ОПЕРАТОРНЫЕ J-УЗЛЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ

А. А. Янцевич

Хотя понятие операторного узла в теории несамосопряженных операторов возникло недавно, в настоящее время операторные узлы широко применяются для исследования несамосопряженных операторов [1], и для приложений [2, 3], причем в приложениях существенную роль играет специальная пара отображений, связанная с операторным узлом, содержащим несамосопряженный оператор. Эта пара отображений, так называемая открытая система, появилась в исследованиях М. С. Лившица [2].

В работах В. М. Бродского, И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [4—7] был введен операторный J-узел для неунитарного оператора и были доказаны основные теоремы теории операторных узлов и характеристических оператор-функций таких узлов. Отметим, что операторный узел, содержащий неунитарный оператор, был введен в работе [8], а характеристические функции для некоторых классов неунитарных операторов вводились и изучались в [9—13], однако открытой системы, отвечающей J-узлу, построено не было.

В настоящей статье вводится система, ассоциированная с J-узлом, и доказываются основные теоремы теории открытых систем. Следует подчеркнуть, что теория открытых систем используется не только в приложениях, но является удобным аппаратом для изучения самих операторных узлов.

1. Следуя работам [4—7], J-узлом будем называть совокупность

$$J = (T,\ H,\ \Phi,\ E,\ K) \tag{1}$$

двух гильбертовых пространств H и E и ограниченных операторов $T \in [H,\ H]$, $\Phi \in [E,\ H]$, $K \in [E,\ E]$, удовлетворяющих соотношениям и условиям:

$$\text{а)}\ TT^* - I = \Phi\Phi^+, \quad \Phi^+ = J\Phi^*, \quad J^* = J; \tag{2}$$

$$\text{б)}\ K^+K - I = \Phi^+\Phi,\ J^2 = I, \quad J \in [E,\ E]; \tag{3}$$

в) T и K — обратимые операторы.

Считая J-узел заданным, построим следующую пару отображений:

$$\psi_{n+1} - T\psi_n = \Phi u_n, \tag{4}$$

$$K^+ v_n = u_n + \Phi^+\psi_{n+1}, \tag{5}$$

где $\psi_n \in H$, u_n, $v_n \in E$ при каждом неотрицательном целом значении n.

Пару отображений (4) и (5) назовем *открытой системой, ассоциированной с J-узлом*, причем u_n, v_n, ψ_n будем называть соответственно входом, выходом и внутренним состоянием открытой системы.

Если рассмотреть частные решения (4) и (5), отвечающие входам вида $u_n = u\zeta^n$, где ζ — произвольное комплексное число, то отображение входа на выход в этом случае совпадает с характеристической оператор-функцией J-узла (1). Действительно, представляя ψ_n и v_n в виде $\psi_n = \psi\zeta^n$, $v_n = v\zeta^n$, получаем

$$\psi = R(\zeta)\,u, \quad R(\zeta) = (\zeta I - T)^{-1}\Phi, \tag{6}$$

$$v = \Theta(\zeta)\,u, \tag{7}$$

где оператор

$$\Theta(\zeta) = (K^+)^{-1}\left[I + \Phi^+\left(I - \frac{1}{\zeta}T\right)^{-1}\Phi\right] \tag{8}$$

и является характеристической оператор-функцией J-узла, причем

$$\Theta(\infty) = K. \tag{9}$$

(Нормировка на бесконечности принята ради удобства, в работах

[4—7] характеристическая оператор-функция определяется несколько иначе:

$$\Theta(\zeta) = J(K^*)^{-1}[J - \Phi^+(I - \zeta T^*)^{-1}\Phi], \tag{10}$$

$$\Theta(0) = K, \tag{11}$$

однако для приложений характеристическую оператор-функцию удобно определять при помощи соотношения (8)).

2. Заменим в уравнении открытой системы (4) вход u_n на $K^+ v_n - \Phi^+ \psi_{n+1}$. Тогда получим

$$T^*\psi_{n+1} - \psi_n = \tilde{\Phi} v_n, \tag{12}$$

где

$$\tilde{\Phi} = T^{-1}\Phi K^+. \tag{13}$$

Непосредственные подсчеты позволяют убедиться, что

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Phi}^+ = T^*T - I. \tag{14}$$

Найдем теперь $\tilde{\Phi}^+\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi}^+\tilde{\Phi} = K\Phi^+ T^{*-1} T^{-1}\Phi K^+ = K\Phi^+(\Phi\Phi^+ + I)^{-1}\Phi K^+. \tag{15}$$

Из условий J-узла вытекают равенства:

$$[I + (K^+K - I)^{-1}]^{-1} = I - (K^+K)^{-1}, \tag{16}$$

$$\Phi^+(\Phi\Phi^+ + I)^{-1}\Phi = [I + (\Phi^+\Phi)^{-1}]^{-1}. \tag{17}$$

Но тогда из (15) — (17) вытекает, что

$$\tilde{\Phi} + \tilde{\Phi} = KK^+ - I \tag{18}$$

и, следовательно, оператор T^* можно включить в узел

$$\tilde{J} = (T^*,\ H,\ \tilde{\Phi} = T^{-1}\Phi K^+,\ E,\ \tilde{K} = K^+). \tag{19}$$

Отметим, что другой способ построения узла, содержащего оператор T^*, использован в работе [7].

Применим теперь оператор K к обеим частям (5). Тогда

$$Ku_n = KK^+ v_n - K\Phi^+\psi_{n+1}$$

или

$$\tilde{K}^+ u_n = v_n - \tilde{\Phi}^+\psi_n. \tag{20}$$

Пару отображений (12) и (20) будем называть *двойственной системой* по отношению к открытой системе, ассоциированной с узлом (1). В двойственной открытой системе вход и выход поменялись местами по сравнению с исходной системой.

Укажем еще, как можно включить T^{-1} в $\hat{J}$-узел, если является основным оператором некоторого J-узла. Для этого вычислим

$$T^{-1}(T^{-1})^* - I = T^{-1}(I - TT^*)T^{*-1} =$$
$$= (T^{-1}\Phi)(T^{-1}\Phi)^+. \tag{21}$$

Обозначим через $\hat{\Phi}$ отображение $\hat{\Phi} = T^{-1}\Phi$ и введем в пространстве E новую метрику $\hat{\mu}_J$, полагая $\tilde{\mu}_J = \mu_{-J}$.

Рассмотрим

$$\hat{\Phi}^+\hat{\Phi} = -\Phi^+ (TT^*)^{-1}\Phi = K^{-1} (K^+)^{-1} - I. \tag{22}$$

Таким образом, T^{-1} можно включить в узел

$$\hat{J} = (T^{-1},\ H,\ \hat{\Phi} = T^{-1}\Phi,\ E,\ \hat{K}), \tag{23}$$

если в качестве оператора $\hat{K}$ взять $\hat{K} = (K^+)^{-1}$.

3. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. *Закон изменения метрики. Для входа, выхода и внутреннего состояния открытой системы (4) и (5), ассоциированной с J-узлом (1) имеет место соотношение*

$$\| \psi_{n+1} \|_H^2 - \| \psi_n \|_H^2 = \| v_n \|_E^2 - \| u_n \|_E^2. \tag{24}$$

Доказательство. Умножим соотношение (4) на ψ_{n+1} и, используя соотношения (12), (13), (20), получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \| \psi_{n+1} \|_H^2 &= (\Phi u_n,\ \psi_{n+1}) + (T\psi_n,\ \psi_{n+1}) = \\ &= [u_n,\ K^+v_n - u_n] + (\psi_n,\ T^*\psi_{n+1}) = \\ &= [u_n,\ K^+v_n] - \| u_n \|_E^2 + \| \psi_n \|_H^2 + [v_n - \tilde{K}^+u_n,\ v_n] = \\ &= \| v_n \|_E^2 - \| u_n \|_E^2 + \| \psi_n \|_H^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Теорема доказана.

Заметим, что закон изменения метрики означает J-унитарность некоторого оператора. Для этого по J-узлу построим отображение $H \oplus E$ в $H \oplus E$

$$\begin{aligned} y &= Tx + \Phi u, \quad y,\ x \in H, \\ v &= \tilde{\Phi}^+x + K^+u, \quad u,\ v \in E. \end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрев оператор

$$L = \begin{pmatrix} T & \Phi \\ \tilde{\Phi}^+ & \tilde{K}^+ \end{pmatrix}, \tag{27}$$

нетрудно проверить, что

$$L\tilde{J}L^*\tilde{J} = I,\ \tilde{J} = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & -I_E \end{pmatrix}, \tag{28}$$

т. е. оператор L является J-унитарным в метрике $\tilde{J}$, если выполнены условия J-узла. Наоборот, из условия $\tilde{J}$-унитарности оператора L, как легко проверить, вытекают условия узла. Возвращаясь к соотношениям (26), можно записать

$$\| y \|_H^2 - \| v \|_E^2 = \| x \|_H^2 - \| u \|_E^2, \tag{29}$$

или, полагая $y=\psi_{n+1}$, $x=\psi_n$, $u=u_n$, $v=v_n$, приходим к закону изменения метрики (24).

Следствие. *Если $\Theta(\zeta)$ характеристическая оператор-функция J-узла (1), то*

$$J-\Theta^+(\zeta)\Theta(\zeta)\begin{cases}\geqslant 0 & |\zeta|<1,\\ =0 & |\zeta|=1,\\ \leqslant 0 & |\zeta|>1.\end{cases} \tag{30}$$

Действительно, из соотношения (24) в частном случае (6), (7) получаем

$$[(J-\Theta^+(\zeta)\Theta(\zeta))u,\ u]=(1-|\zeta|^2)\|\psi\|^2, \tag{31}$$

откуда вытекает (30).

4. Открытую систему F назовем сцеплением открытых систем $F^{(k)}$: $F=F^{(1)}\vee F^{(2)}\vee\cdots\vee F^{(m)}$, если отображения R и S входа на внутреннее состояние и входа на выход соответственно определяются равенствами

$$R=R^{(1)}+R^{(2)}S^{(1)}+\cdots+R^{(m)}S^{(m-1)}\cdot\ \cdots\ \cdot S^{(1)}, \tag{32}$$

$$S=S^{(m)}S^{(m-1)}\ \cdots\ S^{(1)}. \tag{33}$$

Причем $H=H^{(1)}\oplus\cdots\oplus H^{(m)}$, а все пространства $E^{(k)}$ у открытых систем $F^{(k)}$ совпадают.

Теорема 2. *Пусть открытые системы $F^{(k)}$ ассоциированы соответственно с J-узлами $J_k=(T_k,\ H^{(k)},\ \Phi^{(k)},\ E,\ K^{(k)})$, $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Тогда сцепление $F=F^{(1)}\vee\cdots\vee F^{(m)}$ есть система, ассоциированная с произведением J-узлов J_k.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство для случая $k=2$. Произведение двух J-узлов определяется так: если

$$I_k(T_k,\ H^{(k)},\ \Phi^{(k)},\ E,\ K^{(k)}). \tag{34}$$

J-узлы, то совокупность $J=(T,\ H,\ \Phi,\ E,\ K)$, где

$$T=T_1P_1+T_2P_2-\Phi^{(2)}(K^{1+})^{-1}\Phi^{(1)+}T_1P_1, \tag{35}$$
$$\Phi=\Phi^{(1)}+\Phi^{(2)}K^{(1)},\quad K=K^{(2)}K^{(1)},\quad H=H^{(1)}\oplus H^{(2)},$$

называется произведением J-узлов J_1 и J_2. Можно доказать, что произведение J-узлов является снова J-узлом [7]. Но тогда, отправляясь от уравнений открытой системы, ассоциированной с (35), имеем

$$\psi_{n+1}^{(1)}-T_1\psi_n^{(1)}+\psi_{n+1}^{(2)}-T_2\psi_n^{(2)}=$$
$$=\Phi^{(1)}u_n+\Phi^{(2)}K^{(1)}u_n+\Phi^{(2)}(K^{(1)+})^{-1}\Phi^{(1)+}T_1\psi_n^{(1)},$$
$$K^{(1)+}K^{(2)}v_n=u_n+\Phi^{(1)+}\psi_{n+1}^{(1)}-K^{(1)+}\Phi^{(2)+}\psi_{n+1}^{(2)}.$$

Отсюда

$$\psi_{n+1}^{(1)}-T_1\psi_n^{(1)}=\Phi^{(1)}u_n,$$
$$K^{(1)+}v_n^{(1)}=u_n+\Phi^{(1)+}\psi_{n+1}^{(1)}; \tag{36}$$

$$\psi_{n+1}^{(2)} - T_2\psi_n^{(2)} = \Phi^{(2)}v_n^{(1)},$$
$$K^{(2)+}v_n^{(2)} = v_n^{(1)} + \Phi^{(2)+}\psi_{n+1}^{(2)}. \tag{37}$$

Соотношения (36) и (37) означают, что

$$R = R^{(1)} + R^{(2)}S^{(1)},$$
$$S = S^{(2)}S^{(1)}. \tag{38}$$

Следствие 1. *Если $H = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_m = 0$ — цепочка инвариантных подпространств оператора T, содержащегося в J-узле, то ассоциированная с J-узлом открытая система F разлагается в цепочку $F = F^{(1)} \vee \cdots \vee F^{(m)}$ систем $J^{(k)}$ ассоциированных с J-узлами $J^{(k)} = P_k^{\perp}J$, где $P_k^{\perp}$ — ортопроектор на подпространство $H_k^{\perp} = H_{k-1} \ominus H_k$.*

Следствие 2. *При перемножении J-узлов характеристические оператор-функции перемножаются.*

В заключение приношу благодарность М. С. Лившицу за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., «Наука», 1969.

2. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. М., «Наука», 1966.

3. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.

4. В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Определение и основные свойства характеристической функции J-узла. «Функциональный анализ и его приложения», т. 4, вып. 1, 1970.

5. В. М. Бродский. Некоторые теоремы об узлах и их характеристических функциях. Сб. «Функциональный анализ и его приложения», т. 4, вып. 3, 1970.

6. В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. О характеристических функциях обратимого оператора. Acta Sci. Math. т. 32, 1971.

7. В. М. Бродский. Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора. Acta Sci. Math., т. 32, 1971.

8. М. С. Лившиц. О неунитарных представлениях групп. Сб. «Функциональный анализ и его приложения», т. 3, вып. 1, 1969.

9. М. С. Лившиц, В. П. Потапов. Теорема умножения характеристических матриц функций. ДАН СССР, т. 62, № 4, 1950.

10. В. Т. Поляцкий. О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов. ДАН СССР, т. 113, № 4, 1957.

11. А. В. Кужель. Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов. «Научные доклады высшей школы», вып. 3, 1959.

12. В. Н. Поляков. К теории характеристических функций линейных операторов. «Изв. вузов», вып. 63, 1967.

13. Б. С. Надь, К. Фойяш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М., «Мир», 1970.

Поступила 5 июня 1971 г.