ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В БИКРУГЕ, И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. А. Какичев

1°. **Введение.** В [1] задача Гильберта для функций, голоморфных в бикруге, сформулирована следующим образом: найти функцию $\Phi(z, w) = U + iV$, голоморфную в бикруге $B_2 = \{(z, w) : |z| < 1, |w| < 1\} = D^+ \times \Delta^+$, по предельному соотношению

$$\operatorname{Re}[\bar{g}\Phi] \equiv \alpha U + \beta V = \gamma, \quad g = \alpha + i\beta, \ |g| = 1, \tag{1}$$

в котором известные вещественные функции α, β, γ определены и непрерывны по Гельдеру на основе $T_2 = \{(t, \omega) : |t| = 1, |\omega| = 1\}$ границы бикруга B_2.

В частности, при $g \equiv 1$ задача (1) превращается в задачу Дирихле [2] для функций, голоморфных в бикруге.

Задача Гильберта в [1] методом И. Н. Векуа [3] приводится к последовательному решению двух задач Дирихле. Здесь мы дадим еще два метода решения задачи (1): с помощью регуляризующего множителя [4] и, следуя методике, описанной в монографиях [4, 5], сведением к вырожденной задаче линейного сопряжения [6], которая в обозначениях, принятых в [6], выглядит так:

$$\overline{g(t, \omega)}\,\Phi^{++}(t, \omega) + g(t, \omega)\,\Phi^{--}(t, \omega) = 2\gamma(t, \omega). \tag{2}$$

Затем полученные результаты будут применены к решению бисингулярного уравнения с ядрами Гильберта и к решению краевой задачи для одной системы уравнений в частных производных. Ограничиваемся только случаем двух переменных, так как распространение полученных результатов на случай большего числа переменных вызывает только технические трудности.

Ниже систематически используются обозначения, принятые в работах [6—8].

2°. **Задача Дирихле.** Напомним, что задача Дирихле заключается в нахождении функции $\Phi(z, w) = U + iV$, голоморфной в бикруге B_2 и непрерывной по Гельдеру на T_2 по значению ее действительной части $U(z, w)$, заданной на T_2:

$$U(z, w)|_{T_2} = \gamma(t, \omega), \tag{3}$$

где $\gamma(t, \omega)$ — известная вещественная функция, удовлетворяющая на T_2 условию Гельдера.

Чтобы наперед заданная функция $U(z, w) = U(z, \bar{z}, w, \bar{w})$ была действительной частью функции $\Phi(z, w)$, голоморфной в некоторой области D, необходимо и достаточно [2], чтобы в D она удовлетворяла системе уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z} \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z} \partial w} = 0 \left(\text{или } \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{w}} = 0\right), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{w} \partial w} = 0. \tag{4}$$

Функцию $U(z, w)$, удовлетворяющую системе (4), называют (не совсем удачно) бигармонической в D.

Разлагая вещественную функцию $\gamma(t, \omega)$ в ряд Фурье, находим, что

$$\gamma(t, \omega) = \gamma_{00} + \operatorname{Re}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_{n0}t^n + \gamma_{0n}\omega^n) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(\gamma_{n\nu}t^n\omega^\nu + \gamma_{n,-\nu}t^n\bar{\omega}^\nu)\Big\}, \tag{5}$$

где

$$\gamma_{n\nu} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{T_2}\gamma(t, \omega)\frac{dt}{t^{n+1}}\frac{d\omega}{\omega^{\nu+1}} \equiv \langle\gamma(t, \omega), \bar{t}^n\bar{\omega}^\nu\rangle$$

и γ_{00} — вещественное число.

Из разложения (5) видно, что функция $\gamma(t, \omega)$ будет предельным значением при $(z, w) \in B_2$, $(t, \omega) \in T_2$ и $(z, w) \to (t, \omega)$ функции, бигармонической в B_2, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет счетному множеству условий

$$\langle\gamma(t, \omega), t^n\bar{\omega}^\nu\rangle = \langle\gamma(t, \omega), \bar{t}^n\omega^\nu\rangle = 0, \quad (n, \nu = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

Это счетное множество условий можно представить в виде конечного числа равенств [9], связывающих предельные значения интегралов типа Коши

$$K(\gamma)(z, w) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{T_2}\frac{\gamma(t, \omega)\,dt\,d\omega}{(t-z)(\omega-w)}$$

и $K(\gamma)(0, w)$, $K(\gamma)(z, 0)$, а решение задачи Дирихле (3) при выполнении условий (6) дает интеграл Шварца [9—10]:

$$\Phi(z, w) = 2K(\gamma)(z, w) - K(\gamma)(0, 0) + iC, \tag{7}$$

где C — произвольная вещественная постоянная, а функция $K(\gamma)(z, w)$, в силу условий (6) такова, что

$$K(\gamma)(z, w) = \begin{cases} K(\gamma)(z, 0) & \text{при } (z, w) \in D^- \times \Delta^+, \\ K(\gamma)(0, w) & \text{при } (z, w) \in D^+ \times \Delta^-. \end{cases}$$

Заметим, что те же условия (6) необходимы и достаточны для разрешимости задачи Дирихле (3) для функций, голоморфных в $D^- \times \Delta^-$, а решение такой задачи, как нетрудно проверить, дает интеграл

$$\Phi(z, w) = 2zwK\left(\frac{\gamma(t, \omega)}{t\omega}\right)(z, w) - K(\gamma)(0, 0) + iC =$$
$$= 2K(\gamma)(z, w) - 2K(\gamma)(z, 0) - 2K(\gamma)(0, w) + K(\gamma)(0, 0) + iC.$$

Следовательно, решение задачи Дирихле для области $D^- \times \Delta^-$ не представимо интегралом Шварца. Это связано с тем, что интеграл типа Коши $K(\gamma)(z, w)$ обращается в нуль во всех бесконечно удаленных точках области $D^- \times \Delta^-$.

Если же, кроме условий (6), выполняются условия $\gamma_{0n} = \gamma_{n0} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, решение задачи Дирихле для области $D^- \times \Delta^-$ определяется тем же интегралом Шварца (7).

Наконец, для разрешимости задачи Дирихле в областях $D^{\pm} \times \Delta^{\mp}$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\gamma(t, \omega)$ удовлетворяла условиям

$$\langle \gamma(t, \omega), \bar{t}^n \bar{\omega}^\nu \rangle = 0, \ n, \ \nu = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

При выполнении этих условий решение задачи Дирихле для области $D^+ \times \Delta^- (D^- \times \Delta^+)$ дает формула

$$\Phi(z, w) = -2K(\gamma)(z, w) + 2K(\gamma)(z, 0) - K(\gamma)(0, 0) + iC,$$
$$(\Phi(z, w) = -2K(\gamma)(z, w) + 2K(\gamma)(0, w) - K(\gamma)(0, 0) + iC).$$

Чтобы решение задачи Дирихле в такой области было представимо интегралом Шварца $-2K(\gamma)(z, w) - K(\gamma)(0, 0) + iC$, необходимо и достаточно, чтобы, кроме условий (8) выполнялись еще и условия $\gamma_{n0} = 0 \ (\gamma_{0n} = 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

3°. **Регуляризующий множитель.** Пусть $g(t, \omega) = \alpha + i\beta$ — известная функция класса H с частными индексами $n = l(g)$ и $\nu = \lambda(g)$. Следуя [4], поставим следующую задачу: найти функцию $r(t, \omega)$, именуемую регуляризующим множителем функции $g(t, \omega)$ такую, что

$$r(t, \omega) g(t, \omega) = t^n \omega^\nu \Phi(t, \omega), \ (t, \omega) \in T_2, \tag{9}$$

где $\Phi(t, \omega) \neq 0$ на T_2 и является предельным значением функции $\Phi(z, w)$, например, класса H^{++}.

Так как функция $\Phi(z, w)$ неизвестна, поставленная задача не определена. Если дополнительно предположить, что искомый множитель $r(t, \omega)$ обладает постоянными аргументом или модулем, задача (9) сводится к задаче Дирихле.

Отыскивая $r(t, \omega)$ с постоянным аргументом, без ограничения общности будем считать, что $r(t, \omega) > 0$ и положим $\Phi(t, \omega) =$

$= \exp(i\varphi^{++}(t, \omega))$. Тогда, приравнивая вещественные и мнимые части в равенстве (9), получаем

$$r\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |t|^n |\omega|^\nu \exp(-Im\varphi^{++}(t, w)) \tag{10}$$

и

$$\operatorname{Re}\varphi^{++} = \gamma(t, \omega), \tag{11}$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha} - n\arg t - \nu\arg\omega. \tag{12}$$

Если задача Дирихле (11), (12) разрешима, регуляризующий множитель $r(t, \omega)$ определим из формулы (10).

Этот множитель с постоянным аргументом определяется с точностью до постоянного положительного сомножителя. В самом деле, если r_1 и r_2 — два регуляризующих множителя функции $g(t, \omega)$, из равенства (9) следует, что $r_1/r_2 = \Phi_1/\Phi_2$, поэтому $Im(\Phi_1/\Phi_2) = 0$, а $\Phi_1/\Phi_2 = C > 0$, где C — произвольная постоянная; отсюда $r_1 = Cr_2$.

Таким образом, *функция* $g(t, \omega)$ *имеет регуляризующий множитель с постоянным аргументом тогда и только тогда, когда соответствующая ей функция (12) удовлетворяет условиям (6)*,

Для нахождения регуляризующего множителя с постоянным аргументом, равным (для определенности) единице, положим

$$r(t, \omega) = \exp(i\rho(t, \omega)), \quad l(r) = m, \quad \lambda(r) = \mu;$$
$$g(t, \omega) = |g|\exp(i\arg g); \quad \Phi(t, \omega) = \exp\varphi^{++}(t, \omega),$$

а равенство (9) заменим таким:

$$r(t, \omega)\, g(t, \omega) = t^{n+m}\omega^{\nu+\mu}\Phi(t, \omega). \tag{13}$$

Приравнивая в (13) модули, получаем задачу Дирихле (11) с

$$\gamma(t, \omega) = \ln(|g|). \tag{14}$$

Если задача Дирихле (11), (14) разрешима при некоторых целых m и μ, то, приравнивая в (13) аргументы, имеем соотношение

$$\rho + \arg g = (n+m)\arg t + (\nu+\mu)\arg\omega + Im\varphi^{++}(t, \omega),$$

из которого определим $\rho(t, \omega)$, а тем самым и множитель $r(t, \omega)$. В этом случае $\rho(t, \omega)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Итак, *если задача Дирихле (11), (14) разрешима при некоторых целых m и μ, функция $g(t, \omega)$ имеет регуляризующий множитель, по модулю равный единице.*

Заметим, что точно так же решается задача о регуляризующем множителе и в том случае, когда в равенствах (9), (13) функция $\Phi(t, \omega)$ является предельным значением функции $\Phi(z, w)$ класса H^{--} или $H^{\pm\mp}$. При этом надо воспользоваться решением соответствующей задачи Дирихле (см. 2°).

4°. **Решение задачи Гильберта с помощью регуляризующего множителя.** Пусть функция $g(t, \omega)$ из краевого условия (1) имеет частные индексы $n = l(g)$, $\nu = \lambda(g)$ и допускает, кроме того, регуляризующий множитель $r(t, \omega) > 0$ с постоянным аргументом. Тогда существует функция $\varphi(z, w) \in H^{++}$ такая, что

$$r(t, \omega) g(t, \omega) = t^n \omega^\nu \exp(i\varphi^{++}(t, \omega)),$$

и поэтому краевое условие однородной задачи Гильберта ($\gamma \equiv \equiv 0$ в (1)), которую обозначим (1о), можно записать так:

$$0 = \frac{1}{r} \operatorname{Re}(\bar{g}\Phi) = \operatorname{Re}\left(\frac{\Phi}{rg}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{P^{++}(t, \omega)}{t^n \omega^\nu}\right),$$

где $P^{++}(t, \omega) = \Phi^{++}(t, \omega) \exp(-i\varphi^{++}(t, \omega))$.

Если $n \geqslant 0$ и $\nu \geqslant 0$, то, как показывает непосредственный подсчет (см. также 5°), условию $\operatorname{Re}(t^{-n}\omega^{-\nu}P^{++}) = 0$ удовлетворяет $(2n+1)(2\nu+1)$ решений, голоморфных в B_2 и линейно независимых над полем вещественных чисел. Совокупность этих решений описывает функция $Q(z, w)$ такая, что выражение $z^n w^\nu Q(z, w)$ является произвольным полиномом $P(z, w)$, коэффициенты $P_{r\rho}$ которого удовлетворяют соотношениям

$$P_{r\rho} = -\overline{P_{2n-r,\, 2\nu-\rho}}, \quad r = 0, 1, \ldots, 2n, \quad \rho = 0, 1, \ldots, 2\nu.$$

Отсюда следует, что *при* $n \geqslant 0$ *и* $\nu \geqslant 0$ *общее решение разрешимой однородной задачи Гильберта (1о) определяется по формуле*

$$\Phi(z, w) = P(z, w) \exp(i\varphi(z, w))$$

и линейным образом зависит от $(2n+1)(2\nu+1)$ *вещественных произвольных постоянных.*

В [1] ошибочно утверждается, что таких решений $(2n+1) \times \times (2\nu+1) - 2n\nu$.

Если $n < 0$ *либо* $\nu < 0$, *задача (1о), как нетрудно видеть, и при наличии у функции* $g(t, \omega)$ *регуляризующего множителя* $r(t, \omega) > 0$ *голоморфных нетривиальных решений не имеет.*

Обратимся теперь к неоднородной задаче Гильберта и допустим, как и выше, что функция $g(t, \omega)$ имеет регуляризующий множитель $r(t, \omega) > 0$. Тогда краевое условие (1) можно записать в виде задачи Дирихле

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\psi^{++}(t, \omega)}{t^n \omega^\nu}\right) \equiv \operatorname{Re}(\Phi_1^{++}(t, \omega)) = \gamma_1(t, \omega), \tag{15}$$

где

$$\gamma_1(t, \omega) = \gamma(t, \omega) \exp(Im\varphi^{++}(t, \omega))$$

и

$$\psi^{++}(t, \omega) = \Phi^{++}(t, \omega) \exp(-i\varphi^{++}(t, \omega)).$$

Решение $\Phi_1(z, w)$ задачи (15) и решение $\Phi(z, w)$ задачи (1) связаны соотношением

$$\Phi(z, w) = z^n w^\nu \Phi_1(z, w) \exp(i\varphi(z, w)). \tag{16}$$

Допустим, что задача (15) разрешима, тогда при $n \geqslant 0$ и $\nu \geqslant 0$ найдем общее решение (15), а тем самым по формуле (16) и общее решение исходной задачи Гильберта (1), которое, очевидно, будет содержать $(2n+1)(2\nu+1)$ произвольных вещественных постоянных. Если же $n < 0$ или $\nu < 0$, то потребовав, чтобы правая часть формулы (16) принадлежала классу H^{++}, найдем необходимые и достаточные условия (на известную теперь функцию $\Phi_1(z, w) \exp \times \times (i\varphi(z, w)))$ существования голоморфного частного решения у задачи (1).

Вспоминая, что множитель $r(t, \omega)$ функции $g(t, \omega)$ определяется решением задачи Дирихле, приходим к результату работы [1]: *полный анализ задачи* (1) *равносилен последовательному анализу двух неоднородных задач Дирихле.*

Точно так же можно провести полное исследование задачи Гильберта для областей $D^- \times \Delta^-$, $D^\pm \times \Delta^\mp$.

5°. **Решение задачи (1) сведением к задаче (2).** Каждой функции $\varphi(z, w)$, голоморфной в одной из четырех областей $D^\pm \times \Delta^\pm$, поставим в соответствие функцию $\varphi_*(z, w) = \overline{\varphi(1/\bar{z}, 1/\bar{w})}$. Введенное здесь отображение $*$ является инволюцией $[\varphi_*(z, w)]_* = \varphi(z, w)$ и каждой функции класса $\overset{\pm+}{H}{}^{\mp}_{+}$ $(\overset{\mp-}{H}{}_{-})$ ставит в соответствие функцию класса $\overset{\mp-}{H}{}_{-}$ $(\overset{\pm+}{H}{}_{+})$, а функции $\Phi(z, w) \equiv \Phi^{++}(z, w)$, удовлетворяющей условию (1), функцию $\Phi_*(z, w) \equiv \Phi^{--}(z, w)$.

Отсюда, а также из равенств $t\bar{t} = 1$ и $\omega\bar{\omega} = 1$ следует, что

$$\Phi^{--}(t, \omega) = \Phi^{++}_*(t, \omega) = \overline{\Phi^{++}(t, \omega)}. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что каждое решение $\Phi(z, w) = \Phi^{++}(z, w)$ задачи (1) является решением (2), если $\Phi^{--}(z, w) = \Phi_*(z, w)$. Наоборот, если пара функций $\Phi^{\pm\pm}(z, w)$ является решением задачи (2), функция

$$\widehat{\Phi}(z, w) = \frac{1}{2}\{\Phi^{++}(z, w) + \Phi^{--}_*(z, w)\}$$

будет частным решением неоднородной задачи (1), так как условию (2) удовлетворяет и пара $\Phi^{\mp\mp}_*(z, w)$.

Теперь для получения общего решения задачи (1o) надо из общего решения $\{\Phi_0^{++}(z, w), \Phi_0^{--}(z, w)\}$ однородной ($\gamma \equiv 0$ в (2)) задачи (2o) выделить подпространство всех ограниченных линейно независимых его решений, удовлетворяющих условию

$$\Phi_0^{++}(z, w) = \Phi_{0*}^{--}(z, w). \tag{18}$$

Тогда функция $\Phi_0^{++}(z, w)$, удовлетворяющая условию (18), определит совокупность всех линейно независимых над полем вещественных чисел решений однородной задачи (1о).

Переходя к решению задачи (2), как и в [6], положим

$$g_1(t, \omega) = 2\gamma(t, \omega)/\overline{g(t, \omega)},\ G_1(t, \omega) = -g(t, \omega)/\overline{g(t, \omega)}, \quad (19)$$
$$l(G_1) = 2l(g) = 2n, \quad \lambda(G_1) = 2\lambda(g) = 2\nu,$$
$$G_{10}(t, \omega) = t^{-2n}\omega^{-2\nu}G_1(t, \omega), \quad E(z, w) = iK(\arg G_{10})(z, w).$$

Учитывая тождество

$$\frac{d\bar{t}d\bar{\omega}}{(\bar{t}-1/z)(\bar{\omega}-1/w)} = \left[\frac{1}{(t-z)(\omega-w)} - \frac{1}{(\omega-w)t} - \frac{1}{(t-z)\omega} + \frac{1}{t\omega}\right] dt\, d\omega,$$

найдем

$$E_*(z, w) = -E(z, w) + E(0, w) + E(z, 0) - E(0, 0).$$

Из условий разрешимости однородной задачи (2о), которые в данном случае имеют вид [6]

$$S(\arg G_{10}) = \arg G_{10}, \quad (20)$$

следует $E^{\pm\mp}(z, w) = 0$. Поэтому

$$E(0, w) = 0 \text{ при } w \in \Delta^- \text{ и } E(z, 0) = 0 \text{ при } z \in D^-.$$

Таким образом,

$$E_*(z, w) = -E(z, w) - iE_0 \text{ при } (z, w) \in D^- \times \Delta^-$$

и

$$E(z, w) = -E_*(z, w) + iE_0 \text{ при } (z, w) \in D^+ \times \Delta^+,$$

где $E_0 = -iE(0, 0)$ — вещественная постоянная.

Канонические функции $\chi^{\pm\pm}(z, w)$, входящие в решение [6] задачи (2), возьмем в форме

$$\chi(z, w) = \exp\left(-\frac{1}{2}E_0 + E(z, w)\right) \text{ при } (z, w) \in D^+ \times \Delta^+,$$

$$\chi(z, w) = z^{-2n}w^{-2\nu}\exp\left(-\frac{i}{2}E_0 + E(z, w)\right) \text{ при } (z, w) \in D^- \times \Delta^-.$$

Отсюда с учетом свойств функции $E(z, w)$ найдем

$$\chi(z, w) = z^{2n}w^{2\nu}\chi(z, w) \text{ при } (z, w) \in D^{\pm} \times \Delta^{\pm}.$$

Пусть $n \geqslant 0$ и $\nu \geqslant 0$. Тогда общее решение

$$\Phi_0(z, w) = \chi(z, w)P(z, w),\ P(z, w) = \sum_{s=0}^{2n}\sum_{\sigma=0}^{2\nu} P_{s\sigma}z^s w^\sigma \quad (21)$$

задачи (2о) будет решением задачи (1о) при выполнении условия

$$\chi(z, w)P(z, w) = \chi_*(z, w)P_*(z, w),$$

которое имеет место лишь в том случае, когда коэффициенты $P_{s\sigma}$ полинома $P(z, w)$ удовлетворяют соотношениям

$$P_{s\sigma} = \overline{P_{2n-s,\, 2\nu-\sigma}},\quad s = 0, 1, \ldots, 2n,\quad \sigma = 0, 1, \ldots, 2\nu. \tag{22}$$

Отсюда, как и выше, следует, что при $n \geqslant 0$ и $\nu \geqslant 0$ задача (1о) имеет $(2n+1)(2\nu+1)$ решений, линейно независимых над полем вещественных чисел.

Если выполняются еще и условия

$$z^{-2n}\psi^{-+}(z, w),\ w^{-2\nu}\psi^{+-}(z, w) \in H_0^{-+}, \tag{23}$$

где $g/\varkappa^{++} = \psi^{++} - \psi^{-+} - \psi^{+-} + \psi^{--}$,
которые вместе с (20) необходимы и достаточны [6] для разрешимости (2), задача (1) также разрешима, а общее решение (1) является суммой общего решения $\Phi_0^{++}(z, w)$ однородной задачи (1о) и любого частного решения $\widehat{\Phi}^{++}(z, w)$ неоднородной задачи (1).

Случаи, когда $n < 0$ либо $\nu < 0$, мы не рассматриваем. Они проводятся по описанной здесь схеме с учетом соответствующих результатов работы [6].

6°. **Бисингулярное уравнение с ядрами Гильберта.** Пусть

$$t = e^{is},\quad \omega = e^{i\sigma},\quad 0 \leqslant s,\quad \sigma \leqslant 2\pi$$

и

$$\Phi^{++}(t, \omega) = U(t, \omega) + iV(t, \omega) = U(s, \sigma) + iV(s, \sigma)$$

— предельное значение функции $\Phi(z, w) \in H^{++}$. Тогда при выполнении условия

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} V(s, \sigma)\, ds\, d\sigma = 0 \tag{24}$$

имеет место равенство [10]

$$V(s, \sigma) = \Gamma_2[U](s, \sigma) \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{4\pi^2}\left[\int_0^{2\pi} U(s_1, \sigma)\operatorname{ctg}\frac{s_1 - s}{2}\, ds_1 + \int_0^{2\pi} U(s, \sigma_1)\operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}\, d\sigma_1\right] +$$
$$+ \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U(s_1, \sigma_1)\left[\operatorname{ctg}\frac{s_1 - s}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\sigma_1 - \sigma}{2}\right] ds_1\, d\sigma_1. \tag{25}$$

Бисингулярное уравнение с ядрами Гильберта

$$\alpha(s, \sigma)\, U(s, \sigma) + \beta(s, \sigma)\, \Gamma_2[U](s, \sigma) = \gamma(s, \sigma), \tag{26}$$

где α, β, γ — *вещественные функции, удовлетворяющие условию Гельдера, равносильно адаче Гильберта* (1), *решение которой должно удовлетворять условию* (24). Решение $U(s, \sigma)$ уравнения (26) отыскивается в классе функций, являющихся предельными значениями функций $U(z, w)$, бигармонических в B_2. Поэтому уравнение (25), так же, как и задача Гильберта, разрешимо лишь при выполнении условий (20), (23), к которым теперь надо добавить еще и условие (24).

Сначала исследуем однородное ($\gamma \equiv 0$ в (26)) уравнение (26о), предполагая, что функция $\alpha + i\beta$ имеет частные индексы $n \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ и удовлетворяет необходимому и достаточному уравнению разрешимости (20), которое в данном случае выглядит так:

$$S\left\{\arg\left(t^{-2n}\omega^{-2\nu}\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right) = \arg\left\{t^{-2n}\omega^{-2\nu}\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right)\right. . \tag{27}$$

Допуская $n = \nu = 0$, найдем, что общее решение уравнения (26о) в силу формул (21), (22) дает функция $C\,\mathrm{Re}\,\chi^{++}(t, \omega)$, где C — произвольная вещественная постоянная, если выполняется условие (24):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Im\chi^{++}(e^{is}, e^{i\sigma})\,ds\,d\sigma = -\int_{T_2} Im\chi^{++}(t, \omega)\frac{dt}{t}\,\frac{d\omega}{\omega} = 0.$$

Если же последнее равенство не имеет места, уравнение (26о) при $n = \nu = 0$ неразрешимо.

Пусть теперь $n > 0$, $\nu \geqslant 0$ или $n \geqslant 0$, $\nu > 0$, тогда, полагая (22)

$$q_{n-r,\,\nu-\rho} = P_{r\rho}, \quad r = 0, 1, \ldots, n, \quad \rho = 0, 1, \ldots, \nu$$

и

$$Q(t, \omega) = t^{-n}\omega^{-\nu}P(t, \omega) = q_{00} + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n} q_{k0}t^k + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} q_{0\varkappa}\omega^\varkappa + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}(q_{k\varkappa}t^k\omega^\varkappa + q_{k,\,-\varkappa}t^k\overline{\omega}^\varkappa)\right\},$$

находим, что $ImQ(t, \omega) = 0$.

Следовательно, решение уравнения (26о) определяется по формуле

$$U(s, \sigma) = \xi(t, \omega)Q(t, \omega), \quad \xi(t, \omega) = \mathrm{Re}(t^n\omega^\nu\chi^{++})$$

при выполнении условия

$$\int_{T_2}\eta(t, \omega)Q(t, \omega)\frac{dt}{t}\,\frac{d\omega}{\omega} = 0, \quad \eta(t, \omega) = Im(t^n\omega^\nu\chi^{++}),$$

которое, учитывая структуру $Q(t, \omega)$, можно записать в виде суммы

$$q_{00}\eta_{00} + \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n} q_{k0}\eta_{k0} + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} q_{0\varkappa}\eta_{0\varkappa} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}(q_{k\varkappa}\eta_{k\varkappa} + q_{k,\,-\varkappa}\eta_{k,\,-\varkappa})\right\} = 0, \tag{28}$$

где

$$\eta_{k\varkappa} = \langle \eta(t, \omega), \overline{t^k \overline{\omega}^\varkappa} \rangle$$

— коэффициенты Фурье вещественной функции $\eta(t, \omega)$.

Так как не все коэффициенты $\eta_{k\varkappa}$, входящие в формулу (28), равны нулю, произвольные коэффициенты $q_{k\varkappa}$ связаны одной зависимостью (28) и, следовательно, при выполнении условия (27) уравнение (26о) имеет $4n\nu + 2(n + \nu)$ линейно независимых решений над полем вещественных чисел. Если $n < 0$, или $\nu < 0$, задача (1о) неразрешима, а с нею неразрешимо и уравнение (26о).

Переходя к неоднородному уравнению (26), допустим, что α и β удовлетворяют условию (27), а α, β, γ — и условию (23). Если $n = \nu = 0$, $r(t, \omega)$ — регуляризующий множитель функции $q(t, \omega) = \alpha + i\beta$, причем

$$r(t, \omega) g(t, \omega) = \exp(i\varphi^{++}(t, \omega)) = \xi(t, \omega) + i\eta(t, \omega)$$

и

$$\gamma_1(t, \omega) = \gamma(t, \omega) \exp(Im\varphi^{++}(t, \omega)),$$

общее решение задачи Гильберта

$$\mathrm{Re}(\Phi^{++} \exp(-i\varphi^{++})) = \gamma_1(t, \omega),$$

соответствующей уравнению (26), дает формула

$$\Phi(z, w) = [2K(\gamma_1)(z, w) - K(\gamma_1)(0, 0) + iC] \exp(i\varphi(z, w)),$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Отсюда и из граничных свойств интеграла типа Коши $K(\gamma_1)$ следует, что решение уравнения (26) дает формула [10]

$$U(t, \omega) = \xi(t, \omega)\gamma_1(t, \omega) - \eta(t, \omega)[C + \Gamma_2[\gamma_1](t, \omega)].$$

если выполняется условие (24), которое в данном случае имеет вид

$$\int_{T_2} \{\eta(t, \omega)\gamma_1(t, \omega) + \xi(t, \omega)[C + \Gamma_2[\gamma_1](t, \omega)]\} \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega} = 0. \quad (29)$$

Учитывая, что [8]

$$\Gamma_2[\xi](t, \omega) = \eta(t, \omega) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{T_2} \eta(t, \omega) \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega}$$

и переставляя интегралы, находим

$$\int_{T_2} \xi(t, \omega)\Gamma_2[\gamma_1](t, \omega) \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega} = \int_{T_2} \gamma_1(t, \omega)\Gamma_2[\xi](t, \omega) \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega} =$$

$$= \int_{T_2} \gamma_1(t, \omega)\eta(t, \omega) \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega} - \frac{1}{4\pi^2} \int_{T_2} \eta(t, \omega) \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega} \int_{T_3} \gamma_1(t, \omega) \frac{dt}{t} \frac{d\omega}{\omega}.$$

Отсюда и из (29) следует равенство

$$CM(\xi)+2M(\gamma_1\eta)=\frac{1}{4\pi^2}M(\eta)M(\gamma_1), \tag{30}$$

в котором

$$M(\psi)=\int\limits_{T_2}\psi(t,\ \omega)\frac{dt}{t}\ \frac{d\omega}{\omega}=\psi_{00}.$$

Пусть уравнение (26о) неразрешимо и, значит, $M(\xi)\neq 0$. Тогда равенству (30) можно удовлетворить путем выбора постоянной C, и, следовательно, уравнение (26) в этом случае имеет единственное решение.

Если же $M(\xi)=0$, неоднородное уравнение (26) неразрешимо, а условие его разрешимости, связывающее свободные коэффициенты Фурье функций $\gamma_1\eta$, η и γ_1, имеет вид

$$8\pi^2 M(\gamma_1\eta)=M(\eta)M(\gamma_1).$$

Ввиду громоздких выкладок не будем здесь рассматривать другие случаи и заметим только следующее. Если $n>0$, $\nu\geqslant 0$ или $n\geqslant 0$, $\nu>0$, неоднородное уравнение (26) при выполнении условий разрешимости (20), (23) и (24) имеет решение, зависящее от $4n\nu+2(n+\nu)$ произвольных вещественных постоянных.

Если же $n<0$ или $\nu<0$, уравнение (26) разрешимо лишь в том случае, когда, кроме условий (20) и (23), функция g_1/χ^{++} удовлетворяет дополнительно счетному множеству необходимых и достаточных условий разрешимости, накладываемых на коэффициенты Фурье функции g_1/χ^{++}. Напомним, что условия (20), (23) также равносильны обращению в нуль счетного множества коэффициентов Фурье функций $\arg G_{10}$ и g_1/χ^{++}.

Таким образом, уравнение (26), содержащее операторы, которые не являются вполне непрерывными, имеет конечное число решений при выполнении счетного множества условий разрешимости. Следовательно, его индекс отрицательно полубесконечен [8], в чем и состоит основное отличие случая двух переменных от случая одного переменного.

7°. **Об одной краевой задаче для $(p,\ q)$-голоморфных функций.** Вещественную функцию $U(x,\ y,\ u,\ v)=U(z,\ \bar z,\ w,\ \bar w)$ будем при $p\geqslant 1$ и $q\geqslant 1$ называть $(p,\ q)$-гармонической в области D, если она в этой области удовлетворяет системе уравнений в частных производных

$$D^{pp}_{\bar z z}U\equiv\frac{\partial^{2p}U}{\partial\bar z^p\partial z^p}=0,\quad D^{qq}_{\bar w w}U\equiv\frac{\partial^{2q}U}{\partial\bar w^q\partial w^q}=0, \tag{31}$$

$$D^{pq}_{\bar z w}U\equiv\frac{\partial^{p+q}U}{\partial\bar z^p\partial w^q}=0,\quad D^{pq}_{z\bar w}U\equiv\frac{\partial^{p+q}U}{\partial z^p\partial\bar w^q}=0, \tag{32}$$

где, как нетрудно видеть, $D^{pq}_{\bar z w}U=0$ влечет за собой $D^{pq}_{z\bar w}U=0$.

В частности, (1,1) — гармоническая в D функция (см. (4)) — является просто бигармонической в D и, следовательно, существует голоморфная в D функция $F(z, w)$ такая, что $U = \operatorname{Re} F$.

Учитывая соответствующие результаты, относящиеся к функциям, которые удовлетворяют только первому уравнению системы (31), решение (31), (32) естетственно искать в виде суммы [4]

$$U = \operatorname{Re} \sum_{r=0}^{p-1} \bar{z}^r \varphi_r(z, w),$$

где $\varphi_r(z, w)$ — функции, голоморфные по z при фиксированном w, если $(z, w) \in D$. Пусть точка $(0, 0) \in D$, тогда в некоторой ее окрестности имеет место разложение

$$\varphi_r(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{rk}(w) z^k.$$

Отсюда и из системы (31), (32) следует, что функции $Im\varphi_{rk}(w)$, $\operatorname{Re} \varphi_{rk}(w)$ должны удовлетворять второму уравнению системы (31) и поэтому [4]

$$\varphi_{rk}(w) = \sum_{s=0}^{q-1} \bar{w}^s \varphi_{rks}(w) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi_{rks}(w)}{\partial \bar{w}} = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi_r(z, w) = \sum_{s=0}^{q-1} \bar{w}^s \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{rks}(w) z^k \equiv \sum_{s=0}^{q-1} \bar{w}^s f_{rs}(z, w),$$

а

$$U = \operatorname{Re} \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{q-1} \bar{z}^r \bar{w}^s f_{rs}(z, w),$$

где $f_{rs}(z, w)$ — некоторые голоморфные в D функции, причем функция U удовлетворяет системе (31), (32).

Будем называть (p, q)-гармоническую функцию

$$V = Im \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{q-1} \bar{z}^r \bar{w}^s f_{rs}(z, w)$$

сопряженной к (p, q)-гармонической функции U, а функцию $F(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = U + iV$, также удовлетворяющую системе (31), (32), (p, q)-голоморфной в D (ср. с [11]). Например, функция $\bar{z}^p \bar{w}^q$ удовлетворяет уравнениям системы (31), но не удовлетворяет уравнениям системы (32) и не является (p, q)-голоморфной в C^2.

Нетрудно видеть, что

$$D^{kl\mu\nu}_{\bar{z}z\bar{w}w}F \equiv \frac{\partial^{k+l+\mu+\nu}F}{\partial\bar{z}^k\partial z^l\partial\bar{w}^\mu dw^\nu} =$$

$$= \sum_{r=k}^{p-1}\sum_{s=\mu}^{q-1}\frac{r!s!}{(r-k)!(s-\mu)!}\bar{z}^{r-k}\bar{w}^{s-\mu}D^{l\nu}_{zw}f_{rs}(z, w), \tag{33}$$

$$0 \leqslant k \leqslant p-1, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant q-1, \quad l, \nu = 0, 1, \ldots$$

(p, q)-голоморфная функция F полностью определяется заданием pq голоморфных в D функций $f_{rs}(z, w)$, которые, в свою очередь, могут быть определены, например, из pq краевых условий, заданных на границе Шилова области D.

Приведем пример таких краевых условий. Пусть $\alpha_{k\nu}(t, \omega)$, $\beta_{k\nu}(t, \omega)$, $\gamma_{k\nu}(t, \omega)$ — вещественные функции, удовлетворяющие на T_2 условию Гельдера и

$$g_{k\nu} = \alpha_{k\nu} + i\beta_{k\nu}, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1, \ \nu = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Требуется найти (p, q)-голоморфную в B_2 функцию $F = U + iV$, удовлетворяющую следующим краевым условиям, заданным на T_2:

$$\alpha_{k\nu}D^{kk\nu\nu}_{\bar{z}z\bar{w}w}U + \beta_{k\nu}D^{kk\nu\nu}_{\bar{z}z\bar{w}w}V = \gamma_{k\nu}$$

$$k = 0, 1, \ldots, p-1, \quad \nu = 0, 1, \ldots, q-1,$$

которые можно записать и так (34)

$$\operatorname{Re}(\bar{g}_{k\nu}D^{kk\nu\nu}_{\bar{z}z\bar{w}w}F) = \gamma_{k\nu}, \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots, p-1, \\ \nu = 0, 1, \ldots, q-1. \end{matrix}$$

Для решения этой краевой задачи образуем функции

$$\Phi_{k\nu}(z, w) = \sum_{r=k}^{p-1}\sum_{s=\nu}^{q-1}\frac{s!r!}{(s-\nu)!(r-k)!}\frac{D^{k\nu}_{zw}(z^r w^s\varphi_{rs}(z, w))}{z^{r-k}w^{s-\nu}}, \tag{35}$$

которые голоморфны в B_2, если в B_2 голоморфны функции $\varphi_{rs}(z, w)$. Учитывая, что $t\bar{t} = 1$, $\omega\bar{\omega} = 1$ на T_2 и сопоставляя равенства (33) и (35) при $\mu = \nu$, $l = k$, находим, что

$$D^{kk\nu\nu}_{\bar{z}z\bar{w}w}F(t, \bar{t}, \omega, \bar{\omega}) = \Phi_{k\nu}(t, \omega),$$

если $f_{rs}(z, w) = z^r w^s\varphi_{rs}(z, w)$ в B_2.

Следовательно, краевые условия (34) можно заменить такими:

$$\operatorname{Re}(\bar{g}_{k\nu}\Phi_{k\nu}) = \gamma_{k\nu}(t, \omega), \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots, p-1, \\ \nu = 0, 1, \ldots, q-1. \end{matrix} \tag{36}$$

В результате имеем pq краевых задач Гильберта для определения функций $\Phi_{k\nu}$, голоморфных в B_2.

Если хотя бы одна из этих задач не разрешима в B_2, то не разрешима и исходная краевая задача.

Допустим, что все задачи Гильберта (36) разрешимы, тогда решение краевой задачи (34) сводится к определению функций $\varphi_{rs}(z, w)$ по функциям $\Phi_{k\nu}(z, w)$. Покажем, как это можно сделать. Пусть сначала $k = p-1$ и $\nu = q-1$. В таком случае

$$\frac{1}{(p-1)!\,(q-1)!}\Phi_{p-1,\,q-1}(z, w) = D_{z,\,w}^{p-1,\,q-1}(z^{p-1}w^{q-1}\varphi_{p-1,\,q-1}(z, w)).$$

Интегрируя это равенство $p-1$ раз по z и $q-1$ раз по w и учитывая, что функция $z^{p-1}w^{q-1}\varphi_{p-1,\,q-1}(z, w)$ обращается в нуль в точках $(z, 0)$ и $(0, w)$ вместе со своими производными $D_{zw}^{\alpha\beta}$ при $0 \leqslant \alpha + \beta < p + q - 2$, найдем, что функция $\varphi_{p-1,\,q-1}(z, w)$ однозначно определяется по функции $\Phi_{p-1,\,q-1}(z, w)$.

Пусть уже определены функции φ_{rs} при $r = k+1, \ldots, p-1$, $s = \nu$ и $s = \nu + 1, \ldots, q-1$, $r = k$ и при $r = k+1, \ldots, p-1$, $s = \nu + 1, \ldots, q-1$. Тогда из (34) следует, что функция

$$\Psi_{k\nu}(z, w) \equiv \Phi_{k\nu}(z, w) - k!\,\nu!\,D_{zw}^{k\nu}(z^k w^\nu \varphi_{k\nu}(z, w))$$

известна. Интегрируя это равенство, получаем

$$f_{k\nu}(z, w) = z^k w^\nu \varphi_{k\nu}(z, w) = \frac{1}{k!\,\nu!\,(k-1)!\,(\nu-1)} \times$$
$$\times \int_0^z \int_0^w (z-t)^{k-1}(w-\omega)^{\nu-1}[\Phi_{k\nu}(t, \omega) - \Psi_{k\nu}(t, \omega)]\,dt\,d\omega,$$

Подставляя найденные значения $f_{rs}(z, w)$ в формулу (35), находим решение задачи (34).

Нетрудно видеть, что задача (34) является частным случаем более общей задачи

$$\operatorname{Re}(G\widehat{F}) = \gamma(t, \omega), \tag{37}$$

где G — известная матрица порядка $(pq) \times (pq)$; γ — известная вектор-функция порядка pq с вещественными компонентами; $\widehat{F}$ — искомая вектор-функция с компонентами

$$F_s = F_{\sigma,\,\rho} = D_{zz\bar{w}w}^{\sigma\sigma\rho\rho}F,\ 0 \leqslant \sigma,\ \rho \leqslant s,\ \sigma + \rho = s,$$
$$s = 0, 1, \ldots, (p-1)(q-1).$$

Здесь пары чисел σ и ρ упорядочены лексикографически.

Если существует вещественная матрица $A(t, \omega)$ (назовем ее регуляризующей) такая, что матрица $\widehat{G} = AG$ является верхней или нижней треугольной, то, подействовав на (37) слева матрицей A, получим краевую задачу $\operatorname{Re}(\widehat{G}\widehat{F}) = \widehat{\gamma}$ (где $\widehat{\gamma} = A\gamma$), которая при выполнении определенных условий разрешимости может быть решена так же, как и задача (34). Для нее G является попросту диагональной.

Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$\alpha_{k\nu}\frac{\partial^{p+q-2}U}{\partial x^{p-k-1}\partial y^k\partial u^{q-\nu-1}\partial v^\nu}+\beta_{k\nu}\frac{\partial^{p+q-2}V}{\partial x^{p-k-1}\partial y^k\partial u^{q-\nu-1}\partial v^\nu}=\gamma_{k\nu},\qquad(38)$$

$$k=0,\ 1,\ldots,p-1,\quad \nu=0,\ 1,\ldots,q-1$$

где $\alpha_{k\nu}$, $\beta_{k\nu}$, $\gamma_{k\nu}$ те же, что и в (34).

Учитывая равенства вида [4]

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-k-1}\partial y^k}=i^k\sum_{\alpha=0}^{p-k-1}\sum_{\beta=0}^{k}(-1)^\beta C_{p-k-1}^\alpha C_k^\beta\frac{\partial^{p-1}}{\partial\bar z^{\alpha+\beta}\partial z^{p-\alpha-\beta-1}}\equiv$$

$$\equiv\sum_{\sigma=0}^{p-1}A_{pk\sigma}D_{\bar z,\ z}^{\sigma,\ p-\sigma-1},\ A_{pk\sigma}\equiv i^k\sum_{\alpha=\max(0,\ \sigma-k-1)}^{\min(\sigma,\ p-k)}(-1)^{\sigma-\alpha}C_{p-k-1}^\alpha C_k^{\sigma-\alpha},$$

найдем

$$\frac{\partial^{p+q-2}}{\partial x^{p-k-1}\partial y^k\partial u^{q-\nu-1}\partial v^\nu}=\sum_{\sigma=0}^{p-1}\sum_{\rho=0}^{q-1}B_{k\nu\sigma\rho}D_{\bar z,\ z,\ \bar w,\ w}^{\sigma,\ p-\sigma-1,\ \rho,\ q-\rho-1},$$

где $B_{k\nu\sigma\rho}=A_{pk\sigma}A_{q\nu\rho}$.

Отсюда следует, что условия задачи (38) можно записать так:

$$\operatorname{Re}\left(\bar g_{k\nu}\sum_{\sigma=0}^{p-1}\sum_{\rho=0}^{q-1}B_{k\nu\sigma\rho}D_{\bar z,\ z,\ \bar w,\ w}^{\sigma,\ p-\sigma-1,\ \rho,\ q-\rho-1}F\right)=\gamma_{k\nu},\qquad(39)$$

$$k=0,\ 1,\ldots,p-1,\quad \nu=0,\ 1,\ldots,q-1.$$

Задача (39) может быть решена (если она разрешима), как и задача (34), с использованием формул (33). Однако решение громоздко, и мы его опускаем.

Отметим, что задача (39) является частным случаем задачи (37), если в последней положить

$$F_{\sigma,\rho}=D_{\bar z,\ z,\ \bar w,\ w}^{\sigma,\ p-\sigma-1,\ \rho,\ q-\rho-1}F.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Бородин. Краевые задачи для голоморфных функций в пространстве одного или нескольких переменных. Автореф. канд. дисс., Донецк, 1969.

2. Б. А. Фукс. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. М. — Л., ГИТТЛ, 1948.

3. И. Н. Векуа. Об одной линейной граничной задаче Римана. «Труды Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР», т. XI, 1942.

4. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.

5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

6. В. А. Какичев. Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теорая функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 5. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.

7. В. А. Какичев. Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. ДАН СССР, т. 178, 1968, № 5.

8. В. А. Какичев. Методы решения краевых задач линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.

9. В. А. Какичев. Об условиях плюригармоничности функции, крутногармонической в круговом полицилиндре. «Уч. зап. МОПИ», т. 90, вып. 7.

10. В. А. Какичев. Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных. «Изв. вузов, математика», № 2 (9), 1959.

11. М. Б. Балк и М. Ф. Зуев. О полианалитических функциях. УМН, т. XXV, вып. 5, (155), 1970.

Поступила 8 февраля 1971 г.