ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО МЕТОДА ШВАРЦА

В. Э. Кацнельсон, В. В. Меньшиков

Пусть в пространстве R^n, $n \geqslant 2$, даны две замкнутые области G_1 и G_2, и пусть пересечение их внутренностей непусто. Тогда, используя альтернирующий метод Шварца, [1], мы можем построить последовательность функций, сходящуюся к решению заданной задачи Дирихле в области $G = G_1 \bigcup G_2$. Эта последовательность строится путем поочередного решения задач Дирихле в областях G_1 и G_2. Метод Шварца применим не только к решению задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона, но и к другим краевым задачам для эллиптических уравнений второго порядка.

Если области G_1 и G_2 пересекаются лишь по части границы, то метод Шварца непосредственно неприменим, а искусственное продолжение одной области внутрь другой может оказаться неудобным с вычислительной точки зрения. Ниже предлагается аналог метода Шварца, рассчитанный на эту ситуацию. Как и в методе Шварца, в предлагаемом нами методе для решения краевой задачи в области $G = G_1 \cup G_2$ приходится поочередно решать краевые задачи, то в области G_1, то в области G_2.

Пусть в области G с границей ∂G требуется найти решение $u(x)$ уравнения

$$\operatorname{div}(\lambda(x) \operatorname{grad} u(x)) = P(x) \quad (x \in G) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$Lu|_{\partial G} = 0, \tag{2}$$

где

$$Lu = \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u, \tag{3}$$

через $\frac{\partial}{\partial n}$ здесь обозначена призводная по внешней относительно G нормали. Здесь α, β, λ, P — заданные функции, (не очень плохие, скажем, кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие), $\lambda > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$.

Дивергентное эллиптическое уравнение (1) часто встречается в различных вопросах математической физики, например, в электростатике, где λ — диэлектрическая проницаемость, P — объемная плотность заряда, и в теории теплопроводности, где λ — коэффициент теплопроводности, — P — рассеиваемая мощность. В случае, когда $\lambda(x)$ — константа, уравнение (1) сводится к уравнению Пуассона, и если область G несложной формы (например, прямоугольный параллелепипед или цилиндр), и граничные условия допускают разделение переменных, то решение краевой задачи (1), (2) легко находится в рядах Фурье.

Ситуация резко осложняется, когда функция $\lambda(x)$ — не константа или граничные условия исключают применение метода Фурье (например, область — прямоугольник, и на части его стороны ставится условие Дирихле, а на части — условие Неймана).

Метод, который мы предлагаем, приспособлен к решению краевых задач для уравнения (1) в случае, когда область G состоит из состыкованных друг с другом областей простой формы, в каждой из которых функция $\lambda(x)$ — константа, и условия (2) на границе каждой из них удобны для применения метода Фурье. Изложение метода будет дано на характерном примере.

Пусть область G, в которой ищется решение уравнения (1), состоит из двух частей G_1 и G_2, разделенных гладкой поверхностью Γ, и пусть в каждой из двух частей G_1 и G_2 функция $\lambda(x)$ — константа,

$$\lambda(x) = \lambda_1 (x \in G_1), \ \lambda(x) = \lambda_2 (x \in G_2),$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ — некоторые константы. Такая ситуация возникает, например, когда ищется температурное поле в теле, состыкованном из двух однородных частей с коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_2 соответственно. Пусть* $\Gamma_1 = \partial G_1 \setminus \Gamma$, $\Gamma_2 = \partial G_2 \setminus \Gamma$. Обозначим через $u_j(x)$, $j = 1, 2$, сужение решения $u(x)$ уравнения (1) на области G_1 и G_2. Тогда нахождение решения $u(x)$ краевой задачи (1), (2) сводится к нахождению решений $u_1(x)$, $u_2(x)$ уравнений.

$$\Delta u_j(x) = \frac{P(x)}{\lambda_j} (x \in G_j), \ j = 1, \ 2,$$

удовлетворяющих на Γ_1, Γ_2 граничным условиям (2), а на поверхности раздела Γ — условиям стыковки: $u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma$ — условие непрерывности функции $u(x)$ в G, $\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}|_\Gamma = \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}|_\Gamma$ — условие «теплового баланса». Здесь и ниже $\frac{\partial}{\partial n}|_\Gamma$ — производная по нормали, внешней по отношению к G_1 в точках поверхности Γ.

Предположим, что мы умеем решать возникающие в G_1 и G_2 краевые задачи. Покажем сейчас, как, решая поочередно краевые задачи, то в области G_1, то в области G_2, найти решение исходной краевой задачи (1), (2) в G. Построим последовательности функций $u_1^\kappa(x)$, $u_2^\kappa(x)$, сходящиеся в G_1 и G_2 соответственно к $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

Зададимся на Γ произвольной (достаточно гладкой) функцией φ и решим в G_1 краевую задачу

$$\Delta u_1^1(x) = \frac{P(x)}{\lambda_1} (x \in G_1),$$
$$\frac{\partial u_1^1}{\partial n}|_\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \varphi, \ L u_1^1|_{\Gamma_1} = 0.$$

Теперь, когда нам известна в G_1 функция $u_1^1(x)$, в частности, известны ее значения на Γ, решим в G_2 краевую задачу

$$\Delta u_2^1(x) = \frac{P(x)}{\lambda_2} (x \in G_2),$$
$$u_2^1|_\Gamma = u_1^1|_\Gamma, \ L u_2^1|_{\Gamma_2} = 0.$$

Функции $u_1^1(x)$ и $u_2^1(x)$ будем рассматривать как первые приближения к решению краевой задачи (1), (2) в областях G_1 и G_2. Дальнейшие приближения $u_1^\kappa(x)$, $u_2^\kappa(x)$, $\kappa \geqslant 1$, строятся индуктивно. В их

* Через ∂G, ∂G_1, ∂G_2 обозначены границы областей G, G_1, G_2.

эстроении фигурирует некоторый вещественный параметр t, обеспечивающий и регулирующий сходимость.

Пусть приближения $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$, $n \geqslant 1$, уже построены. Функция $u_1^{n+1}(x)$ строится как решение краевой задачи

$$\Delta u_1^{n+1}(x) = \frac{P(x)}{\lambda_1}\ (x \in G_1),$$

$$\frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial u_2^n}{\partial n}\Big|_\Gamma,\quad L u_1^{n+1}\big|_{\Gamma_1} = 0.$$

Теперь, когда нам известна функция u_1^{n+1} в G_1, и в частности, ее значения на Γ, решим в G_2 краевую задачу

$$\Delta \hat{u}_2^{n+1}(x) = \frac{P(x)}{\lambda_2}\ (x \in G_2),$$

$$\hat{u}_2^{n+1}\big|_\Gamma = u_1^{n+1}\big|_\Gamma,\quad L\hat{u}_2^{n+1}\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

и положим

$$u_2^{n+1}(x) = (1-t)\ \hat{u}_2^{n+1}(x) + t u_2^n(x)\ (x \in G_2).$$

Оказывается, что существует такой интервал значений параметра что при выборе t из этого интервала последовательности $u_1^\kappa(x)$ $u_2^\kappa(x)$ при $\kappa \to \infty$ сходятся к решению $u_1(x)$, $u_2(x)$ исходной задачи. Копируя метод Шварца, мы должны были бы положить $t = 0$, но оказывается, что при таком выборе t процесс может расходиться. Интервал значений t, в котором будет иметь место сходимость, зависит от отношения λ_2/λ_1, геометрии областей G_1 и G_2 и граничных условий (2).

Исследуем сходимость. Пусть $v_1^\kappa(x) = u_1(x) - u_1^\kappa(x)$, $(x \in G_1)$, $\hat{v}_2^\kappa(x) = u_2(x) - \hat{u}_2^\kappa(x)$, $v_2^\kappa(x) = u_2(x) - u_2^\kappa(x)$, $(x \in G_2)$. Сходимость последовательностей $u_1^\kappa(x)$ и $u_2^\kappa(x)$ к $u_1(x)$ и $u_2(x)$ эквивалентна сходимости последовательностей $v_1^\kappa(x)$ и $v_2^\kappa(x)$ к нулю. Заметим, что если в качестве функции φ, определяющей первое приближение, взять $\varphi = \frac{\partial u_2}{\partial n}\big|_\Gamma$, то при всех κ будет выполняться

$$u_1^\kappa(x) \equiv u_1(x),\ \hat{u}_2^\kappa(x) \equiv u_2(x),\ u_2^\kappa(x) \equiv u_2(x).$$

Поэтому последовательности $v_1^\kappa(x)$, $v_2^\kappa(x)$ можно строить следующим образом.

Зададимся на Γ произвольной функцией ψ $\left(\text{функция } \psi \text{ связана с фигурировавшей ранее функцией } \varphi \text{ равенством } \varphi = \psi + \frac{\partial u_2}{\partial n}\big|_\Gamma\right)$, и решим в G_1 краевую задачу

$$\Delta v_1^1(x) = 0\quad (x \in G_1)$$

$$\frac{\partial v_1^1}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\psi,\quad L v_1^1\big|_{\Gamma_1} = 0.$$

Затем решим в G_2 краевую задачу

$$\Delta v_2^1(x)=0 \quad (x\in G_2),$$
$$v^1_{2\,|\Gamma}=v^1_{1\,|\Gamma},\quad Lv^1_{2\,|\Gamma_2}=0.$$

Функции $v_1^k(x)$ и $v_2^\kappa(x)$, $\kappa>1$, строятся индуктивно. Если функции $v_1^n(x)$, $v_2^n(x)$, $n\geqslant 1$, уже построены, то функцию $v_1^{n+1}(x)$ строим как решение краевой задачи

$$\Delta v_1^{n+1}(x)=0 \quad (x\in G_1),$$
$$\frac{\partial v_1^{n+1}}{\partial n}\Big|_\Gamma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial v_2^n}{\partial n}\Big|_\Gamma,\quad Lv_1^{n+1}\,|_{\Gamma_1}=0.$$

Функцию $\hat v_2^{n+1}(x)$ строим как решение краевой задачи

$$\Delta \hat v_2^{n+1}(x)=0 \quad (x\in G_2),$$
$$\hat v_2^{n+1}\,|_\Gamma=v_1^{n+1}\,|_\Gamma,\quad L\hat v_2^{n+1}\,|_{\Gamma_2}=0.$$

и полагаем

$$v_2^{n+1}(x)=(1-t)\,\hat v_2^{n+1}(x)+tv_2^n(x),\quad (x\in G_2).$$

Введем в рассмотрение оператор A, действующий в пространстве функций, заданных на Γ. Пусть $f(x)$ — заданная на Γ функция. Решим в G_1 краевую задачу

$$\begin{gathered}\Delta w_1(x)=0 \quad (x\in G_1),\\ \frac{\partial w_1}{\partial n}\Big|_\Gamma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}f(x),\quad Lw_{1\,|\Gamma_1}=0,\end{gathered}\tag{4}$$

а затем в G_2 — краевую задачу

$$\begin{gathered}\Delta w_2(x)=0 \quad (x\in G_2),\\ w_{2\,|\Gamma}=w_{1\,|\Gamma},\quad Lw_{2\,|\Gamma_2}=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Пусть g — значение $\frac{\partial w_2}{\partial n}$ на Γ. Положим по определению $Af=g$.

Из построения функций v_1^κ, v_2^κ видно, что

$$\frac{\partial v_2^1}{\partial n}\Big|_\Gamma=Af,$$

а

$$\frac{\partial v_2^{n+1}}{\partial n}\Big|_\Gamma=\{(1-t)\,A+tI\}\,\frac{\partial v_2^n}{\partial n}\Big|_\Gamma.$$

Здесь I — единичный оператор.

Для доказательства сходимости последовательности $\frac{\partial v_2^\kappa}{\partial n}$ к нулю введем в пространстве функций, заданных на Γ, некоторую норму и докажем, что при надлежащем выборе t оператор $\{(1-t)\,A+tI\}$ будет являться сжатием.

Естественно, что существу дела отвечает норма типа нормы Дирихле. Она порождается описываемым ниже скалярным произведением.

Пусть f и g — функции, заданные на Г. Решим краевые задачи

$$\Delta u_f(x)=0\ (x\in G_1),\ \frac{\partial \bar{u}_f}{\partial n}\Big|_\Gamma=f,\ Lu_f\big|_{\Gamma_1}=0,$$

$$\Delta u_g(x)=0\ (x\in G_1),\ \frac{\partial u_g}{\partial n}\Big|_\Gamma=g,\ Lu_g\big|_{\Gamma_1}=0.$$

Положим теперь по определению

$$(f,\ g)=\int\limits_\Gamma u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds,$$

где ds — элемент площади Г. Эта формула, задающая скалярное произведение, выглядит несимметрично относительно f и g и на первый взгляд не видно, что $(f,\ f)\geqslant 0$. На самом деле, она симметрична относительно f и g и $(f,\ f)\geqslant 0$.

Действительно, по формуле Грина

$$\int\limits_{\partial G_1} u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds=\int\limits_{G_1}\operatorname{grad}u_f\cdot\operatorname{grad}\bar{u}_g\,dv,$$

где dv — элемент объема области G_1, а ds — элемент площади ее границы.

Далее имеем

$$\int\limits_{\partial G_1} u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds=\int\limits_{\Gamma} u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds+\int\limits_{\Gamma_1} u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds.$$

Так как на Γ_1 функции u_f и u_g удовлетворяют краевому условию (2), (3), то в тех точках Γ_1, где $\alpha=0$, будет выполняться равенство $u_f=0$, и значит, $u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}$. В тех точках Γ_1, где $\alpha\neq 0$, будем иметь $\frac{\partial u_g}{\partial n}=-\frac{\beta}{\alpha}u_g$.

Поэтому

$$(f,\ g)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_\Gamma u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds=\int\limits_{G_1}\operatorname{grad}u_f\operatorname{grad}\bar{u}_g dv+\int\limits_{\Gamma_1'}\frac{\beta}{\alpha}u_f\cdot\bar{u}_g ds,\qquad(6)$$

где Γ_1' — подмножество Γ_1, на котором $\alpha>0$. Из последней формулы видно, что $(f,\ f)\geqslant 0$ и $(f,\ f)>0$, если $f\neq 0$ и на Γ_1 $\beta\not\equiv 0$.

Лемма. *Оператор A, действующий в пространстве функций, заданных на Г, наделенном описанным выше скалярным произведением, отрицателен, т. е. $(Af,\ f)\leqslant 0$ $(\forall f)$.*

Доказательство. Пусть $g=Af$. Имеем $(Af, f)=\int\limits_\Gamma u_f\cdot\frac{\partial \bar{u}_g}{\partial n}\,ds.$

По функции f, заданной на Γ, в G_1 строится функция u_f:

$$\Delta u_f(x) = 0 \ (x \in G_1), \ \frac{\partial u_f}{\partial n}\Big|_\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} f, \ Lu_f\big|_\Gamma = 0,$$

затем в G_2 решается краевая задача

$$\Delta w(x) = 0 \ (x \in G_2), \ w\big|_\Gamma = u_f\big|_\Gamma, \ Lw\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

мы полагаем $g = \frac{\partial w}{\partial n}\big|_\Gamma$. Напоминаем, что через $\frac{\partial}{\partial n}\big|_\Gamma$ здесь обозначена производная по внешней относительно G_1 (и значит, по внутренней относительно G_2) нормали в точках Γ. Имеем $(f, g) = \int\limits_\Gamma u_f \cdot \frac{\partial u_g}{\partial n} ds$, и так как на Γ $u_f = w$, $\frac{\partial u_g}{\partial n} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial n}$, то $(Af, f) = (f, g) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int\limits_\Gamma w \cdot \frac{\partial \overline{w}}{\partial n} ds.$

Преобразуя последнее выражение для (Af, f), как и выше, (но учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n}$ здесь — производная по внутренней относительно G_2 нормали), получаем

$$(Af, f) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int\limits_{G_2} |\operatorname{grad} w|^2 dv - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \int\limits_{\Gamma_2'} \frac{\beta}{\alpha} |w|^2 ds, \tag{7}$$

т. е. $(Af, f) \leqslant 0$,
Лемма доказана.

Оказывается, что в широком классе случаев оператор ограничен и отрицательно определен, т. е. $m > 0$, $M < \infty$, где

$$m = \inf_{\|f\|=1} (-Af, f), \ M = \sup_{\|f\|=1} (-Af, f).$$

Мы не будем приводить здесь детального исследования, при каких краевых условиях оператор ограничен и отрицательно определен. Ниже будет приведено доказательство ограниченности оператора A в случае области G специальной формы и специальных граничных условиях, однако на этом частном случае будет проиллюстрирован общий подход.

Оператор $(1-t)A + tI$ будет иметь своей верхней и нижней гранями числа $t - m(1-t)$ и $t - M(1-t)$ *. Оператор A самосопряжен, так как его квадратичная форма ограничена и принимает вещественные значения. Так как норма самосопряженного оператора равна наибольшей из абсолютных величин его верхней и нижней граней, то

$$\|(1-t)A + tI\| = \max\{|t - M(1-t)|, \ |t - m(1-t)|\}.$$

---

* При $t \leqslant 1$ первое из этих чисел является верхней гранью, а второе — нижней, при $t > 1$ — наоборот.

Неравенство $\| (1-t) A + tI \| < 1$ эквивалентно неравенству

$$\frac{M-1}{M+1} < t < 1.$$

Таким образом, при $t \in \left(\frac{M-1}{M+1},\ 1\right)$ будем иметь $\| (1-t) A + tI \| < 1$, и значит $\left\| \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \right\| \to 0\ (n \to \infty)$. Расшифруем, что означает условие $\left\| \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \right\| \to 0\ \ (n \to \infty)$.

Из определения функции $v_1^{n+1}(x)$ следует, что если $f = \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \mid \Gamma$, то фигурирующая в определении скалярного произведения функция $u\ (x)$ пропорциональна $v_1^{n+1}(x)$:

$$u_f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ v_1^{n+1}(x)\ \ (x \in G_1).$$

Значит, если $\left\| \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \mid \Gamma \right\| \to 0\ \ (n \to \infty)$,

$$\int_{G_1} | \operatorname{grad} v_1^{n+1}(x) |^2\, dv + \int_{\Gamma_1'} \frac{\beta}{\alpha} | v_1^{n+1} |^2\, ds \to 0\ \ (n \to \infty). \tag{8}$$

Из (7) и определения функций $v_1^n(x)$, $\hat{v}_2^n(x)$, $v_2^n(x)$ следует, что, если $f = \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \mid \Gamma$,

$$(-Af,\ f) = \int_{G_2} | \operatorname{grad} \hat{v}_2^{n+1}(x)^2\, dv + \int_{\Gamma_2} \frac{\beta}{\alpha} | \hat{v}_2^{n+1} |\, ds.$$

Так как $\| A \| < \infty$, и $\left\| \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \right\| \to 0\ \ (n \to \infty)$, то $\int_{G_2} | \operatorname{grad} \hat{v}_2^n(x)^2\, dv + \int_{\Gamma_2} \frac{\beta}{\alpha} | \hat{v}_2 |^2\, ds \to 0\ \ (n \to \infty)$. Поскольку $v_2^\kappa(x) = (1-t)\, \hat{v}_2^\kappa(x) + t v_2^{\kappa-1}(x)$, $\kappa > 1$, то

$$v_2^n = (1-t)\, \hat{v}_2^n + (1-t)\, t \cdot \hat{v}_2^{n-1} + \ldots + (1-t)\, t^{n-2}\, \hat{v}_2^2 + t^{n-1} v_2^7,$$

и значит, если $\left\| \frac{\partial v_2^n}{\partial n} \mid \Gamma \right\| \to 0\ \ (n \leftarrow \infty)$,

$$\int_{G_2} | \operatorname{grad} v_2^n |^2\, dv + \int_{\Gamma_2'} \frac{\beta}{\alpha} | v^n |\, ds \to 0\ \ (n \to \infty). \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует, что если $\beta \not\equiv 0$, при $t \in \left(\frac{M-1}{M+1},\ 1\right)$ $v_2^n(x) \to 0$, $v_2^n(x) \to 0\ \ (n \to \infty)$ равномерно по x на каждом компакте внутри G_1 и G_2.

Функция $\|(1-t)A+tI)\|$ достигнет своего минимума при значении $t_{\min}$ параметра t:

$$t_{\min}=1-\frac{1}{\frac{m+M}{2}+1},$$

$$(1-t_{\min})A+t_{\min}I\|=\frac{M-m}{m+M+2},$$

и при $t=t_{\min}$ получим наиболее быстро сходящийся процесс. Разумеется, при практических вычислениях мы не можем использовать $t=t_{\min}$, так как точные значения m и M нам обычно неизвестны.

Приведем теперь доказательство ограниченности оператора A в следующем частном случае. Пусть G_1—прямоугольник—$b_1\leqslant x\leqslant b_1$, $-h_1\leqslant y\leqslant 0$, G_2 — прямоугольник — $a_1\leqslant x\leqslant a_2$, $0\leqslant y\leqslant h_2$, $[-a_1, a_2]\subseteq[-b_1, b_2]$, $G=G_1\cup G_2$. Краевые условия имеют вид: на нижней стороне Γ_1'' прямоугольника G_1 обращается в нуль функция u, на $\Gamma_1'=\Gamma_1\setminus\Gamma_1''$ и на Γ_2 обращается в нуль ее нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$. Кривая Γ — общая часть G_1 и G_2, в рассматриваемом случае является отрезком $-a_1\leqslant x\leqslant a_2$, $y=0$. Пусть на Γ задана функция $f(x)$, $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ — решения краевых задач (4), (5). Нам нужно оценить сверху отношение $(-Af, f)/(f, f)$. Согласно (6) имеем

$$(f, f)=\iint\limits_{G_1}|\operatorname{grad} w_1(x, y)|^2\,dxdy$$

и согласно (7)

$$(-Af, f)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\iint\limits_{G_2}|\operatorname{grad} w_2(x, y)|^2\,dxdy.$$

На Γ значения функции $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ совпадают, их общее значение на Γ обозначим через $h(x)$. Итак, нам нужно оценить отношение

$$\iint\limits_{G_2}|\operatorname{grad} w_2(x, y)|^2\,dxdy:\iint\limits_{G_1}|\operatorname{grad} w_1(x, y)|^2\,dxdy, \tag{10}$$

где $w_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ — решения уравнения Лапласа в G_1 и G_2 соответственно, удовлетворяющие краевым условиям

$$w_1(x, y)_{|\Gamma}=h(x),\ \frac{\partial w_1}{\partial n}_{|\Gamma_1'}=0,\quad w_{1\,|\Gamma_1''}=0,$$

$$w_{2\,|\Gamma}=h(x),\ \frac{\partial w_2}{\partial n}_{|\Gamma_2}=0.$$

Для оценки отношения (10) используем вариационные соображения. Как известно [2], решение $w_1(x, y)$ описанной краевой задачи для уравнения Лапласа доставляет минимум функционалу $J_1(z)$:

$$\iint\limits_{G_1}|\operatorname{grad} w_1(x, y)|^2\,dxdy=\min_{z\in K_1}J_1(z)$$

где

$$J_1(z) = \iint\limits_{G_1} |\operatorname{grad} z(x, y)|^2\, dxdy,$$

а K_1 — множество функций, принадлежащих $W_2^1(G_1)$ и удовлетворяющих краевым условиям $z_{|\Gamma} = h$, $z_{|\Gamma_1''} = 0$.

Решение же $w_2(x, y)$ доставляет минимум функционалу $J_2(z)$:

$$\iint\limits_{G_2} |\operatorname{grad} w_2(x, y)|^2\, dxdy = \min_{z \in K_2} \iint\limits_{G_2} |\operatorname{grad} z(x, y)|^2\, dxdy,$$

где K_2 — множество функций, принадлежащих $W_2^1(G_2)$ и удовлетворяющих краевому условию $z_{|\Gamma} = h$. Если функция $z_1(x, y) \in K_1$, то функция $z_2(x, y) = z_1(x, \; -Hy)$, где $H = \min(1, \; h_2/h_1)$, принадлежит K_2, и

$$\iint\limits_{G_1} |\operatorname{grad} z_2(x, y)|^2\, dxdy \leqslant \max(H, 1/H) \iint\limits_{G_1} |\operatorname{grad} z_1(x, y)|^2\, dxdy.$$

Поэтому

$$\min_{z \in K_2} J_2(z) \leqslant \max(1, h_2/h_1) \min_{z \in K_1} J_1(z),$$

и значит,

$$\frac{(-Af, f)}{(f, f)} \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \max(1, h_2/h_1).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
2. Р. Курант, Т. Д. Гильберт. Методы математической физики. М.—Л., Гостехиздат, 1951.

Поступила 29 ноября 1971 г.