ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ И ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ И НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД

И. Е. Тарапов

Вопросы гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред разрабатываются в последние годы в ряде работ [1—4].

В настоящей работе рассматривается полная система уравнений и основные закономерности движения среды, поляризующейся и намагничивающейся в электромагнитном поле. Формулируется краевая задача электродинамики движущихся сред и анализируются соотношения на поверхностях разрыва в идеальной среде.

1. Полная система основных уравнений

Движение жидкой или газообразной проводящей среды, которая может существенно намагничиваться и поляризоваться в электромагнитном поле, описывается системой уравнений механики сплошной среды и уравнений Максвелла.

Пусть K^* — система координат, в которой рассматриваемый элемент среды покоится в данный момент (мгновенно сопутствующая этому элементу система). Все величины, относящиеся к этой системе, будем обозначать индексом*.

Пусть K — инерциальная система координат, в которой рассматриваемый элемент движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ (лабораторная система координат, или система координат неподвижного наблюдателя). Таким образом, $\boldsymbol{v}$ — скорость системы K^* относительно K.

Тогда в системе K^* в нерелятивистском приближении ($v^2/c^2 \ll 1$) уравнения движения рассматриваемого элемента среды можно записать в виде[1]

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = -\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\rho}\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} + f_i^*, \quad \boldsymbol{\rho}\,T\frac{ds'^*}{dt} = \Phi^*. \qquad (1.1)$$

Здесь f^* — сила, действующая на единицу объема среды в результате ее взаимодействия с электромагнитным полем; эта сила равна нулю, как только в системе K^* электромагнитное поле исчезает ($E^* = H^* = 0$); p_{ik} — тензор гидродинамических напряжений, определяющий функциональную зависимость напряжений от соответствующих аргументов, причем на эту зависимость не влияет электромагнитное поле, так что, если принять гипотезу Ньютона,

$$p_{ik} = -\boldsymbol{\delta}_{ik}p + \boldsymbol{\tau}_{ik} \equiv -p\boldsymbol{\delta}_{ik} + \\ + \boldsymbol{\eta}(p, T)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \left(\boldsymbol{\eta}'(p, T) - \frac{2}{3}\boldsymbol{\eta}\right)\boldsymbol{\delta}_{ik}\frac{\partial v_e}{\partial x_e}; \qquad (1.2)$$

[1] Греческими полужирными буквами обозначены обычные скаляры.

s'^* — удельная энтропия в движущемся элементе среды с учетом энергии электромагнитного поля; Φ — диссипативная функция, определяющая рассеивание энергии электромагнитного поля и энергии механического движения, и если процесс поляризации обратим, то

$$\Phi^* = \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + j^* \cdot E^*. \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1) учтено, что с точностью до членов порядка v^2/c^2 в силу известных преобразований Лоренца получим (например, [5, 6]):

$$\rho^* = \rho; \quad p^* = p; \quad T^* = T; \quad p^*_{ik} = p_{ik}; \quad \left(\frac{dv_i}{dt}\right)^* = \frac{dv_i}{dt}.$$

В дополнение к уравнениям механики сплошной среды (1.1) имеем для описания движения рассматриваемых сред уравнения Максвелла, которые в системе K имеют вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, && \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_e, && \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - 4\pi \boldsymbol{j}, \end{aligned} \tag{1,4}$$

причем значения электромагнитных величин в системах (K^*) и (K) связаны соотношениями (с точностью до v^2/c^2)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{D}), \quad \boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}), \\ &\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \quad \boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}), \\ &\qquad \rho_e^* = \rho_e, \quad \boldsymbol{j}^* = \boldsymbol{j} - \rho_e \boldsymbol{v}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Система (1.1)—(1.4) с учетом (1.5) представляет собой 13 скалярных уравнений относительно 26 неизвестных (ρ, ρ_e, p, T, s'^*, $\boldsymbol{f}^*$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$).

Эта система должна быть замкнута при помощи 13 скалярных зависимостей, в качестве которых могут быть выбраны

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\rho, \rho_e, p, T, \ldots) && \boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{f}^*(\rho, \rho_e, p, T, \ldots) \\ &\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\rho, \rho_e, p, T, \ldots) && s'^* = s'^*(\rho, \rho_e, p, T, \ldots) \\ &\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\rho, \rho_e, p, T, \ldots) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Однако обычно эти зависимости формулируются (в виде экспериментальных законов, теоретических предпосылок) в такой системе координат, где среда неподвижна. Чтобы использовать эти законы, выполняющиеся в неподвижной среде, для формулировки зависимостей вида (1,6), касающихся движущихся сред, необходимо принять одно существенное допущение. Оно заключается в том, что все рассматриваемые процессы в среде считаются квазистационарными, т. е. достаточно медленными.

Квазистационарность движения среды означает, что характерный период времени рассматриваемых задач значительно больше времен, характерных для изменения механизма таких явлений, как проводимость (время свободного пробега электронов), вязкость и теплопроводность (время свободного пробега молекул), поляризация и намагничивание и т. п. По отношению к изменению электромагнитного поля квазистационарность означает, что характерный период времени значительно больше l_0/c, где l_0 — характерный размер задачи.

Предположение о квазистационарности позволяет считать, что хотя каждый элемент среды и движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно системы K, но это движение настолько медленное, что не влияет на механизм процессов, происходящих в нем, следовательно, в системе K^* эти процессы имеют тот же характер, что и в неподвижном элементе.

Таким образом, принимая квазистационарность движения, мы можем считать, что в системе K^* выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{j}^* = \sigma \boldsymbol{E}^*,\\
&\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{H}^* + 4\pi \boldsymbol{M}^* (\rho, T, \boldsymbol{H}^*),\\
&\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{E}^* + 4\pi \boldsymbol{P}^* (\rho, T, \boldsymbol{E}^*).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Первое соотношение представляет собой (в пренебрежении эффектом Холла) закон Ома для движущейся среды, справедливость которого, строго говоря, установлена лишь в неподвижных средах. Два других соотношения (1.7) являются «уравнениями связи», записанными в системе (K^*), причем вид функций намагниченности $\boldsymbol{M}^*$ и поляризации $\boldsymbol{P}^*$ считается известным и полученным из эксперимента (либо из теории), относящегося к неподвижной среде.

Соотношения (1.7) вместе с (1.5) дают первые три зависимости (1.6), замыкающие основную систему уравнений. Для получения остальных двух зависимостей (1.6) обратимся к законам термодинамики, формулируемым в системе координат, где центр инерции рассматриваемой термодинамической системы покоится. В качестве термодинамической системы примем единицу массы среды.

Предполагая квазистационарность, мы вправе считать, что любые процессы в движущейся среде описываются в системе K^* следующим уравнением Гиббса:

$$T\, ds'^* = dU'^* + \delta A^*, \tag{1.8}$$

которое, строго говоря, относится только к равновесным переходам.

Действительно, хотя в движущейся среде и могут быть необратимые процессы ($\boldsymbol{\Phi}^* \neq 0$), но они идут достаточно медленно (ибо они квазистационарны), так что переходы из одного неравновесного состояния в другое происходят столь же медленно, как и равновесные переходы, для которых (1.8) справедливо.

Кроме этого, в предположении квазистационарности мы можем воспользоваться решением двух статических задач и выражением для f^* (см. [7, 8]):

$$\delta A^* = p'^* d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{E^*}{4\pi} \cdot d\left(\frac{D^*}{\rho}\right) - \frac{H^*}{4\pi} \cdot d\left(\frac{B^*}{\rho}\right),$$
$$p_{ik}^{э*} = -\rho^2 \delta_{ik} \left(\frac{\partial \tilde{F}^{э*}}{\partial \rho}\right)_{T,\, H^*,\, E^*} + \frac{E_i^* D_k^* + H_i^* B_k^*}{4\pi}, \qquad (1.9)$$

$$f_i^* = -\frac{\partial g_i^*}{\partial t} + \frac{\partial p_{ik}^{э*}}{\partial x_k}. \qquad (1.10)$$

В выражениях (1.7)—(1.10) U'^* — внутренняя энергия движущейся среды с учетом энергии электромагнитного поля; δA^* — элементарная работа, совершаемая единицей массы среды над окружающими ее телами; p'^* — полное (с учетом электромагнитного поля), давление в движущейся среде; $\tilde{F}^{э*}$ — та часть удельной свободной энергии, рассматриваемой как функция ρ, T, E^*, H^*, которая обращается в нуль при $E^* = H^* = 0$; $p_{ik}^{э*}$ — тензор электромагнитных напряжений, причем выражение для $p_{ik}^{э*}$ получено в предположении независимости от градиентов полей; $g = \frac{1}{4\pi c}(D \times B)$ — вектор плотности электромагнитного импульса (принято выражение согласно гипотезе Минковского [5]).

Заметим, что под энтропией s'^* системы в неравновесном состоянии понимается, по определению, энтропия такого равновесного состояния системы, в котором имеются те же значения M^* и P^* (внутренние параметры) и такие подходящие значения H^* и E^* (внешние параметры), которые бы обеспечивали данное распределение M^* и P^* в этом равновесном состоянии.

Уравнений (1.8)—(1.10) достаточно, чтобы раскрыть в явном виде последние две зависимости (1.6).

Для этого введем в рассмотрение термодинамические потенциалы $\tilde{U}'^*$ и $\tilde{F}'^*$ — внутреннюю и свободную энергии системы, рассматриваемые как функции ρ, T, E^*, H^*. Тогда, учитывая известные термодинамические соотношения

$$\tilde{F}'^* = \tilde{U}'^* - Ts'^*; \quad \tilde{U}'^* = U'^* - \frac{1}{4\pi\rho}(E^* \cdot D^* + H^* \cdot B^*), \qquad (1.11)$$

из (1.7) и (1.8) получаем

$$d\tilde{F}'^* = -s'^* \, dT - p'^* \, d\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{D^*}{4\pi\rho} dE^* - \frac{B^*}{4\pi\rho} dH^*. \qquad (1.12)$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{\partial \tilde{F}'^*}{\partial E^*}\right)_{\rho,\, T,\, H^*} = -\frac{D^*}{4\pi\rho}; \quad \left(\frac{\partial \tilde{F}'^*}{\partial H^*}\right)_{\rho,\, T,\, E^*} = -\frac{B^*}{4\pi\rho}. \qquad (1.13)$$

В дальнейшем будем рассматривать только изотропные среды, так что

$$\boldsymbol{M}^* = M^*(\rho,\ T,\ H^*)\frac{\boldsymbol{H}^*}{H^*}; \quad \boldsymbol{P}^* = P^*(\rho,\ T,\ E^*)\frac{\boldsymbol{E}^*}{E^*}, \tag{1.14}$$

и следовательно, в частности, $\tilde{F}'^* = \tilde{F}'^*(\rho,\ T,\ E^*,\ H^*)$.

Тогда, замечая, что

$$\tilde{F}'^*(\rho,\ T,\ E^*,\ H^*) = \int\limits_0^{E^*} \frac{\partial \tilde{F}'^*}{\partial E^*}\,dE^* + \int\limits_0^{H^*}\left(\frac{\partial \tilde{F}'^*}{\partial H^*}\right)_{E^*=0} dH^* +$$

$$+ \tilde{F}'^*(\rho,\ T,\ 0,\ 0) \equiv \tilde{F}^{э*}(\rho,\ T,\ E^*,\ H^*) + \tilde{F}^*(\rho,\ T), \tag{1.15}$$

в силу (1.13), (1.14) и (1.6) получаем

$$\tilde{F}^{э*} \equiv \int\limits_0^{E^*} \frac{\partial \tilde{F}'^*}{\partial E^*}\,dE^* + \int\limits_0^{H^*}\left(\frac{\partial \tilde{F}'^*}{\partial H^*}\right)_{E^*=0} dH^* = -\frac{H^{*2} + E^{*2}}{8\pi\rho} -$$

$$-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{E^*} P^*(\rho,\ T,\ E^*)\,dE^* - \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{H^*} M^*(\rho,\ T,\ H^*)\,dH^*. \tag{1.16}$$

В соответствии с представлением (1.15) свободной энергии $\tilde{F}'^*$ в виде двух слагаемых, одно из которых ($\tilde{F}^{э*}$) обращается в нуль при $H^* = E^* = 0$, а второе ($\tilde{F}^*$) представляет функциональную зависимость свободной энергии системы от ρ и T, вид которой не зависит от электромагнитного поля, из (1.11) и (1.12) следует, что на подобные пары слагаемых можно разбить s'^*, p'^*, U'^*, так что

$$s'^* = s^{э*} + s; \quad p'^* = p^{э*} + p; \quad U'^* = U^{э*} + U, \tag{1.17}$$

причем, как известно (см. [5, 6]),

$$s^*(\rho,\ T) = s(\rho,\ T); \quad U^*(\rho,\ T) = U(\rho,\ T).$$

Тогда из (1.11) и (1.12) имеем

$$s^{э*} = -\left(\frac{\partial \tilde{F}^{э*}}{\partial T}\right)_{\rho,\ H^*,\ E^*}; \quad p^{э*} = \rho^2\left(\frac{\partial \tilde{F}^{э*}}{\partial \rho}\right)_{T,\ H^*,\ E^*}$$

$$U^{э*} = \tilde{F}^{э*} + Ts^{э*} + \frac{E^*D^* + H^*B^*}{4\pi\rho}. \tag{1.18}$$

Полученные формулы позволяют выразить f_i^* и s'^* только через величины E^*, H^* и функции $M^*(\rho,\ T,\ H^*)$, $P^*(\rho,\ T,\ E^*)$, которые считаются известными.

Из (1.16) и (1.18) получаем

$$s^{э*} = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{E^*}\left(\frac{\partial P^*}{\partial T}\right)_{\rho,\ E^*} dE^* + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{H^*}\left(\frac{\partial M^*}{\partial T}\right)_{\rho,\ H^*} dH^*, \tag{1.19}$$

$$p^{э*}=\frac{H^{*2}+E^{*2}}{8\pi}+\psi_\rho^*+\chi_\rho^*, \qquad (1.20)$$

$$\rho U^{э*}=\frac{E^*D^*+H^*B^*}{4\pi}-\frac{H^{*2}+E^{*2}}{8\pi}-\psi_T^*-\chi_T^*, \qquad (1.21)$$

где

$$\chi_\rho=\int_0^E\left\{P^*-\rho\left(\frac{\partial P^*}{\partial\rho}\right)_{T,\,E}\right\}dE;\quad \psi_\rho=\int_0^H\left\{M^*-\rho\left(\frac{\partial M^*}{\partial\rho}\right)_{T,\,H}\right\}dH;$$
$$\chi_T=\int_0^E\left\{P^*-T\left(\frac{\partial P^*}{\partial T}\right)_{\rho,\,E}\right\}dE;\quad \psi_T=\int_0^H\left\{M^*-T\left(\frac{\partial M^*}{\partial T}\right)_{\rho,\,H}\right\}dH. \qquad (1.22)$$

Используя уравнения Максвелла, записанные в системе (K^*), и выражения (1.9), (1.16) и (1.20), из (1.10) получаем

$$\boldsymbol{f}^*=\rho_e\boldsymbol{E}^*+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^*\times\boldsymbol{B}^*)+P^*\nabla E^*+M^*\nabla H^*-\nabla(\psi_\rho^*+\chi_\rho^*). \qquad (1.23)$$

Подставляя (1.5) в (1.7), (1.19) и (1.23), окончательно получаем (с точностью до членов порядка v^2/c^2) зависимости (1.6), замыкающие основную систему уравнений (1.1)—(1.4), в виде

$$\boldsymbol{j}=\rho_e\boldsymbol{v}+\sigma\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right),$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}^*(\rho,\,T,\,H^*)-\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{P}^*(\rho,\,T,\,E^*)),$$
$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}^*(\rho,\,T,\,E^*)+\frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}^*(\rho,\,T,\,H^*)),$$
$$\boldsymbol{f}^*=\rho_e\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}))+$$
$$+P^*\nabla E^*+M^*\nabla H^*-\nabla(\psi_\rho^*+\chi_\rho^*),$$
$$s'^*=s(\rho,\,T)+s^{э*}=$$
$$=s(\rho,\,T)+\frac{1}{\rho}\int_0^{E^*}\left(\frac{\partial P^*}{\partial T}\right)_{\rho,\,E^*}dE^*+\frac{1}{\rho}\int_0^{H^*}\left(\frac{\partial M^*}{\partial T}\right)_{\rho,\,H^*}dH^*, \qquad (1.24)$$

где $E^*=\left|\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right|;\ H^*=\left|\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D})\right|;$

$$\boldsymbol{M}^*=M^*(\rho,\,T,\,H^*)\boldsymbol{H}^*/H^*;\quad \boldsymbol{P}^*=P^*(\rho,\,T,\,E^*)\boldsymbol{E}^*/E^*,$$

причем вид зависимостей $M^*(\rho,\,T,\,H^*)$, $P^*(\rho,\,T,\,E^*)$ считается известным.

Уравнения (1.1)—(1.4) вместе с (1.24) составляют замкнутую систему. Рассмотрим наиболее распространенные в приложениях приближения этой системы.

В магнитогидродинамическом приближении, когда электрическое поле индуцируется за счет движения проводящей среды, а внешние электрические поля имеют такой же порядок, получаем $E \sim D \sim \sim v/cH \sim v/cB$. Поэтому из (1.24) находим (с точностью до v^2/c^2):

$$H^* = H; \quad s^{э*} = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^H \left(\frac{\partial M^*}{\partial T}\right)_{\rho, H} dH,$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\right); \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi M^*(\rho, T, H)\frac{\boldsymbol{H}}{H},$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi P^*(\rho, T, E^*)\frac{\boldsymbol{E}^*}{E^*} + \frac{4\pi}{cH} M^*(\rho, T, H)(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}), \tag{1.26}$$

$$\boldsymbol{f}^* = \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) + M^*\nabla H - \nabla\psi_\rho,$$

$$p_{ik}^{*э} = -\left(\frac{H^2}{8\pi} + \psi_\rho\right)\delta_{ik} + \frac{H_i B_k}{4\pi}.$$

Если кроме того можно пренебречь током смещения $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости $\boldsymbol{j}$, то электрическое поле полностью исключается из основной системы и, как в обычной магнитной гидродинамике, может быть найдено из закона Ома (1.25) после определения $\boldsymbol{H}$ из основной системы; электрическая индукция $\boldsymbol{D}$ находится из уравнения (1.26).

В электрогидродинамическом приближении ($H \sim B \sim v/cE \sim \sim v/cD$) имеем

$$E^* = E; \quad s^{э*} = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^E \left(\frac{\partial P^*}{\partial T}\right)_{\rho, E} dE;$$

$$\boldsymbol{j} = \rho_e \boldsymbol{v} + \sigma \boldsymbol{E};$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi M^*(\rho, T, H^*)\frac{\boldsymbol{H}^*}{H^*} - \frac{4\pi}{cE} P^*(\rho, T, E)(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E});$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi P^*(\rho, T, E)\frac{\boldsymbol{E}}{E};$$

$$\boldsymbol{f}^* = \rho_e \boldsymbol{E} + P^*\nabla E - \nabla\chi_\rho;$$

$$p_{ik}^{*э} = -\left(\frac{E^2}{8\pi} + \chi_\rho\right)\delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi}.$$

В приближении $E \sim H$, если ограничиться точностью до членов порядка v/c, получаем (см. [4]):

$$E^* = E; \quad H^* = H; \quad \boldsymbol{j} = \rho_e \boldsymbol{v} + \sigma \boldsymbol{E};$$

$$s^{*э} = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^H \left(\frac{\partial M^*}{\partial T}\right)_{\rho, H} dH + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^E \left(\frac{\partial P^*}{\partial T}\right)_{\rho, E} dE;$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi M^*(\rho, T, H)\frac{\boldsymbol{H}}{H};$$

$$D = E + 4\pi P^*(\rho,\ T,\ E)\frac{E}{E};$$

$$f^* = \rho_e E + \frac{1}{c}(j \times B) + P^*\nabla E + M^*\nabla H - \nabla(\psi_\rho + \chi_\rho);$$

$$p_{ik}^{*э} = -\left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \chi_\rho + \psi_\rho\right)\delta_{ik} + \frac{E_i D_k + H_i B_k}{4\pi}.$$

В заключение этого параграфа приведем некоторые сведения о частных значениях намагниченности и поляризации среды.

В случае не слишком больших полей обычно принимают линейную зависимость, а именно,

$$M^* = \frac{\mu(\rho,\ T) - 1}{4\pi} H^*;\quad P^* = \frac{\varepsilon(\rho,\ T) - 1}{4\pi} E^*. \tag{1.27}$$

При этом несложные теоретические соображения (например, [7, 9]) дают для газообразных сред

$$\frac{\mu - 1}{\mu} = C_1 \frac{\rho}{T}, \tag{1.28}$$

$$\varepsilon - 1 = C_2\rho\left(1 + \frac{C_3}{T}\right). \tag{1.29}$$

Формула (1.28) хорошо подтверждается экспериментами с газообразными и с жидкими магнетиками.

Для жидких диэлектриков с «квазиупругими» молекулами (N_2, H_2, CO_2 и другие вещества, у которых электрический момент молекул в отсутствие поля равен нулю) обычно принимают

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = C_4\rho, \tag{1.30}$$

так что ε у таких сред не зависит от температуры.

Для растворов диэлектриков с «твердыми» молекулами (SO_2, H_2S, H_2O, HCl, NH_3 и др.) приближенно применима формула

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = C_5 \frac{\rho}{T}. \tag{1.31}$$

В формулах (1.28)—(1.31) постоянные $C_1, \ldots C_5$ определяются природой вещества и зависят от молекулярного веса и электромагнитных свойств молекул. Эти формулы известны в литературе как формулы Лоренц — Лорентца и формулы Клазиуса — Моссоти.

В противоположном случае — случае насыщения среды, намагниченность и поляризация вообще не зависят от полей. В этом случае обычно (в частности, для ферромагнитных жидкостей [3, 10]) принимают

$$M^* = K(\rho)(\theta - T),$$

где θ — температура Кюри, $K(\rho)$ — пиромагнитный коэффициент.

2. Уравнение энергии

Очень часто в основную систему (1.1) удобно включать уравнение энергии вместо последнего уравнения изменения энтропии. Получим уравнение энергии как следствие уравнений (1.1) и уравнения Гиббса (1.8). Из последнего уравнения (1.1) и (1.8) имеем

$$\rho\frac{dU'^*}{dt} = \Phi^* + \frac{H^*}{4\pi}\cdot\frac{dB^*}{dt} + \frac{E^*}{4\pi}\cdot\frac{dD^*}{dt} - \left(p' - \frac{H^*B^* + E^*D^*}{4\pi}\right)\operatorname{div} v. \tag{2.1}$$

Умножая второе уравнение (1.1) скалярно на $\boldsymbol{v}$ и складывая с (2.1), после ряда выкладок получаем

$$\begin{gathered}\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + U\right) = \operatorname{div}(\lambda\nabla T) + \frac{\partial}{\partial x_k}(p_{ik}v_i) + A^э, \\ A^э = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} - \operatorname{div}\boldsymbol{v}(\psi_\rho^* + \chi_\rho^* - \psi_T^* - \chi_T^*) + \\ + \frac{\partial}{\partial t}(\psi_T^* + \chi_T^*) - \boldsymbol{P}^*\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}^*}{\partial t} - \boldsymbol{M}^*\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}^*}{\partial t}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $A^э$ определяет приток энергии к элементу среды за счет электромагнитного поля, причем, если намагниченность и поляризация среды однородны $\left(\boldsymbol{P}^* = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E}^*;\quad \boldsymbol{M}^* = \frac{\mu - 1}{4\pi}\boldsymbol{H}^*;\ \varepsilon,\ \mu — \text{постоянные}\right)$, в выражении для $A^э$ остается только первое слагаемое.

Уравнение (2.2) можно записать в дивергентной форме $\left(\text{с точностью до } v/c, \text{ если } E \sim H, \text{ и с точностью до } v^2/c^2, \text{ если } E \sim \frac{v}{c}H \text{ или } H \sim \frac{v}{c}E\right)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U - \psi_T - \chi_T + \frac{ED + HB}{4\pi} - \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\right) = \\ = -\operatorname{div}\left\{U\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U - \psi_T - \chi_T + p + \psi_\rho + \chi_\rho\right) + \right. \\ \left. + \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) - \lambda\nabla T - \boldsymbol{\tau}\cdot U\right\},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений с компонентами τ_{ik}.

Величины ψ_ρ, χ_ρ (см. (1.20)) определяют стрикционные напряжения, возникающие вследствие того, что намагниченность и поляризация среды зависят от плотности. Если P^* и M^* пропорциональны ρ, как это имеет место в слабых полях, то $\psi_\rho = \chi_\rho = 0$. В остальных случаях эти величины могут оказывать существенное влияние на движение среды, ибо стрикционные напряжения имеют тот же порядок, что и «механические».

Величины ψ_T, χ_T определяют соответственно пиромагнитные и пироэлектрические эффекты, особенно ярко проявляющиеся в ферромагнетиках и сегнетоэлектриках.

Таким образом, из (2.2) следует, что дополнительный приток энергии к среде за счет процессов намагничивания и поляризации определяется стрикционными и калорическими эффектами, сопровождающими эти процессы. Эти эффекты дают работу при изменении объема и поток тепла при намагничивании и поляризации среды.

Приведем некоторые частные значения величин ϕ и χ.

2. В случае слабой поляризации (1.27) имеем:

для магнетиков (жидких и газообразных)

$$\phi_\rho = -\frac{H^2}{8\pi}(\mu-1)^2; \quad \phi_T = \frac{H^2}{8\pi}(\mu^2-1); \tag{2.4}$$

для газов (см. (1.29))

$$\chi_\rho = 0; \quad \chi_T = \frac{E^2}{4\pi}\left(\varepsilon - 1 - \frac{\rho C_2}{2}\right);$$

для жидких диэлектриков с «квазиупругими» молекулами (см. (1.30))

$$\chi_\rho = -\frac{E^2}{24\pi}(\varepsilon-1)^2; \quad \chi_T = \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon-1);$$

для растворов диэлектриков с «твердыми» молекулами (см. (1.31))

$$\chi_\rho = -\frac{E^2}{24\pi}(\varepsilon-1)^2; \quad \chi_T = \frac{E^2}{24\pi}.$$

Заметим, что во всех этих случаях $\phi_\rho \leqslant 0$; $\chi_\rho \leqslant 0$; $\phi_T \geqslant 0$; $\chi_T \geqslant 0$, так что дополнительный поток энергии от намагничивания и поляризации соответствует знаку $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ на границе области ($\boldsymbol{n}$ — внешняя к области нормаль).

2. В случае насыщения среды, когда можно считать

$$M^* = \rho K(\theta - T); \quad P^* = \rho K_\varepsilon(\theta_\varepsilon - T),$$

имеем

$$\phi_\rho = \chi_\rho = 0; \quad \phi_T = \rho K\theta H; \quad \chi_T = \rho K_\varepsilon \theta_\varepsilon E.$$

3. Граничные условия для поля. Сила, действующая на тело в среде

Пусть S — некоторая поверхность, с которой граничит область $\boldsymbol{\Omega}$, где движется среда.

Рассмотрим единичный элемент этой поверхности, имеющий скорость $\boldsymbol{v}_s$ в системе (K) и нормаль $\boldsymbol{n}$, внешнюю по отношению к $\boldsymbol{\Omega}$.

Будем отмечать граничные значения величин, относящихся к движущейся в $\boldsymbol{\Omega}$ среде, индексом $^+$, а значения величин в той же точке поверхности S, но с другой ее стороны вне среды, индексом $^-$.

Граничные условия для векторов поля могут быть получены из уравнений Максвелла, записанных в системе, связанной с движущимся элементом поверхности. Переходя в систему (K), с точностью до v^2/c^2, получим

$$\begin{gathered} \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-) = 0; \quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}^+ - \boldsymbol{D}^-) = 4\pi\upsilon; \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}^+ - \boldsymbol{H}^-) = -\frac{\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{n}}{c}(\boldsymbol{D}^+ - \boldsymbol{D}^-) + \frac{4\pi}{c}(\upsilon\boldsymbol{v}_s - \boldsymbol{i}), \\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}^+ - \boldsymbol{E}^-) = \frac{\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{n}}{c}(\boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где υ, $\boldsymbol{i}$ — поверхностная плотность зарядов и поверхностный ток на граничной поверхности S.

Вычислим силу, действующую на неподвижную в системе (K) поверхность со стороны движущейся среды. Так как поверхность находится в равновесии, то

$$p'^{+}_{ik} n_k = p'^{-}_{ik} n_k.$$

Для среды вне Ω (тело) имеем

$$p'^{-}_{ik} = p^{э-}_{ik} + \sigma^{-}_{ik},$$

где σ^{-}_{ik} — механические напряжения, возникающие на поверхности S тела в результате действия на нее движущейся среды и электромагнитного поля. Поэтому сила, действующая со стороны среды на поверхность S, равна

$$F_i^{(S)} = \int_S \sigma^{-}_{ik} n_k \, dS = \int_S (p'^{+}_{ik} - p^{э-}_{ik}) \, n_k \, dS.$$

Заметим, что если поляризация тела и среды в Ω одинакова, то выражение для силы $F_i^{(S)}$ сводится к обычной гидродинамической силе; влияние электромагнитного поля скажется на перераспределении гидродинамических величин.

Пусть в движущейся среде находится тело с поверхностью S_0, занимающее область Ω_0. Тогда главный вектор сил, действующих на это тело F_i, равен сумме объемных и поверхностных сил:

$$F_i = \int_{\Omega_0} f_i^{\circ} \, d\Omega_0 + \int_{S_0} \sigma^{-}_{ik} n_k \, dS_0. \tag{3.2}$$

Если внутри тела есть токи j°, заряды ρ_e° и тело может поляризоваться и намагничиваться в поле, то плотность объемных сил f_i° в теле слагается из объемных сил неэлектромагнитного происхождения γ_i° (напр. удельный вес тела) и объемной пондеромоторной силы, так что

$$f_i^{\circ} = \gamma_i^{\circ} - \frac{\partial g_i^{\circ}}{\partial t} + \frac{\partial p^{э\circ}_{ik}}{\partial x_k}.$$

Вычисления дают

$$f_i^{\circ} = \gamma_i^{\circ} + \rho_e^{\circ} E_i^{\circ} + \frac{1}{c} (\boldsymbol{j}^{\circ} \times \boldsymbol{B}^{\circ})_i + P_k^{\circ} \frac{\partial E_k^{\circ}}{\partial x_i} + M_k^{\circ} \frac{\partial H_k^{\circ}}{\partial x_i} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} (\psi_\rho^{\circ} + \chi_\rho^{\circ}). \tag{3.3}$$

Записывая $\sigma^{-}_{ik} = p'^{+}_{ik} - p^{э-}_{ik} = p^{+}_{ik} + p^{э+}_{ik} - p^{э-}_{ik}$, получим

$$(p^{э+}_{ik} - p^{э-}_{ik}) \, n_k = -n_i \{2\pi (M_n^{+})^2 - (M_n^{-})^2 + (P_n^{+})^2 - (P_n^{-})^2) + \\ + \psi_\rho^{+} - \psi_\rho^{-} + \chi_\rho^{+} - \chi_\rho^{-}\} \equiv \mathfrak{P} n_i. \tag{3.4}$$

Таким образсм из (3.2) находим

$$F_i = \int_{\Omega_0} f_i^\circ d\Omega_0 + \int_{S_0} n_i \mathfrak{P}\, dS_0 + \int_{S_0} p_{ik}^+ n_k\, dS_0. \qquad (3.5)$$

Здесь f_i° в самом общем случае имеет выражение (3.3); p_{ik}^+ — тензор гидродинамических («механических») напряжений в среде; скаляр $\mathfrak{P}$ определяется различием поляризационных свойств среды и тела.

Заметим, что если внутри тела нет зарядов и токов и его поляризацией и намагничиванием можно пренебречь, то дополнительная сила, действующая на тело за счет электромагнитного поля, определяется только поляризацией и намагничиванием среды.

4. Краевая задача для электромагнитного поля в движущейся среде

Будем рассматривать такие задачи, в которых характерный период времени t_0 настолько велик, что $t_0 \gg l_0 E_0 / cH_0$, а для проводящих сред проводимость σ удовлетворяет условию $\sigma t_0 \gg 1$.

Тогда конвекционным током $\rho_e \boldsymbol{v}$ в законе Ома и током смещения $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ в уравнениях Максвелла можно пренебречь по сравнению с током проводимости. Это приближение характерно для большинства электродинамических задач.

Пусть движущаяся среда занимает область Ω^+, граница которой S_Ω не меняет своей формы в выбранной системе координат и свободна от зарядов и токов, так что

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|_{S_\Omega} = \boldsymbol{v}_S \cdot \boldsymbol{n} = 0; \quad \upsilon = \boldsymbol{i} = 0. \qquad (4.1)$$

Предположим, что область Ω^+ граничит с такими телами (они занимают область Ω^-), в которых (во всяком случае, в частях этих тел, прилежащих к S_Ω) нет токов и зарядов и можно пренебречь их поляризацией и намагниченностью. Тогда на S_Ω с ее стороны, обращенной к Ω^-, имеем

$$\boldsymbol{M}^- = \boldsymbol{P}^- = \boldsymbol{j}^- = \rho_e^- = 0, \qquad (4.2)$$

так что $\boldsymbol{B}^- = \boldsymbol{H}^-$, $\boldsymbol{D}^- = \boldsymbol{E}^-$.

Пусть $\boldsymbol{H}_0\,(=\boldsymbol{B}_0)$ — внешнее для Ω^+ поле, т. е. такое поле, которое существовало бы в Ω^+, если бы в каждой ее точке $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{M} = 0$. Таким образом, внешнее поле удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}_0 = 0; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_0 = 0. \qquad (4.3)$$

Представим поле и индукцию в среде в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_i; \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{B}_i \qquad (4.4)$$

где $\boldsymbol{H}_i$ — индуцированное в среде поле за счет того, что среда может проводить ток ($\boldsymbol{j} \neq 0$) и способна намагничиваться ($\boldsymbol{M} \neq 0$).

Мы будем, как обычно, считать поле $H_0 = H_0(r, t)$ заданным, ибо оно всегда может быть построено как продолжение поля H^-, удовлетворяющего тем же уравнениям (4.3).

При вышеизложенных предположениях уравнения Максвелла вместе с замыкающими соотношениями (1.24) могут быть записаны в виде

$$\operatorname{div} B_i = 0, \qquad \operatorname{div} D = 4\pi\rho_e,$$
$$\operatorname{rot} H_i = \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$
$$j = \sigma\left(E + \frac{1}{c}(v \times B)\right),$$
$$B_i = H_i + 4\pi M, \quad D = E + 4\pi P, \tag{4.5}$$

где введены обозначения

$$M \equiv M^*\left(\rho,\ T,\ \left|H_0 + H_i - \frac{1}{c}(v \times D)\right|\right) -$$
$$-\frac{1}{c}\left(v \times P^*\left(\rho,\ T,\ \left|E + \frac{1}{c}(v \times D)\right|\right)\right),$$
$$P \equiv P^*\left(\rho,\ T,\ \left|E + \frac{1}{c}(v \times B)\right|\right) +$$
$$\times \frac{1}{c}\left(v \times M^*\left(\rho,\ T,\ \left|H_0 + H_i - \frac{1}{c}(v \times D)\right|\right)\right),$$

причем функции $H_0(r, t)$, M^*, P^* считаются известными.

Эта система уравнений определяет в области Ω^+ величины ρ_e, E и H_i при следующих граничных условиях на поверхности S_Ω, вытекающих из (3.1), (4.1) и (4.2):

$$n \cdot (H_i^+ - H_i^-) = -4\pi M^+ \cdot n, \quad n \cdot (E^+ - E^-) = -4\pi P^+ \cdot n,$$
$$n \times (H_i^+ - H_i^-) = 0, \qquad n \times (E^+ - E^-) = 0. \tag{4.6}$$

Сформулируем краевую задачу определения H_i и E из системы (4.5) при граничных условиях (4.6), если считать, что всюду в Ω^+ известны j, M, P, ρ_e и $\frac{\partial B}{\partial t}$.

Определить в области Ω^+ с неподвижной границей S_Ω два вектора H_i и E, удовлетворяющих уравнениям:

1. Всюду внутри Ω^+

$$\operatorname{div} H_i = -4\pi \operatorname{div} M, \qquad \operatorname{iv} E = 4\pi(\rho_e - \operatorname{div} P),$$
$$\operatorname{rot} H_i = \frac{4\pi}{c} j, \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{4.7}$$

2. Всюду вне Ω^+

$$\operatorname{div} H_i = 0, \quad \operatorname{div} E = 0,$$
$$\operatorname{rot} H_i = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{4.8}$$

3. На границе S_Ω выполнены условия (4.6), определяющие непрерывность касательных компонент векторов и скачок нормальных составляющих.

4. При удалении от области Ω^+ векторы $\boldsymbol{H}_i$ и $\boldsymbol{E}$ убывают, причем при $r \to \infty$

$$H_i \sim r^{-3}, \quad E \sim r^{-2},$$

что соответствует убыванию поля от магнитного диполя и электрического заряда.

Заметим, что если в телах, окружающих среду в области, может существовать однородная поляризация и намагниченность ($\varepsilon^- = \mathrm{const}$, $\mu^- = \mathrm{const}$), то формулировка краевой задачи будет аналогичной относительно векторов $\mu^- \boldsymbol{H}_i$ и $\varepsilon^- \boldsymbol{E}$, ибо всегда можно представить, например, $\boldsymbol{B} = \mu^- \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}_1$, причем $\boldsymbol{M}_1^- = \boldsymbol{M}^- - \frac{\mu^- - 1}{4\pi} \boldsymbol{H}^- = 0$.

Решение сформулированной краевой задачи можно получить при помощи уравнений, следующих из векторного аналога формулы Грина.

Если $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q}'$ — непрерывные вместе со своими вторыми производными в Ω и на S_Ω функции, то из теоремы Гаусса — Остроградского можно получить [8] следующее векторное обобщение формулы Грина:

$$\int_\Omega (\boldsymbol{Q} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{Q}' - \boldsymbol{Q}' \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{Q})\, d\Omega = \\ = \int_{S_\Omega} (\boldsymbol{Q}' \times \operatorname{rot} \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{Q}') \cdot \boldsymbol{n}\, dS_\Omega. \tag{4.9}$$

Возьмем в этой формуле $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{a}_0 r^{-1}$, где $\boldsymbol{a}_0$ — постоянный произвольный вектор. Тогда получим

$$\int_\Omega \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{Q} \times \nabla \frac{1}{r} + (\operatorname{div} \boldsymbol{Q}) \nabla \frac{1}{r}\right) d\Omega = \\ = \int_{S_\Omega} \left\{(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n}) \nabla \frac{1}{r} + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{Q}) \times \nabla \frac{1}{r}\right\} dS_\Omega. \tag{4.10}$$

Пусть $\Omega = \Omega^+ + \Omega^-$, где Ω^- — некоторая область, охватывающая Ω^+, $S_{\Omega+}$ и $S_{\Omega-}$ — соответствующие стороны поверхности S_Ω, отделяющей Ω^+ от Ω^-, а S_∞ — внешняя граница Ω^-.

Пусть поле $\boldsymbol{Q}$ в Ω^- удовлетворяет уравнениям $\operatorname{div} \boldsymbol{Q}^- = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{Q}^- = 0$ и на бесконечности $\boldsymbol{Q}$ убывает по крайней мере не медленнее, чем $r^{-\delta}$ ($\delta > 0$).

Тогда формула (4.10) позволяет выразить поле $\boldsymbol{Q}$ в каждой точке области Ω^+ через его завихренность и дивергенцию внутри Ω^+ и разность нормальных и касательных компонент с обеих сторон поверхности S_Ω.

Действительно, если r обращается в некоторой точке, лежащей в Ω^+, в нуль, то окружая эту точку сферой радиуса r_0, из (4.10) получим в пределе при $r_0 \to 0$ и S_∞, уходящей на бесконечность:

$$4\pi \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{R}) = \int_{\Omega^+} \left\{ \operatorname{rot} \boldsymbol{Q} \times \nabla \frac{1}{r} + (\operatorname{div} \boldsymbol{Q}) \nabla \frac{1}{r} \right\} d\Omega -$$

$$- \int_{S_{\Omega^+}} \left\{ (\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{Q}^+ - \boldsymbol{Q}^-)) \nabla \frac{1}{r} - (\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{Q}^+ - \boldsymbol{Q}^-)) \times \nabla \frac{1}{r} \right\} dS_\Omega, \qquad (4.11)$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}'$, причем $\boldsymbol{R}'$ определяет точку интегрирования, а дифференцирование r происходит по координатам $\boldsymbol{R}'$.

Отсюда, взяв в качестве $\boldsymbol{Q}$ векторы $\boldsymbol{H}_i$ и $\boldsymbol{E}$, из (4.7) и (4.8) в силу (4.6) и (4.5) получим

$$\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega^+} \left(\boldsymbol{j} \times \nabla \frac{1}{r} \right) d\Omega - \int_{\Omega^+} (\operatorname{div} \boldsymbol{M}) \nabla \frac{1}{r} d\Omega +$$

$$+ \int_{S_{\Omega^+}} (\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}) \nabla \frac{1}{r} dS_\Omega, \qquad (4.12)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \times \nabla \frac{1}{r} \right) d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega^+} \{ \operatorname{div} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \} \nabla \frac{1}{r} d\Omega +$$

$$+ \int_{S_{\Omega^+}} (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}) \nabla \frac{1}{r} dS_\Omega. \qquad (4.13)$$

Эти соотношения могут быть весьма полезны при определении электромагнитного поля в движущейся среде, ибо они, в отличие от дифференциальных уравнений, включают в себя краевые условия. Строго говоря, поскольку $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{B}$ зависят от $\boldsymbol{H}_i$ и $\boldsymbol{E}$, эти соотношения представляют интегральные уравнения. Несмотря на нелинейность и «перепутанность» с уравнениями механики сплошной среды ($\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{B}$ зависят от ρ, T, $\boldsymbol{v}$), уравнения (4.12) и (4.13) иногда могут давать конструктивные результаты.

Так, если $E \sim D \sim v/cH \sim v/cB$, то в силу $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^*(\rho, T, |\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_i|)$ поле $\boldsymbol{E}$ из (4.12) может быть исключено. Если пренебречь зависимостью $\boldsymbol{M}^*$ от температуры, то в случае несжимаемой жидкости поле $\boldsymbol{H}_i$ может быть определено из (4.12) (например, итерациями) независимо от остальных уравнений. В некоторых задачах [11] поле $\boldsymbol{H}_i$ может быть определено из (4.12) и при более общих предположениях относительно $\boldsymbol{M}^*$. После определения $\boldsymbol{H}_i$ из (4.12) можно определить $\boldsymbol{E}$ из (4.13), причем, если пренебречь поляризацией (при известной $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$) — путем квадратур.

Когда известны $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}_i$, нетрудно определить плотность зарядов $\rho_e = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} (\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P})$.

5. Разрывы и ударная адиабата

В дополнение к соотношениям (3.1), связывающим величины электромагнитного поля по обе стороны от поверхности разрыва, из первых двух уравнений (1.1) и уравнения энергии (2.3) обычным путем можно получить соотношения между остальными характеристиками среды на поверхностях разрыва непрерывности. Эти соотношения имеют вид

$$[\rho (v_n - v_{sn})] = 0,$$
$$[\rho (v_i - v_{si})(v_n - v_{sn}) - (p_{ik} + p_{ik}^{э*}) n_k] = 0,$$
$$\Big[\Big(\frac{\rho (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_s)^2}{2} + \rho U + p + \psi_\rho^* + \chi_\rho^* - \psi_T^* - \chi_T^*\Big)(v_n - v_{sn}) - \lambda \frac{\partial T}{\partial n} -$$
$$- \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_s) \cdot \boldsymbol{n} + \frac{c}{4\pi}\Big(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} + \frac{1}{c} \boldsymbol{H} \times (\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{B}) -$$
$$- \frac{1}{c} \boldsymbol{E} \times (\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{D})\Big) \cdot \boldsymbol{n}\Big] = 0, \qquad (5.1)$$

где для интенсивности скачка некоторой величины F введено обозначение $[F] \equiv F^+ - F^-$.

Рассмотрим неподвижную поверхность разрыва в идеальной среде ($\boldsymbol{v}_s = \lambda = \eta = \eta' = 1/\sigma = 0$). В этом случае из (3.1) и (5.1) имеем

$$[\rho v_n] = 0, \quad [B_n] = 0,$$
$$\Big[\rho v_n \boldsymbol{v} + \Big(p + \psi_\rho + \frac{H^2}{8\pi}\Big) \boldsymbol{n} - \frac{1}{4\pi} B_n \boldsymbol{H}\Big] = 0,$$
$$\Big[\rho v_n \Big(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p + \psi_\rho - \psi_T}{\rho}\Big) + \frac{v_n (HB) - B_n (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H})}{4\pi}\Big] = 0, \qquad (5.2)$$
$$B_n [\boldsymbol{v}_\tau] = [v_n \boldsymbol{B}_\tau],$$

а соотношения $[D_n] = 4\pi\upsilon$ и $[\boldsymbol{H}_\tau] = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{i}$ служат для определения υ и $\boldsymbol{i}$.

Последнее соотношение (5.2) является следствием непрерывности касательных компонент $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Отметим, что поскольку для идеальной проводящей среды $E \sim v/cB$, так что $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^*, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$, то из (5.2) следует, что ее поляризационные свойства в электрическом поле не сказываются на характере разрывов.

Вводя обозначение $m_n \equiv \rho^+ v_n^+ = \rho^- v_n^-$, из (5.2) получаем

$$\Big[\frac{m_n^2}{2\rho^2} + U + \frac{p + \psi_\rho - \psi_T}{\rho} + \frac{H_\tau B_\tau}{4\pi\rho} - \frac{B_n^2 H_\tau^2}{32\pi^2 m_n^2}\Big] = 0,$$
$$\Big[\frac{m_n^2}{\rho} + p + \psi_\rho + 2\pi M_n^2 + \frac{1}{8\pi} H_\tau^2\Big] = 0, \qquad (5.3)$$
$$4\pi m_n [\boldsymbol{v}_\tau] = B_n [\boldsymbol{H}_\tau], \quad B_n [\boldsymbol{v}_\tau] = [v_n \boldsymbol{B}_\tau], \quad (\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}^* (\rho, T, H)).$$

Рассмотрим особенности, которые привносит в характер разрывов способность среды к намагничиванию.

1. В тангенциальных разрывах ($m_n=0$, $B_n=0$), т. е. в разрывах, где скорость и магнитное поле касательны к поверхности разрыва, в силу (5.2) и (5.3) скачки $[\boldsymbol{v}_\tau]$, $[\boldsymbol{H}_\tau]$ и $[\boldsymbol{B}_\tau]$ произвольны. Произвольны также изменения и термодинамических параметров ρ и U, однако скачок давления равен $[p]=-\left[\psi_\rho+\frac{H_\tau^2}{8\pi}\right]$ и определяется не только скачком поля, но и скачком величин ρ, T, от которых зависит намагниченность среды (в немагнитной среде скачок давления зависит только от скачка поля).

2. В контактных разрывах ($m_n=0$, $B_n\neq 0$) скорость и поле $\boldsymbol{H}_\tau$ непрерывны, а H_n, ρ и U могут претерпевать произвольный разрыв. Не остается непрерывным и давление (в противоположность случаю немагнитной среды) — его скачок определяется скачком намагниченности и равен

$$[p]=-[\psi_\rho+2\pi M_n^2].$$

3. В случае альфвеновских разрывов ($m_n=0, B_n\neq 0$, $[\rho]=[v_n]=0$) из последних двух уравнений (5.3), исключая $[\boldsymbol{v}_\tau]$, получим

$$\boldsymbol{a}_0^+\frac{H_\tau^+}{H_n^+}\left(v_n^2-\frac{B_nH_n^+}{4\pi\rho}\right)=\boldsymbol{a}_0^-\frac{H_\tau^-}{H_n^-}\left(v_n^2-\frac{B_nH_n^-}{4\pi\rho}\right), \qquad (5.4)$$

где $\boldsymbol{B}_\tau^+=\boldsymbol{a}_0^+B_\tau^+$, $\boldsymbol{B}_\tau^-=\boldsymbol{a}_0^-B_\tau^-$, $|\boldsymbol{a}_0^+|=|\boldsymbol{a}_0^-|=1$.

Здесь могут представиться две возможности.

а) Среда до скачка движется с альфвеновской скоростью, т. е.

$$v_n=\sqrt{\frac{B_nH_n^-}{4\pi\rho}}\equiv v_A^-.$$

Тогда из (5.4) следует $H_n^-=H_n^+\equiv H_n$, а направления векторов $\boldsymbol{B}_\tau^+$ и $\boldsymbol{B}_\tau^-$ произвольны, так что в этом случае возможны произвольные угловые смещения векторов касательного магнитного поля и скорости. Поскольку

$$B_n=H_n\left(1+\frac{4\pi M(\rho,\,T,\,H)}{H}\right), \qquad (5.5)$$

то величины B_n, H_n, $\boldsymbol{H}_\tau^-$, T^- не являются независимыми. Таким образом, если считать, что B_n, H_n, $\boldsymbol{H}_\tau^-$ заданы произвольно, то рассматриваемый разрыв может возникнуть лишь при T^-, удовлетворяющем уравнению (5.5).

Если зависимостью M от T можно пренебречь, то из (5.5) следует $H^+=H^-$, и тогда из (5.3) получаем $[U]=[p]=0$, так что в этом случае имеем дело с обычным альфвеновским вращательным разрывом, существующим в немагнитной среде.

В том случае, когда зависимость M от T существенна, из (5.3) получаем

$$\rho\,[w] = \left[\psi_T - \psi_\rho - \frac{\mu H_\tau^2}{8\pi}\right],$$

$$[p] = -\left[\psi_\rho + \frac{H_\tau^2}{8\pi}\right], \quad [M] = \frac{\mu - 1}{4\pi}[H], \tag{5.6}$$

где $\mu = 1 + \frac{4\pi M}{H} = \frac{B_n}{H_n}$ не меняется при переходе через скачок; $w = U + \frac{p}{\rho}$ — энтальпия среды.

Соотношения (5.6) служат для расчета скачков, в которых меняется не только направление касательного поля, но и его величина, и которые движутся с альфвеновской скоростью.

б) Скорость среды до скачка не равна альфвеновской, т. е. $v_n \neq v_A^-$.

Тогда из (5.4) следует, что направление касательного магнитного поля и скорости не меняются при переходе через поверхность разрыва.

Основные расчетные соотношения таких скачков получаются из (5.3) и имеют вид

$$\rho\,[w] = \left[\psi_T - \psi_\rho - \frac{\gamma^2(1 - m^-)}{8\pi}B_\tau^2\right],$$

$$[B_\tau] = \frac{1}{\gamma^2(1 - m^-)}[H_\tau], \tag{5.7}$$

$$[p] = -\left[\psi_\rho + 2\pi M_n^2 + \frac{1}{8\pi}H_\tau^2\right],$$

где $m^- = \frac{4\pi}{B^-}M(\rho,\ T^-,\ H^-)$; $\gamma = \frac{v_n}{v_A^-} \neq 1$.

Можно показать [12], что для случая $M = \rho K(\theta - T)$, $w = c_p T$, $B_n^2 \ll \rho c_p \theta$ при $\gamma > 1$ могут существовать скачки рассматриваемого типа.

4. Расчет скачков более общего вида ($m_n \neq 0$; $B_n \neq 0$; $[\rho] \neq 0$) опирается на общие зависимости (5.3). Из этих соотношений путем несложных арифметических действий можно получить уравнение ударной поляры в виде

$$[U] + \frac{p^+ + p^-}{2}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \frac{(B_\tau^+ - B_\tau^-)^2}{16\pi}\left[\frac{1}{\rho}\right] + \left[\frac{\psi_\rho - \psi_T}{\rho}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{M_\tau^-}{\rho^+} + \frac{M_\tau^+}{\rho^-}\right)[B_\tau] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho^+} + \frac{1}{\rho^-}\right)[2\pi M^2 + \psi_\rho] = 0. \tag{5.8}$$

Это уравнение отличается от уравнения поляры в случае немагнитной среды наличием последних трех слагаемых, зависящих от намагниченности среды. Отсюда, например, для альфвеновских разрывов ([ρ] = 0 имеем

$$\rho\,[U] = [2\pi M^2 + \psi_\rho] - 1/2\,(M_\tau^+ + M_\tau^-)\,[B_\tau]$$

в то время как для немагнитной среды $[U] = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов. О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учетом конечности деформации. ПММ, т. 29, вып. 1, 1965.

2. Боа-Те-Чу. Термодинамика электропроводных движущихся сред. Сб. «Плазма в магнитном поле». М., Госатомиздат, 1962.

3. J. Neuringer, R. Rosensweig. Ferrohydrodynamics. Phys. of Fluids, vol. 7, № 12, 1964.

4. И. Е. Тарапов. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. «Магнитная гидродинамика», 1972, 1.

5. H. Minkowski. Die Grundglichungen für die Elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Math. Ann., 68, 1910.

6. В. Паули. Теория относительности. Гостехиздат, 1947.

7. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957.

8. Д. Стрэттон. Теория электромагнетизма. М.—Л, ГИТТЛ, 1948.

9. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.

10. R. Curtis. Flows and Wave Propagation in Ferrofluids. Phys. of Fluids, vol. 14, № 10, 1971.

11. И. Е. Тарапов. Движение намагниченной проводящей жидкости между двумя плоскими электродами в поперечном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 1972.

12. И. Е. Тарапов. Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости, МЖГ, № 3, 1973.

Поступила 10 мая 1972 г.