].

В дальнейшем будем всегда предполагать, что множество K компактно. Для этого достаточно, чтобы $K \subset M_{\rho, \Delta}$ для какого-нибудь Δ.

Отметим, что $\varkappa$ может и не быть ни компактным, ни замкнутым. Если среди функционалов $T[\mu]$, определяющих множества $\varkappa$ и K, есть функционал вида

$$T[\mu] = \Delta - \int_{|z|<1} d\mu,$$

то, как можно показать, $K \subset M_{\rho, \Delta}$.

Теорема 1. *Для любого функционала $T[\mu]$ и множества $\varkappa$*

$$\sup_{\varkappa} \tau[\mu] = \max_{K} T[\mu].$$

Если $\varkappa$ непусто, то K также непусто.

Теорема 2. *Если K состоит из одной точки μ_0, то*

$$\bar{\tau}[\mu] = \tau[\mu] = T[\mu_0] \; \forall \mu \in \varkappa.$$

Теорема 3. *Для любого не более чем счетного множества функционалов $T[\beta, \mu]$, $\beta \in B$ существует мера μ_{max} такая, что*

$$\sup \bar{\tau}[\beta, \mu] = \bar{\tau}[\beta, \mu_{max}] = \max_{K} T[\beta, \mu].$$

Иначе говоря, sup слева достигается на одной и той же мере для всего семейства функционалов. Отметим, что sup справа достигается на разных μ при разных β.

Пусть $T[\theta, \mu]$, $\theta \in \Theta$ — семейство вогнутых функционалов. Обозначим

$$\varkappa_1 = \{ \mu : \underline{\tau}[\theta, \mu] \geqslant \delta_1(\theta) \forall \theta \in \Theta\},$$

$$\varkappa_2 = \{ \mu : \underline{\tau}[\theta, \mu] \geqslant \delta_2(\theta) \forall \theta \in \Theta\},$$

$$\varkappa = \{ \mu : \underline{\tau}[\theta, \mu] \geqslant a_1\delta_1(\theta) + a_2\delta_2(\theta) \forall \theta \in \Theta \},$$

где δ_1, δ_2 — функции индекса θ, a_1, $a_2 > 0$, $a_1 + a_2 = 1$.

Пусть $T[\mu]$ — линейный функционал.

Обозначим

$$\sup_{\varkappa} \bar{\tau}[\mu] = \bar{\tau}[\varkappa]; \quad \sup_{\varkappa_j} \bar{\tau}[\mu] = \bar{\tau}[\varkappa_j] \quad j = 1,2.$$

Теорема 4. *Если* $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ *непусты, то* $\varkappa$ *непусто и*

$$\bar{\tau}[\varkappa] \geqslant a_1 \bar{\tau}[\varkappa_1] + a_2\bar{\tau}[\varkappa_2].$$

Теорема 2, как будет видно из п. 5, является аналогом теоремы Левина — Пфлюгера, теоремы 1 и 3, как показано в п. 6, 7 — аналогами оценок индикаторов и типа целой функции в различных классах целых функций.

3. Доказательство теорем 1—4. Пусть $\mu \in \varkappa$. Можно показать, что множество вида $\{\mu_t\}$, $t \in (0, \infty)$ компактно. Обозначим K' совокупность предельных мер вида

$$\mu' = \lim_{t_j \to \infty} \mu_{t_j} \tag{3.1}$$

для $\mu \in \varkappa$.

Лемма 3.1. Имеет место соотношение $K' = K$.

Доказательство. Покажем, что

$$K' \subset K. \tag{3.2}$$

Пусть

$$\mu' = \lim_{t_j \to \infty} \mu_{t_j}.$$

Для любого ε и любого t имеем

$$T^{\varepsilon}[\mu'_t] = \lim_{t_j \to \infty} T^{\varepsilon}[(\mu_{t_j})_t] = \lim_{t_j \to \infty} T^{\varepsilon}[\mu_{t_j t}] \geqslant \underline{\tau}^{\varepsilon}[\mu] \geqslant \tau[\mu] \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Из (3.3) и определения $\underline{T}$ следует, что

$$\underline{T}[\mu'] \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Применив это соотношение к любому из функционалов $\underline{T}[\alpha, \mu]$, получим (3.2).

Для доказательства соотношения $K' \supset K$ нам понадобится следующая

Лемма 3.2. [7, § 5]. *Пусть* μ^{α}, $\mu \in A$ — *счетное множество мер из* $M_{\rho, \Delta}$.

Существует такая мера μ, что для любого непрерывного функционала T верны неравенства

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} T[\mu^\alpha] \leqslant \tau[\mu] \leqslant \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \sup_{t,t',a} T[a\mu_t^\alpha + (1-a)\mu_{t'}^\alpha] \tag{3.5}$$

$$\underline{\lim_{\alpha\to\infty}} T[\mu^\alpha] \leqslant \underline{\tau}[\mu] \geqslant \underline{\lim_{\alpha\to\infty}} \inf_{t,t',a} T[a\mu_t^\alpha + (1-a)\mu_{t'}^\alpha] \tag{3.6}$$

для $t,\ t' \in (0,\ \infty)$, $a \in [0;\ 1]$. При этом, если какая-нибудь подпоследовательность μ^α сходится к мере $\tilde\mu$, существует последовательность $t_j \to \infty$ такая, что

$$\mu_{t_j} \to \tilde\mu. \tag{3.7}$$

Пусть теперь $\tilde\mu \in K$. Рассмотрим последовательность мер вида

$$\mu^\alpha = \tilde\mu$$

и построим по лемме 3.2 меру μ. Тогда находим, используя вогнутость T^ε:

$$\underline{\tau}^\varepsilon[\mu] \geqslant a \inf_t T^\varepsilon[\mu_t] + (1-a)\inf_{t'} T^\varepsilon[\tilde\mu_{t'}].$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ получаем

$$\underline{\tau}[\mu] \geqslant a\underline{T}[\tilde\mu] + (1-a)\ \underline{T}[\tilde\mu] \geqslant 0,$$

т. е. $\mu \in \varkappa$.

Из соотношения (3.7) имеем

$$\lim_{t_j\to\infty} \mu_{t_j} = \tilde\mu,$$

т. е. $\tilde\mu \in K'$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Ввиду леммы 3.1 достаточно доказать соотношение

$$\sup_\varkappa \bar\tau = \max_{K'} T. \tag{3.8}$$

Покажем, что

$$\sup_\varkappa \bar\tau \leqslant \max_{K'} T \tag{3.9}$$

По определению $\bar\tau$ и sup найдется такое μ и такая последовательность t_j, что для произвольно малых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{j\to\infty} T^\varepsilon[\mu_{t_j}] > \sup_\varkappa \bar\tau[\mu] - \eta.$$

Из компактности $\{\mu_t\}$ следует, что найдется сходящаяся подпоследовательность

$$\mu' = \lim \mu_{t_{j_n}}. \tag{3.10}$$

Из непрерывности T^ε получаем

$$T^\varepsilon[\mu'] > \sup_{\varkappa} \bar{\tau}[\mu] - \eta,$$

откуда

$$T[\mu'] \geqslant \sup_{\varkappa} \bar{\tau}[\mu] - \eta. \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует (3.10).

Кроме того, пусть $\mu_{max} \in K'$ таково, что

$$T[\mu_{max}] = \max_{K'} T[\mu],$$

а μ связано с μ_{max} соотношением (3.1).

Тогда

$$T[\mu_{max}] \leqslant T^\varepsilon[\mu_{max}] = \lim_{j\to\infty} T^\varepsilon[\mu_{t_j}] \leqslant \bar{\tau}^\varepsilon[\mu]$$

и при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем неравенство

$$\max_{K'} T[\mu] \leqslant \sup_{\varkappa} \bar{\tau}[\mu]. \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.12) следует утверждение теоремы. Если $\varkappa$ непусто, то непусто K' и, следовательно, K. Аналогично доказывается

Теорема 5. *Имеет место соотношение*

$$\sup_{\varkappa} \underline{\tau}[\mu] = \max_{K} \underline{T}[\mu], \tag{3.13}$$

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Применяя теорему 1 к непрерывному функционалу $-T^\varepsilon[\mu]$, получаем

$$\inf_{\varkappa} \underline{\tau}^\varepsilon[\mu] = \min_{K} T^\varepsilon[\mu]. \tag{3.14}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть K состоит из одной точки μ_0. Тогда из (3.14) и теоремы 1

$$\inf_{\varkappa} \underline{\tau}^\varepsilon[\mu] = T^\varepsilon[\mu_0]; \quad \sup_{\varkappa} \tau^\varepsilon[\mu] = T^\varepsilon[\mu_0].$$

Для любой меры $\mu \in \varkappa$ имеем

$$T^\varepsilon[\mu_0] \leqslant \underline{\tau}^\varepsilon[\mu] \leqslant \bar{\tau}^\varepsilon[\mu] \leqslant T^\varepsilon[\mu_0].$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $\sup_{\varkappa} \bar{\tau}[\beta, \mu] = \bar{\tau}_\beta$. Пусть μ^β доставляет максимум на K функционалу $T[\beta, \mu]$. Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ имеем, используя теорему 1:

$$T^\varepsilon[\beta, \mu^\beta] \geqslant \sup_{\varkappa} \bar{\tau}[\beta, \mu]. \tag{3.15}$$

Рассмотрим последовательность мер μ^i вида $\mu^1, \mu^1, \mu^2, \mu^1, \mu^2, \mu^3 \ldots$ и построим с их помощью меру $\mu_{\max}$ по лемме 3.2. Тогда имеем по (3.5) для любого ε

$$\bar{\tau}^{\varepsilon}[\beta, \mu_{\max}] \geqslant \lim_{i_\beta \to \infty} T^{\varepsilon}[\beta, \mu_{i_\beta}] = T^{\varepsilon}[\beta, \mu^{\beta}],$$

где подпоследовательность i_β выбрана так, чтобы в ней участвовала только мера μ^β.

При $\varepsilon \downarrow 0$ получаем

$$\bar{\tau}[\beta, \mu_{\max}] \geqslant T[\beta, \mu^{\beta}].$$

Обратное неравенство верно для всех $\mu \in \varkappa$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Для каждого из $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa$ существует по теореме 1 меры $\mu_1 \in K_1$, $\mu_2 \in K_2$, $\mu \in K$ (K_1, K_2, K множества вида (2.8), соответствующие $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa$) такие, что

$$T[\mu_1] = \bar{\tau}[\varkappa_1]; \quad T[\mu_2] = \bar{\tau}[\varkappa_2]; \quad T[\mu] = \bar{\tau}[\varkappa].$$

Из вогнутости функционалов, образующих множество K, следует

$$a_1\mu_1 + a_2\mu_2 \in K. \tag{3.16}$$

Используя (3.16) и линейность T, получаем

$$a_1\bar{\tau}[\varkappa_1] + a_2\bar{\tau}[\varkappa_2] = a_1 T[\mu_1] + a_2 T[\mu_2] =$$
$$= T[a_1\mu_1 + a_2\mu_2] \leqslant T[\mu] = \bar{\tau}[\varkappa].$$

Теорема доказана.

II. Приложения

4. Обозначения и вспомогательные предложения. Рассмотрим класс $U_{\rho,\sigma}$ субгармонических в плоскости функций нецелого порядка ρ и нормального типа σ. Это обозначает, что для $u \in U_{\rho,\sigma}$ имеет место соотношение

$$0 < \limsup_{r \to \infty} r^{-\rho} M_u(r) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_u \leqslant \sigma < \infty, \tag{4.1}$$

где

$$M_u(r) = \max_{\varphi \in [0,\, 2\pi)} u(re^{i\varphi}). \tag{4.2}$$

Для $u \in U_{\rho,\sigma}$, не имеющих масс в окрестности нуля, имеет место представление ([13] или [14, стр. 130])

$$u(z) = \int_{R_2} H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right) d\mu_u(\zeta) + G_q(z), \tag{4.3}$$

где $H(u, p)$ — логарифм первичного множителя Вейерштрасса рода p;

$$H(u, p) = \ln|1-u| + \operatorname{Re}\left\{\sum_{1}^{p} \frac{u^k}{k}\right\}, \qquad (4.4)$$

$G_q(z)$ — гармонический полином степени $q < \rho$;

μ_u — распределение масс в плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

При этом μ_u имеет конечную верхнюю плотность, т. е.

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\rho}\mu(K_t) = \overline{\Delta}_u \leqslant \Delta < \infty, \qquad (4.5)$$

где $\mu_u(K_t)$ — масса круга;

$$K_t = \{\zeta : |\zeta| < t\},$$

а Δ зависит лишь от σ.

В вопросах асимптотического поведения $u(z)$ при $z \to \infty$ функции $G_q(z)$ не играет роли, так что достаточно рассматривать канонический интеграл

$$u(z, \mu) = \int_{\boldsymbol{R}^2} H\left(\frac{z}{\zeta}, p\right) d\mu(\zeta)$$

и считать, что $u(z, \mu)$ однозначно определяется распределением масс μ (индекс u будем опускать, если это не вызывает недоразумений).

Обозначим

$$H^\varepsilon(z, \zeta, p) = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{|\lambda - z| < \varepsilon} H\left(\frac{\lambda}{\xi}, p\right) d\omega_\lambda \qquad (4.5')$$

($d\omega_\lambda$) — элемент площади).

Рассмотрим функцию

$$u^\varepsilon(z, \mu) = \int_{\boldsymbol{R}^2} H^\varepsilon(z, \zeta, p)\, d\mu; \qquad (4.6)$$

она также субгармоническая и дважды непрерывно дифференцируема.

Обозначим

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon[\varphi, \mu] = u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu), \qquad (4.7)$$

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon[\max, \mu] = \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu), \qquad (4.8)$$

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon[+, \varphi, \mu] = (u^\varepsilon)^+(e^{i\varphi}, \mu) = \max\{u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu), 0\}, \qquad (4.9)$$

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon[+, \mu] = \int_0^{2\pi} (u^\varepsilon)^+(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi, \qquad (4.10)$$

$$\boldsymbol{T}^\varepsilon\left[\int, \mu\right] = \int_0^{2\pi} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi. \qquad (4.11)$$

Эти функционалы, как было показано в работе [7, § 4], являются аналогами классических характеристик для субгармонических и целых функций и непрерывны по μ в топологии M_{p_1, p_2} (см. п. 2), где $p < p_1 < \rho < p_2 < p + 1$. Отметим, что функционалы (4.7), (4.11) линейны, а остальные выпуклы. При $\varepsilon \downarrow 0$ эти функционалы монотонно сходятся к полунепрерывным сверху функционалам (а (4.11) — к непрерывному):

$$T[\varphi, \mu] = u(e^{i\varphi}, \mu); \quad T[\max, \mu] = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} u(e^{i\varphi}, \mu);$$

$$T[+, \mu] = \int_0^{2\pi} u^+(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi; \quad T\left[\int, \mu\right] = \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi. \tag{4.12}$$

Там же было показано, что асимптотические характеристики этих функционалов, вычисленные по формулам (2.3), (2.4), совпадают с классическими характеристиками роста целых и субгармонических функций [7, § 6, 8]:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}[\varphi, \mu] &= \limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} u(re^{i\varphi}, \mu) = h_u(\varphi); \\ \bar{\tau}[\max, \mu] &= \limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} M_u(r) = \overline{M}_u; \\ \bar{\tau}[+, \mu] &= \limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} T_u(r) = \overline{T}_u, \end{aligned} \tag{4.12'}$$

где

$$M_u(r) = \max_{\varphi \in [0, 2\pi)} u(re^{i\varphi}); \quad T_u(r) = \int_0^{2\pi} u^+(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Полагая для целой функции $f(z)$

$$u(z) = \ln|f(z)|,$$

получаем соответственно индикатор и асимптотические характеристики для роста $M_f(r)$ — максимума $\ln|f(z)|$ и неванлинновской функции $T(r, f)$. Верно также соотношение

$$\bar{\tau}\left[\int, \mu\right] = \limsup_{r\to\infty} r^{-\rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi. \tag{4.12''}$$

Аналогичные соотношения имеют место для нижних пределов

$$\underline{\tau}[\max, \mu] = \liminf_{r\to\infty} r^{-\rho} M_u(r);$$

$$\underline{\tau}[+, \mu] = \liminf_{r\to\infty} r^{-\rho} T_u(r).$$

Для $\underline{\tau}[\varphi, \mu]$ можно утверждать только*

$$\underline{\tau}[\varphi, \mu] \geq \underline{h}_u(\varphi), \tag{4.13}$$

где $\underline{h}_u(\varphi)$ — нижний индикатор, определенный равенством:

$$\underline{h}_u(\varphi) = \sup_{C_0} \liminf_{\substack{r \to \infty \\ re^{i\varphi} \notin C_0}} r^{-\rho} u(re^{i\varphi}) \tag{4.14}$$

(sup берется по C_0-множествам).

В формулировках наших теорем будут встречаться также характеристики, порождаемые функционалами

$$T^\varepsilon[a, \varphi, \mu] = (1-a)\, u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu) + a \int_0^1 \lambda^{-1} u(\lambda e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi. \tag{4.15}$$

$$a \in [0, 1]$$

Отметим, что функционал

$$\int_0^1 \lambda^{-1} u(\lambda e^{i\varphi}, \mu)\, d\varphi$$

непрерывен по μ.

Асимптотические характеристики (2.4) для этих функционалов являются некоторым обобщением индикаторов.

Рассмотрим теперь характеристики асимптотического поведения распределения масс субгармонической функции (или распределения нулей целой функции).

Пусть $\theta \subset S_1$ — некоторое множество; $\mathring{\theta}$ — его открытая внутренность, т. е. множество внутренних точек; $\overline{\theta}$ — замыкание.

Обозначим $\chi_{\overline{\theta}}$ характеристическую функцию сектора

$$K_{\overline{\theta}} = \{re^{i\varphi} : r \in [0, 1],\ e^{i\varphi} \in \mathring{\theta}\},$$

и через $\chi_{\mathring{\theta}}$ — характеристическую функцию сектора

$$K_{\mathring{\theta}} = \{re^{i\varphi} : r \in (0, 1),\ e^{i\varphi} \in \theta\}$$

и введем в рассмотрение функционалы

$$N[\theta, \mu] = \int_{R^2} \chi_{\overline{\theta}}(z)\, d\mu; \quad L[\theta, \mu] = \int_{R^2} (-\chi_{\mathring{\theta}})\, d\mu.$$

Пусть $\chi^\varepsilon_{\overline{\theta}}$ — монотонно убывающая последовательность непрерывных функций, сходящаяся к $\chi_{\overline{\theta}}$, а $(-\chi_{\mathring{\theta}})^\varepsilon$ — такая же последо-

* В настоящее время автор показал, что в (4.13) имеет место равенство.

вательность, сходящаяся к $(-\chi_{\overset{\circ}{\theta}})$. Тогда соответствующее семейство непрерывных функционалов

$$N^{\varepsilon}[\theta, \mu] = \int_{R^2} \chi_{\theta}^{\varepsilon}\, d\mu, \tag{4.16}$$

$$L^{\varepsilon}[\theta, \mu] = \int_{R^2} (-\chi_{\overset{\circ}{\theta}})\, d\mu, \tag{4.17}$$

как можно показать, сходится к N и L.

Асимптотические характеристики $\underline{\nu}[\theta, \mu]$ и $\underline{\lambda}[\theta, \mu]$, построенные по N^{ε} и L^{ε} с помощью (2.4), удовлетворяют неравенствам

$$\underline{\nu}[\theta, \mu] \geqslant \underline{\Delta}_u(\theta), \tag{4.18}$$

$$\underline{\lambda}[\theta, \mu] \leqslant \overline{\Delta}_u(\theta), \tag{4.19}$$

где $\overline{\Delta}(\theta)$, $\underline{\Delta}(\theta)$ определены формулами, аналогичными (1.1) для любой субгармонической функции. При этом довольно часто в этих соотношениях достигается равенство. Отметим ряд случаев, когда имеет место равенство.

Лемма 4.1. *Если существует последовательность открытых множеств* $\theta_n \supset \partial\theta$ такая, что

$$\underline{\lambda}[\theta_n, \mu] \to 0 \quad (n \to \infty),$$

то

$$\underline{\nu}[\theta, \mu] = \underline{\Delta}_u(\theta), \tag{4.20}$$

$$-\underline{\lambda}[\theta, \mu] = \overline{\Delta}_u(\theta). \tag{4.21}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 8.1 из [7].

Лемма 4.2. *Пусть* $\theta_{\varphi, \alpha}$ *определено соотношением* (1.9). *Тогда для каждого фиксированного* μ *множество* Φ_0 *тех* φ, α, *где не выполняется хотя бы одно из равенств*

$$\underline{\lambda}[\theta_{\varphi, \alpha}, \mu] = -\overline{\Delta}_u(\theta_{\varphi, \alpha}); \quad \underline{\nu}[\theta_{\varphi, \alpha}, \mu] = \underline{\Delta}_u(\theta_{\varphi, \alpha}), \tag{4.22}$$

не более чем счетно.

Доказательство этого утверждения по существу проведено в [7, § 8, лемма 8.2].

Лемма 4.3. *Если* $\theta = S_1$, *то выполняются соотношения* (4.20), (4.21). Лемма 4.3 доказана в работе [7, лемма 8.1].

В дальнейших формулировках будут встречаться также характеристики, порождаемые функционалами

$$N^{\varepsilon}[b, \theta, \mu] = (1-b)\int_{R^2} \chi_{\theta}^{\varepsilon}\, d\mu + b\int_{R^2} \chi_{\theta}^{\varepsilon} \ln\frac{1}{|z|}\, d\mu, \tag{4.23}$$

$$L^{\varepsilon}[b, \theta, \mu] = (1-b)\int_{R^2} (-\chi_{\overset{\circ}{\theta}})^{\varepsilon}\, d\mu + b\int_{R^2} (-\chi_{\overset{\circ}{\theta}})^{\varepsilon} \ln\frac{1}{|z|}\, d\mu. \tag{4.24}$$

Соответствующие асимптотические характеристики $\underline{\nu}[b, \theta, \mu]$, $\overline{\lambda}[b, \theta, \mu]$ совпадают с $\underline{\nu}[\theta, \mu]$, $\overline{\lambda}[\theta, \mu]$ при $b=0$, а при $b=1$ являются аналогом асимптотической характеристики для известной в теории целых и мероморфных функций величины

$$N(r) = \int_0^r t^{-1} n(t)\, dt,$$

где $n(t)$ — число нулей функции в круге радиуса t с центром в нуле.

В частности, если $\theta = S_1$, $b=1$, то

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} N^{\varepsilon}[1, S_1, \mu] = t^{-\rho} \int_0^t \mu(x) x^{-1}\, dx,$$

где $\mu(x)$ — масса круга радиуса x с центром в нуле, а например:

$$\overline{\nu}[1, S_1, \mu_t] = \limsup_{r \to \infty} r^{-\rho} \int_0^r t^{-1} \mu(t)\, dt.$$

В заключение сформулируем несколько известных предложений относительно субгармонических функций.

Лемма 4.4. *Пусть $u(z, \mu) \in U_{\rho, \sigma}$. Найдется такая целая функция $f(z)$, что для любой асимптотической характеристики $\overline{\tau}$ или $\underline{\tau}$ выполняются соотношения*

$$\overline{\tau}[\mu_u] = \overline{\tau}[\mu_{u_1}]; \quad \underline{\tau}[\mu_u] = \underline{\tau}[\mu_{u_1}],$$

где $u_1 = \ln |f(z)|$.

Эта теорема по существу доказана в [7, § 9, теорема 6 и теорема A).

Лемма 4.5. *Пусть $u(z, \mu) \in U_{\rho, \sigma}$. Тогда функции*

$$H_u(\varphi) = \sup_{t \in (0, \infty)} u(e^{i\varphi}, \mu_t),$$

$$h_u(\varphi) = \limsup_{t \to \infty} u(e^{i\varphi}, \mu_t)$$

являются ρ-тригонометрически-выпуклыми функциями[1] *и, в частности, непрерывны по φ.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$H(z) = \sup_{t \in (0, \infty)} u(z, \mu_t); \quad h(z) = \limsup_{t \to \infty} u(z, \mu_t).$$

[1] Их можно определить как обобщенное решение уравнения $h'' + \rho^2 h = d\Delta$, где справа стоит неотрицательная мера на $[0, 2\pi)$. О свойствах ρ-тригонометрически-выпуклых функций см. [1, стр. 75—85].

По теореме Картана [9, стр. 85] эти функции отличаются от субгармонических на множестве не более чем нулевой емкости. Из определения $H(z)$ и $h(z)$ видно, что

$$H(z) = H_u(\varphi)\,|z|^\rho;\ h(z) = h_u(\varphi)\,|z|^\rho.$$

Поэтому изменение значения этих функций в одной точке влечет изменение на целом луче, который имеет ненулевую емкость. Значит, $H(z)$ и $h(z)$ субгармонические. Тогда можно показать, что $H_u(\varphi)$ и $h_u(\varphi)$ тригонометрически-выпуклые (впрочем, для $h_u(\varphi)$ это известно).

Замечание. Аналогично доказывается непрерывность по φ величины $\max\limits_{\mu \in K} u(e^{i\varphi}, \mu)$, где K — класс мер вида (2.8), а $u(z, \mu)$ — канонический интеграл.

5. Вполне регулярный рост и правильное распределение масс. Рассмотрим вопросы, связанные с теорией вполне регулярного роста, докажем две теоремы, которые являются аналогами теоремы Левина—Пфлюгера.

Предварительно докажем простую лемму, которая нам понадобится в дальнейшем.

Лемма 5.1. *Пусть $f(t)$ — функция, суммируемая на каждом интервале $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ и удовлетворяющая условиям*

$$1)\ \int\limits_0 \lambda^{-1} f(\lambda)\, d\lambda < \infty,$$

$$2)\ (1-a) f(t) + a \int\limits_0^t \lambda^{-1} f(\lambda)\, d\lambda = bt^\rho,$$

где a, b, ρ — фиксированные постоянные, причем $a \in [0, 1]$; $\rho > 0$. Тогда

$$f(t) = \frac{b\rho}{\rho(1-a)+a} t^\rho.$$

Доказательство. Из 2) видно, что $f(t)$ дифференцируема. Дифференцируя по t, получаем при $a \in (0, 1)$

$$tf' + \frac{a}{1-a} f = \frac{b}{1-a} \rho t^\rho.$$

Общее решение имеет вид $f(t) = ct^{-\frac{a}{1-a}} + \dfrac{b\rho}{(1-a)\rho + a} t^\rho.$

Из условия 1) следует, что $c = 0$. Если $a = 1$, утверждение леммы получается сразу после дифференцирования; если $a = 0$, утверждение леммы следует из 2.

Переходим к формулировке основной теоремы этого параграфа. Пусть

$$\bar{\tau}[a, \varphi, \mu];\ \underline{\tau}[a, \varphi, \mu];\ \bar{\lambda}[c, \theta, \mu];\ \underline{\lambda}[c, \theta, \mu];\ \bar{\nu}[b, \theta, \mu],\ \nu[\ldots] \qquad (5.1)$$

— асимптотические характеристики функционалов, определенных соотношениями (4.15), (4.23), (4.24).

Рассмотрим следующие три соотношения:

$$\bar{\tau}[a, \varphi, \mu] = \underline{\tau}[a, \varphi, \mu] \overset{\text{def}}{=} \tau[a, \varphi, \mu] \qquad (5.2)$$

для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$;

$$\underline{\nu}[b; \theta_{\varphi, \alpha}; \mu] = \bar{\nu}[b, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \overset{\text{def}}{=} \nu[b, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu], \qquad (5.3)$$

$$\underline{\lambda}[c, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] = \bar{\lambda}[c, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \overset{\text{def}}{=} \lambda[b, \theta_{\varphi, \alpha}; \mu] \qquad (5.4)$$

для всех φ таких, что $\varphi - \alpha \in [0, 2\pi)$.

Пусть s — (5.2) означает выполнение (5.2) для всех $a \in [0, 1]$; i — (5.2) — для какого-нибудь a; s — (5.3); i — (5.3) — выполнение (5.3) соответственно для всех пар $(b, \alpha): b \in [0, 1]$, $\alpha \in [0; 2\pi]$ и какой-нибудь пары (b, α); s — (5.4) и i — (5.4) — аналогичные условия для соотношения (5.4) и пары (c, α).

Теорема 6. *Для фиксированной меры μ имеют место следующие утверждения:*

$$\begin{array}{ccccc} i-(5.2) & \leftrightarrow & i-(5.3) & \leftrightarrow & i-(5.4) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ s-(5.2) & & s-(5.3) & & s-(5.4), \end{array}$$

где $\rightarrow$ означает импликацию соответствующих свойств.

Доказательство. Покажем, что выполняются соотношения

$$\begin{array}{ccc} & i-(5.2) & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ s-(5.2) & s(5.3) & s-(5.4) \end{array} \qquad (5.4')$$

Пусть выполняется i — (5.2) для меры $\tilde{\mu}$.

Рассмотрим множество мер

$$\varkappa \quad \{\mu: \forall\varphi,\ \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \bar{\tau}^{\varepsilon}[a, \varphi, \mu] \leqslant \bar{\tau}^{\varepsilon}[a', \varphi, \mu] \wedge \\ \wedge\ \underline{\tau}[a, \varphi, \mu] \geqslant \tau[a, \varphi, \tilde{\mu}]\},$$

где τ^{ε} — характеристика соответствующего непрерывного функционала. Так как функционалы $T^{\varepsilon}[a, \varphi, \mu]$ линейны и непрерывны, а $\tau^{\varepsilon}[a, \varphi, \tilde{\mu}]$ постоянны по μ, то функционалы

$$-\{T^{\varepsilon}[a, \varphi, \mu] - \bar{\tau}^{\varepsilon}[a, \varphi, \tilde{\mu}]\}$$

непрерывны и выпуклы. Поэтому из их характеристик можно образовывать множества $\varkappa$, K.

Множество $\varkappa$ непусто, так как содержит $\tilde{\mu}$, соответствующее ему множество

$$K = \{\mu: \forall\varphi,\ \forall\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \bar{T}^{\varepsilon}[a, \varphi, \mu] \leqslant \bar{\tau}^{\varepsilon}[a, \varphi, \tilde{\mu}] \\ \wedge\ \underline{T}[a, \varphi, \mu] \geqslant \tau[a, \varphi, \tilde{\mu}]\}$$

по теореме 1 также непусто.

Покажем, что K состоит из одной точки.

Для любой меры $\mu \in K$ имеем

$$\tau[a, \varphi, \tilde{\mu}] \leqslant \underline{T}[a, \varphi, \mu] \leqslant \overline{T}^{\varepsilon}[a, \varphi, \mu] \leqslant \bar{\tau}^{\varepsilon}[a, \varphi, \tilde{\mu}]$$

для любых фиксированных φ и ε.

Отсюда получаем для любого фиксированного t

$$\tau[a, \varphi, \tilde{\mu}] \leqslant \boldsymbol{T}[a, \varphi, \mu_t] \leqslant \boldsymbol{T}^{\varepsilon}[a, \varphi, \mu_t] \leqslant \bar{\tau}^{\varepsilon}[a, \varphi, \tilde{\mu}].$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ получаем

$$\boldsymbol{T}[a, \varphi, \mu_t] = \tau[a, \varphi, \tilde{\mu}].$$

Используя выражение для функционала $\boldsymbol{T}[a, \varphi, \mu]$, получаем

$$(1-a)\, u(te^{i\varphi}, \mu) + a\int_0^t \lambda^{-1} u(\lambda e^{i\varphi}, \mu)\, d\lambda = \tau[a, \varphi, \tilde{\mu}]\, t^{\rho}.$$

Функция $u(te^{i\varphi}, \mu)$ удовлетворяет условиям леммы 5.1.

На основании леммы 5.1 запишем

$$u(te^{i\varphi}, \mu) = h(\varphi)\, t^{\rho}.$$

Распределение масс μ этой функции однозначно определяется, т. е. K состоит из одной точки.

Применяя теперь теорему 2 к любому из полунепрерывных сверху функционалов $\boldsymbol{T}[a, \varphi, \mu]$, $\boldsymbol{N}[b, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu]$, $\boldsymbol{L}[c, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu]$, получаем (5.4′).

Докажем соотношения

$$\begin{array}{ccc} & i-(5.3) & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ s-(5.2) & s-(5.3) & s-(5.4). \end{array} \tag{5.4''}$$

Рассматривая теперь множество

$$\varkappa = \{\mu : \forall\varphi, \quad \forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \qquad \bar{\nu}^{\varepsilon}[b; \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \leqslant \bar{\nu}^{\varepsilon}[b, \theta_{\varphi, \alpha}, \tilde{\mu}]$$
$$\wedge\, \underline{\nu}[b, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \geqslant \underline{\nu}[b; \theta_{\varphi, \alpha}, \tilde{\mu}]\},$$

покажем, что соответствующее множество K состоит из одной точки.

Аналогично тому, как это делалось при доказательстве необходимости, показываем, что для меры $\mu(K_{\varphi, \alpha, t})$ сектора

$$K_{\varphi, \alpha, t} = \{re^{i\psi} : r \in [0, t];\ e^{i\psi} \in \bar{\theta}_{\varphi, \alpha}\}$$

выполняется равенство

$$(1-b)\,\mu(K_{\varphi, \alpha, t}) + b\int_0^t \lambda^{-1}\mu(K_{\varphi, \alpha, \lambda})\, d\lambda = \nu[b, \theta_{\varphi, \alpha}; \tilde{\mu}]\, t^{\rho},$$

откуда

$$\mu(K_{\varphi, \alpha, t}) = d_{\alpha}(\varphi)\, t^{\rho}. \tag{5.5}$$

этим условием мера μ однозначно определяется. Применяя теперь теорему 2 к любому из функционалов $N[b, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu]$, $T[a, \varphi, \mu]$, $L[c, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu]$, получаем (5.4).

Соотношение

$$\begin{array}{ccc} & i-(5.4) & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ s-(5.2) & s-(5.3) & s-(5.4) \end{array}$$

доказывается аналогично.

Так как, очевидно, из соотношений $s-(\ldots)$ следуют соотношения $i-(\ldots)$, теорема доказана полностью.

Теперь рассмотрим отношение этой теоремы к теории вполне регулярного роста.

По лемме 4.2 существует не более чем счетное множество Φ_0 значений φ, α, для которых

$$-\underline{\lambda}[0; \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \neq \bar{\Delta}(\theta_{\varphi, \alpha}); \quad \underline{\nu}[0; \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] = \underline{\Delta}(\theta_{\varphi, \alpha}).$$

Поэтому для всех $\varphi \notin \Phi_0$ и фиксированного $\alpha \notin \Phi_0$ имеем

$$\bar{\Delta}(\theta_{\varphi, \alpha}) = -\underline{\lambda}[0; \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \leqslant \bar{\nu}[0; \theta_{\varphi, \alpha}, \mu],$$

$$-\bar{\lambda}[0; \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \leqslant \underline{\nu}[0; \theta_{\varphi, \alpha}; \mu] = \underline{\Delta}(\theta_{\varphi, \alpha}).$$

Из условий теоремы следует тогда, что

$$\bar{\Delta}(\Theta_{\varphi, \alpha}) = \underline{\Delta}(\theta_{\varphi, \alpha}) \tag{5.6}$$

для $\varphi \notin \Phi_0$.

Обратно, если выполняется условие (5.6) для всюду плотного множества значений φ при каком-нибудь α, то (5.3) и (5.4) выполняются для всех φ. Это получается из соотношений

$$\underline{\nu}, \bar{\nu}[a, \theta_{\varphi_0, \alpha}, \mu] = \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \underline{\nu}, \bar{\nu}[a, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu], \tag{5.7}$$

$$\underline{\lambda}, \bar{\lambda}[a, \theta_{\varphi_0, \alpha}, \mu] = \lim_{\varphi \to \varphi_0 - 0} \lambda, \bar{\lambda}[a; \theta_{\varphi, \alpha}; \mu]; \tag{5.8}$$

следующих непосредственно из определения характеристик λ, ν. Таким образом, получена

Лемма 5.2. *Любое из условий*

$$\underline{\lambda}[0; \theta_{\varphi, \alpha}; \mu] = \bar{\lambda}[0; \theta_{\varphi, \alpha}; \mu] \, \forall \varphi, \tag{5.9}$$

$$\underline{\nu}[0, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] = \bar{\nu}[0, \theta_{\varphi, \alpha}, \mu] \, \forall \varphi \tag{5.10}$$

эквивалентно условию (5.6).

Отметим далее, что условие вполне регулярности роста субгармонической функции может быть записано в виде

$$h_u(\varphi) = \underline{h}_u(\varphi). \tag{5.11}$$

Из теоремы 6 следует, что выполнение условия (5.6) эквивалентно соотношению

$$\bar{\tau}[a, \varphi, \mu] = \underline{\tau}[a, \varphi, \mu] \text{ при } a = 1,$$

которое эквивалентно существованию предела

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho} \int_0^r t^{-1} u(te^{i\varphi}, \mu)\, dt. \tag{5.12}$$

Условие (5.6) эквивалентно также формуле

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-\rho} u(te^{i\varphi}) = \underline{\tau}[0, \varphi, \mu]. \tag{5.13}$$

Выражение (5.13) отличается от условия регулярности роста тем, что справа стоит не нижний индикатор, определенный в (4.14), а «регуляризованный» нижний индикатор.

Ввиду (4.13) из вполне регулярности роста следует (5.6).

Таким образом, между условиями «правильности» распределения масс и «регулярностью» (в каком-нибудь смысле) роста существуют следующие связи:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & (5.11) & & (5.6) & & \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
(5.13) \leftrightarrow i & - & (5.2) \leftrightarrow i & - & (5.3) \leftrightarrow i & - & (5.4) \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 & & s-(5.2) & & s-(5.3) & & s-(5.4).
\end{array} \tag{5.14}$$

Импликация $(5.2) \leftrightarrow (5.11)$ также верна, хотя не следует непосредственно из наших рассуждений.

Рассмотрим еще один пример теоремы о вполне регулярном росте.

Обозначим $G^\varepsilon[\varphi, \mu]$ непрерывный функционал вида

$$G^\varepsilon[\varphi, \mu] = N^\varepsilon[\theta_{\varphi, 0}; \mu] + T^\varepsilon[\varphi, \mu]\, 2\pi,$$

где N^ε, T^ε определены соотношениями (4.7), (4.16). Соответствующий полунепрерывный функционал имеет вид

$$G[\varphi, \mu] = \int_{K_\varphi} d\mu + u(e^{i\varphi}, \mu),$$

где K_φ — сектор вида

$$K_\varphi = \{z : |z| \in [0, 1]\, e^{i\arg z} \in \bar{\theta}_{\varphi, 0}\}.$$

Соответствующие асимптотические характеристики $\underline{\gamma}$, $\bar{\gamma}$ являются аналогами индикатора и угловой плотности нулей для целых функций. Имеет место

Теорема 6'. *Пусть* $\rho \neq \operatorname{Re} \alpha_k$, *где* α_k *корни уравнений*

$$\alpha(\alpha-1)+(1+ik)\alpha-k^2=0 \quad k=0, \pm 1, \ldots \tag{5.15}$$

Тогда соотношения

$$1) \ \bar{\tau}[\varphi, \mu] = \underline{\tau}[\varphi, \mu] \ \forall \varphi \in [0, 2\pi],$$

$$2) \ \bar{\gamma}[\varphi, \mu] = \gamma[\varphi, \mu] \ \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

эквивалентны.

Значит, из существования в определенном смысле предела

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\frac{\mu(K_{r,\varphi})}{r^\rho}+2\pi\frac{u(re^{i\varphi}, \mu)}{r^\rho}\right\}$$

для всех φ следует и существование каждого из пределов

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mu(K_{r,\varphi})}{r^\rho}; \quad \lim_{r\to\infty}\frac{u(re^{i\varphi}, \mu)}{r^\rho}$$

для всех φ вне C_0-множества, и наоборот.

Соотношение 1) $\Rightarrow$ 2) следует из схемы (5.14).

Доказательство 2) $\Rightarrow$ 1), как и в теореме 6, сводится к следующему утверждению, аналогичному лемме 5.1.

Лемма 5.3. *Уравнение*

$$\mu(K_{r,\varphi})+u(re^{i\varphi}, \mu)=d(\varphi)r^\rho$$

определяет единственную меру $\mu \in \boldsymbol{M}_{\rho,\Delta}$ (см. (2.2)).

Доказательство. Достаточно доказать единственность решения однородного уравнения вида

$$\mu(K_{r,\varphi})+u(re^{i\varphi}, \mu)=0, \tag{5.16}$$

где μ — разность неотрицательных мер; u — разность канонических интегралов, соответствующих этим мерам, причем $|\mu| \in \boldsymbol{M}_{\rho,\Delta}$ ($|\mu|$ — вариация μ).

Обозначим

$$\mu(K_{r,\varphi})=F(r, \varphi).$$

Из $|\mu| \in \boldsymbol{M}_{\rho,\Delta}$ следует

$$|F(r, \varphi)| < Cr^\rho \quad r \in (0, \infty). \tag{5.17}$$

Воспользуемся техникой обобщенных функций, приняв за основное пространство $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2 \diagdown 0)$ пространство бесконечно-дифференцируемых функций, финитных в окрестности 0 и ∞.

Заметим сначала, что в смысле обобщенных функций

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi}=d\mu, \quad \frac{\Delta u}{2\pi}=d\mu,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Применяя Δ к равенству (5.16), получаем

$$\Delta F + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi} = 0.$$

Перейдем к коэффициентам Фурье $F_k(r)$ и запишем

$$\left[r^2\frac{d^2}{dr^2} + r(1+ik)\frac{d}{dr} - k^2\right]F_k(r) = 0.$$

Обобщенное решение такого уравнения является классическим почти для всех r [15, стр. 32], поэтому получаем

$$F_k(r) = c_{k1}r^{\alpha_{k1}} + c_{k2}r^{\alpha_{k2}},$$

где α_{k1}, α_{k2} — корни уравнения (5.15).

Из условий (5.17) и $\rho \neq \operatorname{Re}\alpha_k$ следует, что $c_{k1}, c_{k2} = 0$, т. е. $F_k(r) \equiv 0$, откуда $F(r, \varphi) = 0$ почти для всех φ, r и, значит, $\mu = 0$. Лемма доказана.

Как уже было сказано, из нее следует утверждение теоремы.

6. Оценки индикаторов. Здесь мы обсудим связь теорем 1 и 3 с оценками индикаторов целых функций. Теоремы 7 и 8 в данном случае являются основными. Затем в виде примеров применения теорем получаем известные оценки индикаторов целых функций и показываем точность этих оценок. Определим классы $\varkappa$ и K соотношениями

$$\varkappa[\delta_1, \delta_2, \{\Theta\}] = \{\mu : \bigwedge_{\theta\in\{\Theta\}} \underline{\nu}[\theta, \mu] \geqslant \delta_1(\theta) \wedge \underline{\lambda}[\theta, \mu] \geqslant -\delta_2(\theta)\}, \quad (6.1)$$

$$K[\delta_1, \delta_2\Theta, \{\Theta\}] = \{\mu : \bigwedge_{\theta\in\{\theta\}} \underline{N}[\Theta, \mu] \geqslant \delta_1(\theta) \wedge \underline{L}[\theta, \mu] \geqslant -\delta_2(\theta)\}, \quad (6.2)$$

где $\{\Theta\}$ — некоторое множество подмножеств единичной окружности S_1; $\delta_1(\theta)$, $\delta_2(\theta)$ — функции множества $\theta \in \{\Theta\}$; λ, ν; $\underline{N}$, $\underline{L}$ — характеристики, соответствующие функционалам (4.16), (4.17) и определенные соотношениями (2.4), (2.5).

Теорема 7. *Пусть класс* $\varkappa$, *определенный соотношениями* (6.1), *непуст. Тогда для любого канонического интеграла* $u(z, \mu)$ *такого, что* $\mu_u \in \varkappa$, *имеет место оценка*

$$h_u(\varphi) \leqslant \max_{\mu\in K} u(e^{i\varphi}, \mu), \quad (6.3)$$

где K — *замкнутое множество, определенное соотношением* (6.2). *Существует целая функция* $f(z)$, *для которой достигается равенство при всех* φ, *т. е.*

$$h_f(\varphi) = \max_{\mu\in K} u(e^{i\varphi}, \mu). \quad (6.4)$$

Доказательство. Полагаем

$$T[\varphi, \mu] = u(e^{i\varphi}, \mu) \quad \varphi \in A,$$

где $u(z, \mu)$ — канонический интеграл; A — счетное всюду плотное множество точек на интервале $[0, 2\pi)$. Тогда по теореме 1 неравенство (6.3) выполняется для всех $\varphi \in [0, 2\pi)$, а по теореме 3 существует мера $\mu_{\max} \in \varkappa$, для которой знак равенства в (6.3) достигается при всех $\varphi \in A$ одновременно.

По лемме 4.4 найдется целая функция $f(z)$ порядка ρ и нормального типа такая, что ее распределение нулей $n_f \in \varkappa$ и $h_f(\varphi) = h_u(\varphi)$ для любого φ. Если теперь использовать непрерывность по φ обеих частей равенства (6.4), доказанную в лемме 4.5, будем иметь утверждение теоремы. Получим некоторые достаточные условия непустоты класса $\varkappa$.

Теорема 8. *Пусть $\Delta(\theta)$ — счетно-аддитивная функция множеств на S_1, удовлетворяющая условию*

$$\delta_1(\theta) \leqslant \Delta(\theta) \leqslant \delta_2(\theta) \tag{6.5}$$

для всех $\theta \in \Theta$, где Θ — кольцо множеств, регулярных относительно $\Delta(\theta)$, т. е. таких, что

$$\Delta(\partial\theta) = 0 \text{ для } \theta \in \Theta, \tag{6.6}$$

Тогда класс $\varkappa[\delta_1, \delta_2, \Theta]$ непуст.

Доказательство. Рассмотрим меру вида

$$d\mu = \rho t^{\rho-1} dt \otimes \Delta(\theta).$$

Из соотношений (6.5) и (6.6) и леммы 4.1 следует, что $\mu \in \varkappa$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть хотя бы одна из функций δ_1, δ_2 счетно-аддитивна. Тогда класс $\varkappa$ непуст для соответствующего Θ.*

Например, если $\delta_1 \equiv 0$, $\{\theta\}$ — любое множество подмножеств S_1. Приведем примеры, когда экстремум справа в (6.3) может быть вычислен в «явном виде» (понятие «явный вид», конечно, весьма относительно).

Пример 6.1. (Экстремальный индикатор для функций с нулями на луче [10]).

Пусть $\delta_1 \equiv 0$, а

$$\delta_2(\theta) = \begin{cases} \Delta & \text{если } 1 \in \theta, \\ 0 & \text{если } 1 \notin \theta, \end{cases}$$

Θ — кольцо множеств, регулярных относительно $\delta_2(\theta)$. В этом случае по лемме 4.1

$$-\underline{\lambda}[\theta, \mu] = \overline{\Delta}(\theta).$$

Класс K состоит из распределений масс, сосредоточенных на положительном луче и удовлетворяющих условию

$$\mu(t) \leqslant \Delta t^{\rho}, \tag{6.7}$$

где $\mu(t)$ — масса интервала.

Вычислим max функционала

$$u(e^{i\varphi}, \mu) = \int_0^\infty H\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}, p\right) d\mu \tag{6.8}$$

в классе K для различных φ. Можно считать, что $\varphi \neq 0$, так как достаточно ограничиться всюду плотным множеством φ.

Обозначим

$$-t^{\rho} \frac{d}{dt} H\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}, p\right) = t^{-(p+1-\rho)} \frac{\cos p\varphi - t\cos(p+1)\varphi}{1-2t\cos\varphi+t^2} \stackrel{\text{def}}{=} I(t, \varphi, \rho).$$

Элементарное исследование ядра H [10] показывает, что возможны четыре случая поведения H для различных φ:

1) $H < 0$ при всех t;

2) $H > 0$ и убывает при всех t;

3) $H > 0$ и убывает до нуля на интервале $(0, \psi_p)$ и $H < 0$ для $t > \psi_p$;

4) H возрастает и в точке

$$t_p(\varphi) = \frac{\cos p\varphi}{\cos(p+1)\varphi}$$

достигает положительного максимума, а затем убывает на интервале (t_p, ∞), оставаясь положительным. В этом случае $H\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}, p\right)$ обращается в нуль в точке $t = \eta_p(\varphi) < t_p(\varphi)$.

Рассмотрим max $u(e^{i\varphi}, \mu)$ для различных случаев.

1. Очевидно, $\mu_{\max} \equiv 0$ и max $u(e^{i\varphi}, \mu) \equiv 0$. (6.9)

2. Интегрируя (6.8) по частям, получаем

$$\int_0^\infty H\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}, p\right) d\mu \leqslant \int_0^\infty I(t, \varphi, p) \frac{\mu(t)}{t^{\rho}} dt,$$

откуда видно, что следует положить

$$\mu_{\max}(t) = \Delta t^{\rho}.$$

При этом

$$u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}) = \Delta \int_0^\infty I(t, \varphi, p)\, dt. \tag{6.10}$$

3. Имеем

$$\int_0^\infty H d\mu \leqslant \int_0^{\psi_p(\varphi)} H d\mu = \mu \cdot H \Big|_0^{\psi_p(\varphi)} + \int_0^{\psi_p(\varphi)} I \frac{\mu(t)}{t} dt.$$

Так как внеинтегральный член исчезает, а под интегралом $I \geqslant 0$ следует положить

$$\mu_{\max} = \begin{cases} \Delta t^{\rho} & \text{для } 0 < t < \psi_p(\varphi), \\ \Delta \psi_p^{\rho}(\varphi) & \text{для } t \geqslant \psi_p(\varphi). \end{cases}$$

При этом

$$u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}) = \Delta \int\limits_0^{\psi_p(\varphi)} I(t, \varphi, p)\, dt. \tag{6.11}$$

4. Имеем

$$\int\limits_0^\infty H d\mu \leqslant \int\limits_{\eta_p(\varphi)}^\infty H d\mu = \left\{ \int\limits_{\eta_p(\varphi)}^{t_p(\varphi)} + \int\limits_{t_p(\varphi)}^\infty \right\} H d\mu.$$

Первое слагаемое достигает max, если в точке $t_p(\varphi)$ сосредоточить максимально возможную массу

$$\mu_1 = \Delta t_p^\rho(\varphi).$$

Второй интеграл после интегрирования по частям принимает вид

$$H\left(\frac{e^{i\varphi}}{t}, p\right)\mu(t)\Big|_{t_p(\varphi)}^\infty + \int\limits_{t_p(\varphi)}^\infty I \cdot \frac{\mu(t)}{t^\rho}\, dt.$$

Поэтому в качестве меры, доставляющей экстремум этому слагаемому, следует взять

$$\mu_2 = \begin{cases} \Delta t^\rho - \Delta t_p^\rho & \text{для } t \geqslant t_p, \\ 0 & \text{для } t < t_p. \end{cases}$$

Сумма $\mu_1 + \mu_2 \overset{\text{def}}{=} \mu$ дает $\mu_{\max}$, причем (6.12)

$$u(e^{i\varphi}, \mu_{\max} = H\left(\frac{e^{i\varphi}}{t_p(\varphi)}, p\right)\Delta t_p^\rho(\varphi) + \Delta \int\limits_{t_p(\varphi)}^\infty I(t, p, \varphi)\, dt.$$

Отметим, что все эти вычисления по существу были проделаны в работе [10] и служили эвристическими соображениями для построения примера целой функции, на которой достигается экстремум индикатора. Но построения самого примера мы избежали с помощью теоремы 3.

Прежде чем привести еще один пример, отметим некоторые свойства величины

$$h_{\max}(\delta_1, \delta_2, \varphi) = \max_{\mu \in K(\delta_1, \delta_2, \Theta)} u(e^{i\varphi}, \mu)$$

как функционала на функциях δ_1 и δ_2. Ограничиваясь случаем, когда $\delta_1 = 0$, непосредственно из теоремы 4 получаем следующую лемму.

Лемма 6.1. *Имеет место соотношение*

$$h_{\max}(0, \alpha\delta' + \beta\delta'', \varphi) \geqslant \alpha h_{\max}(0, \delta', \varphi) + \beta h_{\max}(0, \delta'', \varphi). \quad \alpha, \beta > 0 \tag{6.13}$$

Это соотношение вполне аналогично свойству интеграла по полуаддитивной мере относительно полуаддитивной меры [2, стр. 293]. Из определения класса K получаем также следующее свойство.

Лемма 6.2. Если $\delta'(\theta) < \delta''(\theta)$ для $\theta \in \{\Theta\}$, *тогда*

$$h_{\max}(0, \delta', \varphi) \leqslant h_{\max}(0, \delta'', \varphi). \tag{6.14}$$

Оно следует из утверждения, что величины справа и слева — это максимумы по множествам K' и K'', причем $K' \subset K''$.

Рассмотрим еще один пример вычисления максимального индикатора.

Пример 6.2. (Экстремальный индикатор в классе, порожденном аддитивной функцией $\delta_2(\theta)$ [2, стр. 314]). Пусть класс $\varkappa$ порожден функциями $\delta_1 \equiv 0$ и $\delta_2(\theta) = \Delta(\theta)$, где $\Delta(\theta)$ — аддитивная неотрицательная мера на S_1, а Θ — кольцо регулярных множеств.

Обозначим $\tilde{H}(\varphi)$ функцию, определенную равенством

$$\tilde{H}(\varphi) = \frac{1}{\Delta} u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}(\varphi)).$$

где $u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}(\varphi)$ определены формулами (6.9), (6.10), (6.11), (6.12) для соответствующих φ. Пусть $\Delta(\{1\}) = 0$. Тогда

$$h_{\max}(0, \Delta(\theta), \varphi) = \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\varphi - \psi)\, d\Delta(\psi) \tag{6.15}$$

($\Delta(\psi) = \Delta(\theta_{\psi, 0})$ интеграл понимается в смысле Стилтьеса, $\tilde{H}$ — непрерывна).

Доказательство. Пусть $\{\theta_i\}$ $(i = \overline{1, n})$ — разбиение интервала $[0, 2\pi]$ на регулярные полуинтервалы, максимальная длина которых стремится к нулю при $n \to \infty$. Обозначим

$$\tilde{\Delta}_n(\theta) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \Delta(\theta_i)\, \delta_i(\theta)$$

меру, где δ_i — мера, сосредоточенная на внутренней к θ_i точке ψ_i, причем

$$\delta_i([0, 2\pi]) = 1.$$

Легко видеть, что

$$h_{\max}(0, \delta_i, \varphi) = \tilde{H}(\varphi - \psi_i)$$

и, следовательно, по свойству *(6.13)*

$$h_{\max}(0, \tilde{\Delta}_n, \varphi) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \tilde{H}(\varphi - \psi_i)\, \Delta(\theta_i). \tag{6.16}$$

Покажем, что неравенство сохраняется, если перейти к пределу при $n \to \infty$.

Действительно, по теореме 3.

$$h_{\max}(0, \tilde{\Delta}_n, \varphi) = u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}^{(n)}(\varphi)),$$

причем $\mu_{\max}^{(n)} \in K(0, \tilde{\Delta}_n, \Theta)$. Так как $M_{\rho, \Delta}$ компактно, можно выделить из последовательности $\mu^{(n)}$ подпоследовательность, сходя-

...ся к пределу μ_0. Из полунепрерывности сверху функционала ..., μ) следует, что

$$u(e^{i\varphi}, \mu_0) \geqslant \lim_{n\to\infty} u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}^{(n)}). \tag{6.17}$$

Правая часть (6.17) не меньше интеграла в (6.15).

Отметим, что

$$\underline{L}[\theta, \mu^{(n)}] = -\tilde{\Delta}_n(\overset{\circ}{\theta}),$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \underline{L}[\theta, \mu^{(n)}] = -\lim_{n\to\infty} \tilde{\Delta}_n(\theta) = -\Delta(\theta)$$

всякого регулярного множества θ. Из полунепрерывности ...ху $\underline{L}[\theta, \mu^{(n)}]$ следует

$$L[\theta, \mu_0] \geqslant -\Delta(\theta)$$

для каждого регулярного множества θ. Поэтому $\mu_0 \in K(0, \Delta, \Theta)$ и, следовательно, (6.18)

$$h_{\max}(0, \Delta, \varphi) = \max_K u(e^{i\varphi}, \mu) \geqslant u(e^{i\varphi}, \mu_0) \geqslant \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\varphi-\psi)\, d\Delta(\psi).$$

Покажем теперь, что

$$h_{\max}(0, \Delta, \varphi) \leqslant \int_0^{2\pi} \tilde{H}(\varphi-\psi)\, d\Delta(\psi). \tag{6.19}$$

Пусть $\mu_{\max}(\varphi)$ — экстремальная мера для функционала

$$u(e^{i\varphi}, \mu) = \int_{R^2} H\left(\frac{e^{i(\varphi-\psi)}}{t}, p\right) d\mu$$

в классе $K(0, \Delta, \Theta)$.

Можно видеть, что $d\mu = 0$ на тех множествах, где $H < 0$, иначе соответствующая мера не была бы экстремальной. Поэтому

$$u(e^{i\psi}, \mu_{\max}(\varphi)) = \int_{R^2} H^+\left(\frac{e^{i(\varphi-\psi)}}{t}, p\right) d\mu.$$

Обозначим для данного разбиения интервала $[0, 2\pi]$ на регулярные полуинтервалы θ_i

$$\mu^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

где μ_i — радиальная проекция[1] на луч $\{\arg z = \psi_i\}$ сужения меры $\mu_{\max}$ на угол

$$L_i = \{z : \arg z \in \theta_i\}.$$

[1] Это обозначает, что

$$\mu_i(G) = \mu_{L_i}(T^{-1}G),$$

где μ_{L_i} — сужение μ на L_i, а $T^{-1}G$ — прообраз G в L_i для преобразования

$$T\xi = |\xi|\, e^{i\psi_i},\ \xi \in L_i.$$

Так как H^+ непрерывна по ψ и интеграл сходится равномерно по $\mu \in \boldsymbol{M}_{\rho, \Delta}$, то имеем

$$u(e^{i\varphi}, \mu_{\max}) = \lim_{n \to \infty} \int H^+ \, d\mu^{(n)}. \qquad (6.20)$$

Правая часть (6.20) оценивается следующим образом:

$$\int H^+ \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int H^+ \, d\mu_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \Delta(\theta_i) \tilde{H}(\varphi - \psi_i), \qquad (6.21)$$

так как для каждого интеграла в сумме верна оценка из примера 6.1.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая (6.21), получаем (6.19). Тем самым равенство (6.15) доказано.

7. Связь с задачей Пэйли. Обозначим

$$T^{\varepsilon}[1, \mu] = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}, \mu) \, d\varphi. \qquad (7.1)$$

Пусть для фиксированного ρ $(0 < \rho < \infty$, ρ — нецелое)

$$\tau(\rho) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\mu \in \varkappa} \bar{\tau}[\max; \mu], \qquad (7.2)$$

где

$$\varkappa = \{\mu : \{\underline{\tau}[\varphi, \mu] \geqslant 0 \, \forall \varphi\} \wedge \{\underline{\tau}[1, \mu] \geqslant 0\}\}, \qquad (7.3)$$

а $\underline{\tau}[\varphi, \mu]$, $\tau[1, \mu]$, $\bar{\tau}[\max; \mu]$ — асимптотические характеристики, соответствующие функционалам (4.7), (4.8), (7.1). Пусть $D_{\min}(\rho)$ — наилучшая постоянная в неравенстве (1.4).

Теорема 9. *Имеет место соотношение*

$$\tau(\rho) = D_{\min}(\rho), \qquad (7.4)$$

причем равенство достигается слева на некотором целочисленном распределении масс, а справа — на соответствующем каноническом произведении.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 7.1. *Имеет место неравенство*

$$|u^{\varepsilon}(e^{i\varphi}, \mu_t)| < B, \qquad (7.5)$$

где B — постоянная, не зависящая от φ и t.

Доказательство. В работе [7, § 3] было показано, что функция $H_\varepsilon(z, \zeta, p)$, определенная соотношением (4.5′), принадлежит пространству $C(p_1, p_2)$ $(p < p_1 < p_2 < p + 1)$ для любого z из единичной окружности S_1, и норма ее ограничена равномерно по $z \in S_1$. Поэтому (см. п. 2)

$$|u^{\varepsilon}(e^{i\varphi}, \mu_t)| \leqslant \|H_\varepsilon\| \, \|\mu_t\|_{p_1, p_2} \leqslant B_1 \|H_\varepsilon\| \, \|\mu_t\|_\rho =$$
$$= B_1 \|H_\varepsilon\| \cdot \|\mu\|_\rho \overset{\text{def}}{=} B < \infty$$

для $p_1 < \rho < p_2$ равномерно по φ.

Лемма 7.2. Если выполняется условие

$$\underline{\tau}[\varphi, \mu] \geqslant 0, \tag{7.6}$$

то имеет место равенство (см. (4.10), (4.11))

$$\bar{\tau}[+, \mu] = \bar{\tau}\left[\int, \mu\right]. \tag{7.7}$$

Доказательство. Из определения $\tau[\varphi, \mu]$ и (7.6) имеем

$$\liminf_{t\to\infty} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_t) \geqslant 0. \tag{7.8}$$

Покажем, что для любого ε выполняется соотношение

$$\bar{\tau}^\varepsilon[+, \mu] = \bar{\tau}^\varepsilon\left[\int, \mu\right] \tag{7.9}$$

при условии (7.8).

Имеем (7.10)

$$\int_0^{2\pi} (u^\varepsilon)^+ (e^{i\varphi}, \mu_t)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_t)\, d\varphi - \int_{\Omega_t} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_t)\, d\varphi,$$

где

$$\Omega_t = \{\varphi : u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_t) < 0\}.$$

Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\Omega_t} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_t)\, d\varphi = 0. \tag{7.11}$$

Допустим, что интеграл

$$-\int_{\Omega_t} u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_t)\, d\varphi$$

не стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда для некоторой последовательности t_k выполняется соотношение

$$\int_{\Omega_{t_k}} \{-u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_{t_k})\}\, d\varphi \geqslant \delta > 0.$$

Обозначим

$$\Omega_k' = \left\{\varphi : -u^\varepsilon(e^{i\varphi}, \mu_{t_k}) > \frac{\delta}{4\pi}\right\}.$$

С учетом неравенства (7.5) леммы 7.1 имеем

$$\delta \leqslant \int_{\Omega_{t_k}} = \left\{\int_{\Omega_k'} + \int_{\Omega_{t_k}\setminus\Omega_k'}\right\}(-u^\varepsilon)(e^{i\varphi}, \mu_{t_k})\, d\varphi \leqslant \frac{\delta}{2} + \operatorname{mes}\Omega_k' \cdot B,$$

откуда

$$\operatorname{mes}\Omega_k' \geqslant \frac{\delta}{2B}. \tag{7.12}$$

Из (7.12) следует существование такого φ, что для некоторой последовательности t_k выполняется условие

$$u^{\varepsilon}(e^{i\varphi}, \mu_{t_k}) < -\frac{\delta}{2B},$$

а это противоречит (7.8). Значит, выполняется $\underline{(}7.11)$. Из (7.10) и (7.11) следует (7.9), а значит, по определению $\underline{\tau}$ — и (7.7).

Доказательство теоремы. Очевидно, что $D_{\min}(\rho)$ можно определить соотношением

$$D_{\min}(\rho) = \sup \sigma_f, \tag{7.13}$$

где sup берется по всем f, удовлетворяющим условию

$$\overline{T}_f \leqslant 1. \tag{7.14}$$

Так как sup в (7.13) только увеличится при переходе к субгармоническим функциям, запишем

$$D_{\min}(\rho) \leqslant \sup \sigma_u, \tag{7.15}$$

где sup в (7.15) берется по $u(z)$, удовлетворяющим условию

$$\overline{T}_u \leqslant 1. \tag{7.16}$$

Поскольку u^+ является неотрицательной субгармонической функцией, то условие (7.16) можно заменить на следующие:

$$u(re^{i\varphi}) \geqslant 0, \tag{7.17}$$

$$1 - \limsup_{r \to \infty} r^{-\rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, d\varphi \geqslant 0. \tag{7.18}$$

Если теперь заменить условие (7.17) на более слабое

$$\underline{\tau}[\varphi, \mu] \geqslant 0, \tag{7.19}$$

а условие (7.18) переписать в виде

$$\liminf_{t \to \infty} \left[1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, d\varphi\right] \geqslant 0,$$

то получим неравенство

$$\tau(\rho) \geqslant D_{\min}(\rho). \tag{7.20}$$

Докажем обратное неравенство. Пусть μ — распределение, на котором по теореме 1 достигается $\tau(\rho)$ в соотношении (7.2). По лемме 4.4. найдется целая функция $f(z)$, для логарифма модуля которой все характеристики в (7.2) и (7.3) те же самые. Покажем, что для нее выполняется (7.14).

Из леммы 7,2 следует, что для соответствующего субгармонической функции $\ln|f(z)|$ распределения масс верно равенство

$$\overline{\tau}[+, \mu] = \overline{\tau}\left[\int, \mu\right]. \tag{7.21}$$

Как уже было замечено в начале п. 4 ((4.12′), (4.12″)),

$$\bar{\tau}[+, \mu] = \overline{T}_f; \quad \bar{\tau}\left[\int, \mu\right] = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \tag{7.22}$$

где μ — соответствующее функции $\ln|f(z)|$ распределение масс.

Условие

$$\underline{\tau}[1, \mu] \geqslant 0 \tag{7.23}$$

можно тогда переписать в виде

$$\overline{T}_f \leqslant 1,$$

что и доказывает неравенство

$$\tau(\rho) \leqslant D_{\min}(\rho). \tag{7.24}$$

Из (7.24) и (7.20) следует утверждение теоремы.

В заключение напомним, что значение $D_{\min}(\rho)$ вычислено для всех $0 < \rho < \infty$ [3, стр. 565].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М. ГИТТЛ, 1956.
2. А. А. Гольдберг. Интеграл по полуаддитивной мере и его приложения к теории целых функций. I, II, III, IV. «Матем. сб.», 58 (100), 1962, 61, 1963, 65, 1964, 1965.
3. А. А. Гольдберг, И. В. Островский. Распределение значений мероморфных функций. М., ФМЛ, 1970.
4. А. А. Кондратюк. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. I, II. «Литовск. матем. сб.», VII, № 1, 1967 VIII, № 1, 1968.
5. А. А. Гольдберг. Оценки индикаторов целых функций и интеграл по неаддитивной мере. Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций», Ереван, 1965.
6. А. А. Кондратюк. Целые функции с конечной максимальной плотностью нулей. Сб. «Теория функций и функциональный анализ», вып 10, 1970.
7. В. С. Азарин. О регулярности роста функционалов на целых функциях. Сб. «Теория функций и функциональный анализ», вып. 16, 1972.
8. Н. Бурбаки. Общая топология, III — VIII. ФМЛ, 1969.
9. М. Брело. Основы классической теории потенциала. М. «Мир», 1964.
10. А. А. Гольдберг. Экстремальный индикатор для целой функции с положительными нулями. «Сиб. матем. ж.», 3, 1962.
11. Н. В. Говоров. О гипотезе Пейли. «Функциональный анализ и его приложения», 3, 1969.
12. А. Робертсон и В. Робертсон. Топологические векторные пространства. М., «Мир», 1967.
13. M. Brelot. Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier. Ann. de l'Institut Fourier, 1950, I, 122—148.
14. В. С. Азарин. О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста. «Записки мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьк. матем. об-ва», т. XXVIII, сер. 4.

15. Г. Е. Шилов. Математический анализ, второй спецкурс. ФМЛ, 1965.
16. G. Valiron. Ann. fac. sci. de l'univ. de Toulouse 5, 117—257, 1914.
17. Хейман. Мероморфные функции. М., «Мир», 1966.

Поступила 19 марта 1971 г.