ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ЛАНДАУ

А. А. Гольдберг

В этой заметке дается ответ на один вопрос Е. А. Горина, которому я благодарен за постановку задачи. Благодарю также его, Б. Я. Левина и И. В. Островского за ценные советы.

Обозначим через K_1 класс функций, мероморфных в $U = \{|z| < 1\}$ и имеющих в U конечные и разные числа нулей, единиц и полюсов (нули, единицы и полюсы засчитываются с учетом их порядков). Если $f \in K_1$, то обозначим через $r(f)$ максимальный модуль нулей, единиц и полюсов функции $f(z)$ в U. Очевидно, $0 < r(f) < 1$. Пусть K_2, K_3, K_4 — подклассы класса K_1, состоящие соответственно из аналитических в U функций, рациональных функций и многочленов. Пусть

$$A_j = \inf_{f \in K_j} r(f), \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{1}$$

Теорема 1. *Имеет место* $0 < A_1 = A_3 < A_2 = A_4$.

Для всех $f \in K_j$, $j = 1, 3, 4$, *выполняется* $r(f) > A_j$. *Существует такая функция* $F_2 \in K_2$, *что* $r(F_2) = A_2$.

В теореме 1 наиболее важным является утверждение о том, что $A_1 > 0$. Покажем, что для выполнения этого неравенства требование, чтобы $f \in K_1$ имели различное число нулей, единиц и полюсов, входящее в определение класса K_1, не может быть отброшено, даже если ограничиться многочленами. У функций $f(z) = z$ и $f(z) = z + 1$ число $r(f) = 0$, но у первой функции числа единиц и полюсов равны нулю, а у второй — числа нулей и полюсов равны нулю. У функции $f_n(z) = (nz)^n$, $n = 2, 3, \ldots$, $r(f_n) = 1/n$, но у нее числа нулей и единиц равны n. Отметим еще следующее очевидное следствие из теоремы 1.

Следствие. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция в* U, a_1, a_2, a_3 — *три различных точки из расширенной комплексной плоскости. Если все* a_j-*точки* $f(z)$ *лежат в замкнутом круге* $\{|z| \leqslant A_1\}$, $j = 1, 2, 3$, *то хотя бы для одной пары индексов* $i \neq j$ *числа* a_i- *и* a_j-*точек функции* $f(z)$ *равны.*

Пусть $f(z)$ — *аналитическая функция в* U, a *и* b — *два конечных комплексных числа. Если все* a- *и* b-*точки* $f(z)$ *лежат в круге* $\{|z| < A_2\}$, *то или функция* $f(z)$ *не принимает в* U *по крайней мере одно из значений* a *и* b, *или числа* a- *и* b-*точек равны.*

Мы приведем также числовые оценки для постоянных A_1 и A_2.

Теорема 2. *Справедливы неравенства*

$$A_1 < 0{,}0091\ldots, \quad 0{,}0000038\ldots < A_2 < 0{,}031\ldots.$$

Оценить A_1 снизу не удалось.

Нам будет удобно расширить класс K_1, введя класс K_0, который определяется следующим образом. Рассмотрим функции $f(z)$, аналитические в кольце $\{R(f) < |z| < 1\}$. Предположим, что множество нулей и единиц $f(z)$ не имеет точек сгущения на окружности $\{|z| = 1\}$. Если это множество непусто, то обозначим через $r(f)$ максимальный модуль нулей и единиц функции $f(z)$. Если же $f(z) \neq 0, 1$ в кольце $\{R(f) < |z| < 1\}$, то положим $r(f) = R(f)$. Если на некоторой окружности $\{|z| = s\}$, $r(f) < s < 1$, приращения $\arg f(z)$ и $\arg(f(z) - 1)$ отличны от нуля и не равны между собой, то скажем, что функция $f(z)$ принадлежит классу K_0. Очевидно, указанные приращения $\arg f(z)$ и $\arg(f(z) - 1)$ не зависят от выбора $s \in (r(f), 1)$, более того, вместо окружности $\{|z| = s\}$ можно брать любую замкнутую кривую в кольце $\{r(f) < |z| < 1\}$, на которой приращение $\arg z$ равно 2π. Определим A_0 формулой (1), где взято $j=0$. Легко проверить, что $K_1 \subset K_0$.

Теорема 3. *Выполняется* $A_0 > 0$ *и существует такая функция* $F_0 \in K_0$, *что* $r(F_0) = A_0$.

Доказательство. Предположим, что $A_0 = 0$. Тогда существует такая последовательность $\{\tilde{f}_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, $\tilde{f}_n \in K_0$, что $r(\tilde{f}_n) \to 0$ и $r(\tilde{f}_n) < 1/2$. Функции $\tilde{f}_n(z)$ образуют в кольце $\{1/2 < |z| < 1\}$ нормальное семейство. Выберем из $\{\tilde{f}_n\}$ подпоследовательность $\{f_{2,m}\}_{m=1}^{\infty}$, которая равномерно сходится на любом замкнутом подмножестве кольца $\{1/2 < |z| < 1\}$ или к аналитической функции, или к ∞. Но последний случай надо исключить, так как тогда при $m \geqslant m_0$ выполнялось бы $|f_{2,m}(z)| \geqslant 2$ при $|z| = 3/4$ и по теореме Руше приращения $\arg f_{2,m}(z)$ и $\arg(f_{2,m}(z) - 1)$ на окружности $\{|z| = 3/4\}$ были бы равны, что противоречит условию $f_{2,m} \in K_0$. Рассуждая так же, находим последовательности $\{f_{lm}(z)\}_{m=1}^{\infty}$, $f_{lm} \in K_0$, $r(f_{lm}) < 1/l$, $l = 2, 3, \ldots$, такие что $\{f_{l+1,m}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_{lm}\}$ и $\{f_{lm}\}$ при $m \to \infty$ равномерно сходится на любом замкнутом подмножестве кольца $\{1/l < |z| < 1\}$ к аналитической функции. Тогда последовательность $f_n(z) = f_{nn}(z)$ при $n \to \infty$ стремится к аналитической в $\{0 < |z| < 1\}$ функции $F(z)$, причем на каждом замкнутом подмножестве круга без центра $\{0 < |z| < 1\}$ стремление равномерно. Так как $f_n(z) \neq 0$, 1 при $1/n < |z| < 1$, то в силу теоремы Гурвица $F(z) \neq 0$, 1 при $0 < |z| < 1$. По теореме Пикара $F(z)$ не может иметь в $z = 0$ существенно особой точки. Если $F(z)$ имеет в $z = 0$ полюс, то приращения $\arg F(z)$ и $\arg(F(z) - 1)$ на окружности $\{|z| = 1/2\}$ равны одному и тому же (отрицательному) числу и, следовательно, то же можно сказать о приращениях $\arg f_n(z)$ и $\arg(f_n(z) - 1)$ при $n \geqslant n_0$, что противоречит определению класса K_0. Если $F(0) \neq 0$ (если $F(0) \neq 1$), то приращение $\arg F(z)$ (приращение $\arg(F(z) - 1)$) на $\{|z| = 1/2\}$ равно нулю и, как раньше, приходим к противоречию. Следовательно, $A_0 > 0$.

Возьмем последовательность $\{\tilde{f}_n\}$, $\tilde{f}_n \in K_0$, такую, что $r(\tilde{f}_n) \to A_0$ при $n \to \infty$. Рассуждая, как выше, убеждаемся, что из $\{\tilde{f}_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_n(z)\}$, равномерно сходящуюся к аналитической функции $F_0(z)$ на каждом замкнутом подмножестве в кольце $\{A_0 < |z| < 1\}$. Используя теорему Гурвица, легко показать, что $F_0(z) \neq 0$, 1 при $A_0 < |z| < 1$, $F_0(z) \in K_0$ и $r(F_0) = A_0$. Теорема 3 доказана.

Лемма 1. *Если* $F_0 \in K_0$ *и* $r(F_0) = A_0$, *то для аналитической функции* F_0 *кольцо* $\{A_0 < |z| < 1\}$ *является естественной областью существования.*

Очевидно, что $F_0(z) \neq 0$, 1 при $A_0 < |z| < 1$. Предположим, что $F_0(z)$ можно непосредственно аналитически продолжить в некоторую область D, содержащую кольцо $\{A_0 < |z| < 1\}$. Не уменьшая общности, можно считать, что D — двусвязная область, кольцо

$\{A_0 < |z| < 1\}$ разделяет компоненты границы D и $F_0(z) \neq 0,\ 1$ в D. Пусть функция $\zeta = \psi(z)$ конформно и однолистно отображает область D на кольцо $\{\rho < |\zeta| < 1\}$. Тогда $\rho < A_0$ (см. [1, стр. 209], или [2, стр. 145]). Если $z = \varphi(\zeta)$ — функция, обратная к $\zeta = \psi(z)$, то легко убедиться, что $F_0(\varphi(\zeta)) \in K_0$, $F_0(\varphi(\zeta)) \neq 0,\ 1$ при $\rho < |\zeta| < 1$. Следовательно, $r(F_0 \circ \varphi) = \rho < A_0$, что противоречит определению числа A_0.

Доказательство теоремы 1. Так как $K_0 \supset K_1 \supset K_3$, то $0 < A_0 \leqslant A_1 \leqslant A_3$. Покажем, что $A_3 = A_0$. Пусть $F_0(z) \in K_0$, $r(F_0) = A_0$. Рассмотрим функцию $F_\varepsilon(z) = F_0(z/(1+\varepsilon))$, где $0 < \varepsilon < A_0^{-1/2} - 1$, аналитическую в кольце $\{A_0(1+\varepsilon) < |z| < 1 + \varepsilon\}$. Пусть $F_\varepsilon(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ — разложение $F_\varepsilon(z)$ в ряд Лорана.

Рациональные функции $\Lambda_n(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k z^k$ при $n \to \infty$ равномерно сходятся к $F_\varepsilon(z)$ на любом замкнутом подмножестве кольца $\{A_0(1+\varepsilon) < |z| < 1+\varepsilon\}$. Так как в этом кольце $F_\varepsilon(z) \neq 0,\ 1$, то при $n \geqslant n_0$ в силу теоремы Гурвица $\Lambda_n(z) \neq 0,\ 1$ в кольце $\{A_0(1+\varepsilon)^2 < |z| < 1\}$, а приращения $\arg \Lambda_n(z)$ и $\arg(\Lambda_n(z) - 1)$ на окружности $\{|z| = s\}$, $A_0(1+\varepsilon)^2 < s < 1$, равны соответственно приращениям $\arg F_\varepsilon(z)$ и $\arg(F_\varepsilon(z) - 1)$ на той же окружности, или приращениям $\arg F_0(z)$ и $\arg(F_0(z) - 1)$ на окружности $\{|z| = s/(1+\varepsilon)\}$. Следовательно, $\Lambda_n \in K_2$ при $n \geqslant n_0$ и $r(\Lambda_n) \leqslant A_0(1+\varepsilon)^2$. Отсюда вытекает, что $A_3 \leqslant A_0(1+\varepsilon)^2$ и, в силу произвольной малости ε, $A_3 = A_1 = A_0$.

Если бы существовала функция $f \in K_j$, $j = 1,\ 3$, такая, что $r(f) = A_j = A_0$, то это противоречило бы лемме 1. Следовательно, для всех $f \in K_j$ $(j = 1,\ 3)$ выполняется $r(f) > A_j$.

Из $K_4 \subset K_2 \subset K_1$ следует, что $A_4 \geqslant A_2 \geqslant A_1 > 0$. Возьмем последовательность $f_n \in K_2$ такую, что $r(f_n) \to A_2$ и для всех n выполняется $r(f_n) < \rho < 1$, где $A_2 < \rho < 1$. Функции $\{f_n(z)\}$ образуют в $\{\rho < |z| < 1\}$ нормальное семейство. Выберем из $\{f_n\}$ подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая равномерно стремится на любом замкнутом подмножестве кольца $\{\rho < |z| < 1\}$ или к ∞, или к аналитической функции. В первом случае для некоторого ρ', $\rho < \rho' < 1$, существует такое n_k, что $|f_{n_k}(z)| > 2$ при $|z| = \rho'$. По теореме Руше f_{n_k} имеет в $\{|z| < \rho'\}$ равное число нулей и единиц, что противоречит условию $f_{n_k} \in K_2$. Во втором случае в силу теоремы Вейерштрасса $\{f_{n_k}\}$ сходится в U к некоторой аналитической функции $F_2(z)$, причем равномерно на каждом замкнутом подмножестве U. Используя теорему Гурвица, легко показать, что $F_2 \in K_2$ и $r(F_2) = A_2$. Так как $F_2 \in K_1$, то по доказанному $r(F_2) > A_1$ и $A_2 > A_1$.

То, что $A_4 = A_2$, доказывается аналогично тому, как доказывалось $A_3 = A_0$. То, что для всех $f \in K_4$ выполняется $r(f) > A_4 = A_2$, вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. Если $F_2 \in K_2$ и $r(F_2) = A_2$, то для аналитической функции $F_2(z)$ единичный круг U является естественной областью существования.

Предположим, что $F_2(z)$ можно непосредственно аналитически продолжить в некоторую область G, $U \subset G$, $U \neq G$, причем, не уменьшая общности, можно считать, что G — односвязная область и $F_2(z) \neq 0, 1$ при $z \in G \setminus U$. Пусть $\{c_1, \ldots, c_q\}$ — множество нулей и единиц функции $F_2(z)$ в $\{0 < |z| \leqslant A_2\}$, $A_2 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} |c_j|$. Пусть функция $\zeta = \psi(z)$ конформно и однолистно отображает область G на круг $\{|\zeta| < 1\}$, $\psi(0) = 0$. Очевидно, $\psi(z)$ не имеет вид $\psi(z) = e^{i\theta}z$. Поэтому, применяя к $\zeta = \psi(z)$, $z \in U$, лемму Шварца, имеем $|\psi(z)| < |z|$ при $0 < |z| < 1$. Следовательно, $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant q} |\psi(c_j)| = A' < A_2$. Пусть $z = \varphi(\zeta)$ — отображение $\{|\zeta| < 1\}$ на G, обратное к $\zeta = \psi(z)$. Легко видеть, что $F_2(\varphi(\zeta)) \in K_2$ и $r(F_2 \circ \varphi) = A' < A_2$, а это противоречит определению числа A_2. Лемма 2 доказана, а с нею и теорема 1.

Доказательство теоремы 2. Оценим сначала A_2. Рассмотрим рациональную функцию

$$q(z) = \frac{16}{(1-a)^4} \, \frac{(az^2 + 2z + a)^2 (z^2 + 2az + 1)^2}{(1-z)^8},$$

где $a = \dfrac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1}$.

Обозначим, кроме того, $b = \dfrac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} = \dfrac{\sqrt[8]{2} - 1}{\sqrt[8]{2} + 1}$.

Нетрудно убедиться, что $q(z)$ имеет полюс восьмого порядка в точке $z = -1$, нули второго порядка в точках $-1/b$, $-b$, $-a \pm i\sqrt{1 - a^2}$, единицу четвертого порядка в точке $z = -1$ и единицы первого порядка в точках $a \pm i\sqrt{1 - a^2}$, $1/b$, b. Отсюда следует, что $q(z) \in K_2$ и $r(q) = b = 0{,}043\ldots$ Следовательно, $A_2 < 0{,}043\ldots$ Эту оценку можно еще несколько уточнить, рассмотрев вспомогательную функцию $w = \Psi(z; a)$, $0 < a < 1$, которая конформно и однолистно отображает U на конечную w-плоскость, из которой выброшено множество

$$\{\operatorname{Im} w = 0, \ |w| \geqslant 1\} \cup \{\operatorname{Re} w = 0,$$
$$|w| \geqslant 1\} \cup \{|w| = 1, \ |\operatorname{Re} w| \leqslant a\},$$

причем $\Psi(0; a) = 0$, $\Psi'(0; a) > 0$. Функцию $\Psi(z; a)$ нетрудно выразить через элементарные функции. Очевидно, $q(\Psi(z; a)) \in K_2$. Элементарный, хотя и несколько громоздкий подсчет показывает, что функция $q \circ \Psi$ имеет в U единственный нуль второго порядка в точке $-b'$ и единственную единицу первого порядка в точке b', где $b' = 0{,}031\ldots$ Следовательно, $r(q \circ \Psi) = b'$ и $A_2 < 0{,}031\ldots$

Оценим постоянную A_2 снизу, связав ее с постоянной Шоттки.

Покажем, что $A_2 \geqslant 0{,}0000038\ldots$ Если $A_2 \geqslant \lambda = 0{,}00001$, то нечего доказывать. Предположим, что $A_2 < \lambda$. Можно ограничиться рассмотрением функций $f(z) \in K_2$ таких, что $r(f) < \lambda$. Для каждой такой функции существует точка $\zeta = \sqrt{\lambda} e^{i\omega}$ такая, что $|f(\zeta)| \leqslant 1$. В противном случае на окружности $\{|z| = \sqrt{\lambda}\}$ имели бы $|f(z)| \geqslant 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и в силу теоремы Руше функция $f(z)$ имела бы одинаковое число нулей и единиц в U. По теореме Шоттки существует такая абсолютная постоянная $S > 0$, что всякая функция $\Phi(z)$, аналитическая в полосе $\{\ln \lambda < \operatorname{Re} z < 0\}$, не принимающая в ней значения 0 и 1 и такая, что $|\Phi(\ln \sqrt{\lambda})| \leqslant 1$, удовлетворяет на отрезке $\{\operatorname{Re} z = \ln \sqrt{\lambda}, |\operatorname{Im} z| \leqslant \pi\}$ неравенству $|\Phi(z)| \leqslant S$. Воспользуемся следующим результатом Дженкинса [3], который дает оценку постоянной в теореме Шоттки: если $\Omega(z)$ — функция, аналитическая в U, $\Omega(z) \neq 0, 1$, $|\Omega(0)| = 1$, то

$$|\Omega(z)| \leqslant \frac{1}{4} \exp\{\pi(1 + |z|)/(1 - |z|)\} + \frac{3}{4}.$$

Отобразив конформно и однолистно полосу $\{\ln \lambda < \operatorname{Re} z < 0\}$ на U так, чтобы точка $\ln \sqrt{\lambda}$ перешла в начало координат, после простых выкладок получим, что за S можно взять

$$S = \frac{1}{4} \exp\left\{\pi \exp \frac{\pi^2}{|\ln \lambda|}\right\} + \frac{3}{4} = 411{,}3\ldots$$

Применяя эту оценку к функции $\Phi(z) = f(\exp(z + i\omega))$, получаем, что на окружности $\{|z| = \sqrt{\lambda}\}$ выполняется $|f(z)| \leqslant S$.

Пусть $f(z_0) = 0$, $f(z_1) = 1$, $|z_0| \leqslant r(f)$, $|z_1| \leqslant r(f)$. Тогда

$$1 = f(z_1) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = \sqrt{\lambda}} \frac{f(t)}{t - z_1} dt - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t| = \sqrt{\lambda}} \frac{f(t)}{t - z_0} dt = \frac{z_1 - z_0}{2\pi i} \int\limits_{|t| = \sqrt{\lambda}} \frac{f(t)\, dt}{(t - z_1)(t - z_0)}.$$

Отсюда

$$1 \leqslant \frac{2r(f)}{2\pi} \frac{S}{(\sqrt{\lambda} - \lambda)^2} 2\pi \sqrt{\lambda},$$

$$A_2 \geqslant \frac{(\sqrt{\lambda} - \lambda)^2}{2S\sqrt{\lambda}} = 0{,}0000038\ldots$$

Чтобы оценить A_1 сверху, рассмотрим рациональную функцию

$$p(z) = \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^4 \frac{\{2\sqrt{1{,}5}(1 + z)^4 - 3(1 - z)^4\}^2}{4(1 - z)^4 - 3\sqrt{1{,}5}(1 + z)^4}.$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{\sqrt[4]{1{,}5} - 1}{\sqrt[4]{1{,}5} + 1}, \quad \beta = \frac{\sqrt[8]{1{,}5} - 1}{\sqrt[8]{1{,}5} + 1},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt[4]{32/27} - 1}{\sqrt[4]{32/27} + 1}, \quad \delta = \frac{\sqrt[8]{32/27} - 1}{\sqrt[8]{32/27} + 1}.$$

Функция $p(z)$ имеет нуль четвертого порядка в точке $z=-1$ и нули второго порядка в точках β, $1/\beta$, $\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$, полюсы четвертого порядка в точках $z=1$ и $z=\infty$ и полюсы первого порядка в точках δ, $1/\delta$, $\gamma \pm i\sqrt{1-\gamma^2}$, единицы третьего порядка в точках $-\beta$, $-1/\beta$, $-\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$. Легко видеть, что $p(z) \in K_1$ с $R(p)=\delta$, $r(p)=\beta>\delta$. Функция $p(\Psi(z;\alpha))$, где $\Psi(z;\alpha)$ была определена выше, мероморфна в U и $p \circ \Psi \in K_1$. Пусть $-\beta'$, δ', β' — прообразы в U соответственно точек $-\beta$, δ, β при отображении $w=\Psi(z;\alpha)$, при этом $\beta'>\delta'>0$. Функция $p\circ\Psi$ имеет в U нуль второго порядка в точке β', полюс первого порядка в точке δ' и единицу третьего порядка в точке $-\beta'$. Пусть функция $w=T(z)$ конформно и однолистно отображают кольцо $\{\beta''<|z|<1\}$ на круг $\{|w|<1\}$ с разрезом по отрезку $[-\beta', \beta']$. Известно (см., например, [4, № 1267]), что

$$\beta''=\exp\left\{-\frac{\pi}{4}\mathrm{K}'(\beta'^2)/\mathrm{K}(\beta'^2)\right\},$$

где $\mathrm{K}(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $\mathrm{K}'(k)=\mathrm{K}(\sqrt{1-k^2})$. Функция $w=\pi(z)=p\circ\Psi\circ T(z)$, аналитическая в кольце $\{\beta''<|z|<1\}$, не обращается в нем в нуль и единицу, а на окружности $\{|z|=r\}$, $\beta''<r<1$, приращения $\arg\pi(z)$ и $\arg(\pi(z)-1)$ равны соответственно 1 и 2. Следовательно, $\pi\in K_0$ и $A_0<r(\pi)=\beta''$. Подсчет дает для β'' значение $\beta''=0{,}0091\ldots$. Следовательно, $A_0<0{,}0091\ldots$. Так как $A_0=A_1$, то теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. 2-е, «Наука», М., 1966.

2. Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., Физматгиз, 1960.

3. J. A. Jenkins. On explicit bounds in Schottky's theorem. Canad. J. Math., 1955, 7, № 1, 76—82.

4. Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е «Наука», М., 1970.

Поступила 18 ноября 1971.