К ВОПРОСУ О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА

И. П. Проскурня

1. Введение

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция нижнего порядка λ и порядка ρ, а $T(r, f)$ — ее неванлинновская характеристика.

Положим при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и любом комплексном числе a

$$m_p(r, a, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p}, \text{ если } a \neq \infty,$$

$$m_p(r, \infty, f) = m_p(r, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln^+|f(re^{i\theta})|)^p d\theta\right\}^{1/p},$$

$$\delta_p(a, f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{m_p(r, a, f)}{T(r, f)},$$

$$D_p(f) = \{a : \delta_p(a, f) > 0\}.$$

В [1, стр. 184] нами установлен следующий результат*:

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ и пусть $p \geqslant 1$. Тогда:*

а) множество $D_p(f)$ не более чем счетно;

б) при $1\Big/\left(2 + \frac{1}{p}\right) < \alpha \leqslant 1$ сходится ряд

$$\sum_{(a)}\delta_p^\alpha(a, f); \tag{1.1}$$

в) при $\alpha < 1\Big/\left(2 + \frac{1}{p}\right)$ ряд (1.1) может расходиться.

Эта работа посвящена исследованию свойств величин $\delta_p(a, f)$ и множеств $D_p(f)$ для мероморфных при $z \neq \infty$ функций бесконечного нижнего порядка. Как показывают полученные конструкции, между свойствами величин $\delta_p(a, f)$ $(p > 1)$ и величин дефектов Р. Неванлинны $\delta(a, f) = \delta_1(a, f)$, а также между свойствами множеств $D_p(f)$ $(p > 1)$ и множеств дефектных значений в смысле Р. Неванлинны $E_N(f) = D_1(f)$ и множеств дефектных значений Ж. Валирона $E_V(f)$ имеется существенное различие.

Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема. *Существует множество C мощности континуума и целая функция $G(z, C) = G(z)$ бесконечного нижнего порядка, для которой $\delta_p(a, G) = \infty$ при каждом $a \in C$ и любом $p > 1$.*

Теорема является аналогом соответствующего результата о свойствах величин отклонений $\beta(a, f)$ и множества положительных отклонений $\Omega(f)$ мероморфных функций (см. [3, стр. 1331]).

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы сконструируем целую функцию бесконечного нижнего порядка, которая является примером типа примеров А. А. Гольдберга [4, 5] и используем некоторые идеи У. Хеймана, В. Фукса [6] и В. П. Петренко [3].

Рассмотрим множество действительных чисел, допускающих представление (см. [3, стр. 1333])

$$C = \left\{a : a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\exp\theta(n)}\right\}, \tag{2.1}$$

* Подробное доказательство теоремы А изложено в работе [2].

где γ_n принимает независимо два значения 0 и 1, причем в п[ред]ставлении для каждого a 1 встречается бесконечное число ра[з]

$$\theta(n) = \exp\exp\exp(2n).$$

Нетрудно показать, что при $n \geqslant k+2$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\theta(n) - \theta(k+1) - n + k > 0 \qquad (\ $$

и, что множество C имеет мощность континуума.

Заметим, что между множеством натуральных чисел

$$n = \sum_{k=1}^{q(n)} \gamma_k \cdot 2^{k-1} \quad (\gamma_k = 0, 1),$$

где $\gamma_{q(n)} \neq 0$, и множеством

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \frac{\gamma_k}{\exp\theta(k)} \tag{2.3}$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее утверждение (см. [6, стр. 126, 3, стр. 1335]).

Лемма 2.1. *Пусть*

$$A_0 = \{z : z = x + iy,\ x > 0,\ |y| < \pi\}.$$

Если $|z| \geqslant r_0$ $(r_0 \geqslant \pi/2)$, *то существует целая функция* $E_0(z)$ *такая, что*

$$E_0(z) = \begin{cases} \exp(e^z + z) + \dfrac{\psi_1(z)}{z^2} & \textit{при } z \in A_0, \\ \dfrac{\psi^2(z)}{z^2} & \textit{при } z \,\overline{\in}\, A_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

*где**

$$|\psi_j(z)| \leqslant K_1 \quad (j = 1, 2).$$

Положим, далее

$$\begin{aligned} A_n &= \{z : z = x + iy,\ x > 0,\ (2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi\}, \\ A_n' &= \left\{z : z = x + iy,\ x > 0,\ \left(2n - \frac{1}{4}\right)\pi < y < \left(2n + \frac{1}{4}\right)\pi\right\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

и

$$E_n(z) = E_0(z - 2n\pi i),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.6}$$

Очевидно, из (2.4) и (2.6) при $x \geqslant r_0 \geqslant \pi/2$ для $E_n(z)$ следуют такие оценки:

$$E_n(z) = \begin{cases} \exp(e^z + z) + \dfrac{\psi_3(z, n)}{(z - 2n\pi i)^2} & \text{при } z \in A_n, \\ \dfrac{\psi_4(z, n)}{(z - 2n\pi i)^2} & \text{при } z \,\overline{\in}\, A_n, \end{cases} \tag{2.7}$$

---

* Буквой K с индексами будем обозначать положительные абсолютные постоянные.

где

$$|\psi_j(z, n)| \leqslant K_1 \quad (j = 3, 4). \tag{2.8}$$

Отметим еще следующие свойства $E_n(z)$ (см. [6, стр. 129, 3, стр. 1335]).

Пусть $z = x + iy$ — любое, $x \geqslant r_0 \geqslant \pi/2$, тогда из (2.6), (2.7) и (2.8) при $(2m-1)\pi < y < (2m+1)\pi$ получаем

$$E_n(z) \leqslant \begin{cases} \dfrac{K_2}{n^2}, \text{ если } |n| \geqslant 2|m|+1, \\ K_2, \text{ если } |n| < 2|m|+1, \ (n \neq m). \end{cases} \tag{2.9}$$

Пусть, далее, S — некоторое подмножество множества натуральных чисел, имеющее плотность $^*d(S)$. Предположим, что δ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) — положительные числа, такие что $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu = 1$.

Лемма 2.2 (см. [6, стр. 133]). *Множество натуральных чисел можно разбить на счетное множество попарно не пересекающихся множеств S_ν с плотностью δ_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$).*

Пусть теперь $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяются соотношением (2.3). Определим последовательность $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ следующим образом:

$$c_0 = 1, \ c_{-n} = c_n,$$

где при $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n = b_\nu, \text{ если } n \in S_\nu \ (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.10}$$

Тогда очевидно, что

$$G(z) = \exp(-e^z - z) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot E_n(z) \tag{2.11}$$

есть целая функция.

Используя соотношения (2.9) и (2.11), приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.3 (см. [6, стр. 129]). *Если $z = x + iy$, $x \geqslant r_0 \geqslant \pi/2$ и $(2m-1)\pi < y < (2m+1)\pi$ (m-фиксировано, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), тогда имеет место неравенство*

$$|G(z) - c_m| \leqslant K_3 \cdot |z| \cdot |\exp(-e^z - z)|. \tag{2.12}$$

Если $z \in A^{(\nu)}$, где

$$A^{(\nu)} = \{z : z = x + iy, \ x > 0, \ (2l-1)\pi < y < (2l+1)\pi, \ |l| \in S_\nu\},$$

тогда из соотношений (2.10) и (2.12) следует такое утверждение.

Лемма 2.4. *Для функции $G(z)$ при любом фиксированном ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) и $z = x + iy \in A^{(\nu)}$ ($x \geqslant r_0 \geqslant \pi/2$) справедлива оценка*

$$|G(z) - b_\nu| \leqslant K_3 \cdot |z| \cdot |\exp(-e^z - z)|.$$

---

* Т. е. $d(S) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t(n, S)}{n}$, где $t(n, S)$ — количество чисел из S, не превышающих n.

Для доказательства теоремы нам понадобится еще такое утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть* $\varphi(y)$ — *ограниченная неотрицательная интегрируемая на каждом сегменте* $0 \leqslant y \leqslant R$ *функция, такая, что* $\frac{1}{R}\int_0^R \varphi(y)\,dy > h > 0$ *при* $R > R_0 = R_0(\varphi) \geqslant 2$. *Тогда при* $r > 4R_0^2$

$$I_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/6} e^{pr\cdot\cos\theta}\cdot\varphi(r\cdot\sin\theta)\,d\theta > \frac{h\cdot e^{pr}}{4\cdot\sqrt{2\pi r}\cdot e^{p}}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть

$$\psi(y) = \int_0^y \varphi(t)\,dt,$$

$$\chi_p(y) = \chi_p(y, r) = \frac{e^{p\cdot\sqrt{r^2-y^2}}}{\sqrt{r^2-y^2}}.$$

Заметим, что при $y \geqslant R_0$ выполняется неравенство

$$\psi(y) > hy, \tag{2.14}$$

а при $0 \leqslant y \leqslant r/2$

$$-\chi_p'(y) > 0. \tag{2.15}$$

Положим $r\cdot\sin\theta = y$, тогда

$$I_p(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/6} e^{pr\cdot\cos\theta}\cdot\varphi(r\cdot\sin\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{r/2}\frac{e^{p\cdot\sqrt{r^2-y^2}}}{\sqrt{r^2-y^2}}\cdot\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{r/2}\chi_p(y)\cdot\psi'(y)\,dy.$$

Учитывая (2.14) и (2.15), после интегрирования по частям получаем

$$I_p(r) > \frac{h}{2\pi}\int_{R_0}^{r/2}\chi_p(y)\,dy. \tag{2.16}$$

Пусть $\sqrt{r^2-y^2} = r - u$; $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha$. Тогда при $r > 4R_0^2$ имеем

$$\int_{R_0}^{r/2}\chi_p(y)\,dy = \int_{R_0}^{r/2}\frac{e^{p\cdot\sqrt{r^2-y^2}}}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dy = \int_{r-\sqrt{r^2-R_0^2}}^{\alpha r} e^{p\cdot(r-u)}\cdot(2ru-u^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot du >$$

$$> \frac{e^{pr}}{\sqrt{2r}}\int_{R_0^2/r}^{\alpha r} e^{-pu}u^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{u}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}du >$$

$$> \frac{e^{pr}}{\sqrt{2r}} \int_{1/4}^{1} e^{-pu} u^{-\frac{1}{2}} \, du \geqslant \frac{e^{pr}}{\sqrt{2r} \cdot e^{p}}. \tag{2.17}$$

Оценка (2.13) получается теперь подстановкой (2.17) в (2.16). Iемма 2.5 доказана.

3. Доказательство теоремы

Зафиксируем некоторое число $a \in C$, где множество C определяется соотношением (2.1). Представление (2.1) числа a порождает последовательность целых неотрицательных чисел

$$n_1(a) = \gamma_1(a),\ n_2(a) = \gamma_1(a) + \gamma_2(a) \cdot 2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ n_k(a) = \gamma_1(a) + \cdots + \gamma_k(a) \cdot 2^{k-1},\ \ldots \tag{3.1}$$

Так как в представлении (2.1) числа a единица встречается бесконечное число раз, то $n_k(a) \to \infty$ при $k \to \infty$.

Положим для числа a

$$b_{n_k(a)} = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{\gamma_j}{\exp \theta(j)}, \tag{3.2}$$

где $\gamma_j = \gamma_j(a)$ определяются соотношениями (3.1). Таким образом, числу a соответствует подпоследовательность $\{b_{n_k(a)}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенной соотношением (2.3).

Выберем теперь любое r $(r > e^2)$ и рассмотрим такие возможные случаи расположения последовательности $\{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$ (принимаем во внимание только $n_k(a) \neq 0$):

1. Найдется хотя бы одно $n_{k_0}(a) \in \{n_k(a)\}_{k=1}^{\infty}$ такое, что

$$\frac{1}{2} \ln r \leqslant n_{k_0}(a) \leqslant \ln r. \tag{3.3}$$

Будем оценивать скорость приближения $G(z)$ к a на системе полуполосок $A^{(n_{k_0}(a))}$ $(|z| = r)$.

Согласно утверждению леммы 2.4 на системе полуполосок $A^{(n_{k_0}(a))}$ при $x \geqslant r_0 \geqslant \pi/2$ $(z = x + iy)$ выполняется условие

$$|G(z) - b_{n_{k_0}(a)}| \leqslant K_3 |z| |\exp(-e^z - z)|. \tag{3.4}$$

Далее имеем

$$b_{n_{k_0}(a)} = 1 + \sum_{j=1}^{k_0} \frac{\gamma_j}{\exp \theta(j)},$$

и в силу (2.2)

$$0 \leqslant a - b_{n_{k_0}(a)} \leqslant \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{\exp \theta(j)} \leqslant \frac{1}{\exp \theta(k_0+1)} + \sum_{j=k_0+2}^{\infty} \frac{1}{\exp \theta(j)} =$$

$$= \frac{1}{\exp\theta(k_0+1)}\left\{1+\sum_{j=k_0+2}^{\infty}\frac{1}{\exp[\theta(j)-\theta(k_0+1)]}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\exp\theta(k_0+1)}\left\{1+\sum_{j=k_0+2}^{\infty}\frac{1}{\exp\theta(j-k_0)}\right\} = \frac{1}{\exp\theta(k_0+1)} \times$$

$$\times\left\{1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{e^{j+2}}\right\} = \left\{1+\frac{1}{e(e-1)}\right\}\frac{1}{\exp\theta(k_0+1)} \leqslant \frac{3}{2\exp\theta(k_0+1)}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, соотношения (3.1) и (3.3) показывают, что

$$\frac{1}{2}\ln r \leqslant n_{k_0}(a) \leqslant \sum_{j=1}^{k_0} 2^{j-1} = 2^{k_0}-1.$$

Поэтому $e^{k_0} > \frac{1}{2}\ln r$ и, значит,

$$\theta(k_0+1) \geqslant \exp r^2. \quad (3.6)$$

Оценки (3.5) и (3.6) показывают, что

$$0 \leqslant a - b_{n_{k_0}(a)} \leqslant \frac{3}{2\cdot\exp\exp r^2}. \quad (3.7)$$

Берем далее любое $z(a) = x+iy \in A^{(n_{k_0}(a))}$ $(|z(a)| = r)$. Полученные оценки (3.4) и (3.7) приводят нас к такому соотношению:

$$|G(z(a)) - a| \leqslant |G(z(a)) - b_{n_{k_0}(a)}| + |b_{n_{k_0}(a)} - a| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_3\cdot|z(a)|}{\exp(e^x\cdot\cos y + x)} + \frac{3}{2\cdot\exp\exp r^2} \leqslant \frac{K_4\cdot r}{\exp(e^x\cos y + x)}.$$

Значит,

$$\ln^+\frac{1}{|G(z(a)) - a|} \geqslant e^x\cos y +$$

$$+ x - \ln^+ K_4 - \ln r \geqslant e^x\cos y - K_5\ln r. \quad (3.8)$$

Пусть далее

$$\varphi_{p,\, n_{k_0}(a)}(y) = \begin{cases}\cos^p y, \text{ если } \left(2l-\frac{1}{4}\right)\pi < y < \left(2l+\frac{1}{4}\right)\pi, & |l| \in S_{n_{k_0}(a)},\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases} \quad (3.9)$$

Тогда при $R > R_0(a)$

$$\frac{1}{R}\int_0^R \varphi_{p,\, n_{k_0}(a)}(y)\,dy \geqslant \frac{t(R, S_{n_{k_0}(a)}) - 1}{R} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/4}\cos^p y\cdot \mathrm{dy} > \frac{\sigma_p\cdot\delta_{n_{k_0}(a)}}{2}, \quad (3.10)$$

где $\sigma_p = \int\limits_0^{\pi/4} \cos^p y \cdot dy$, а $\delta_{n_{k_0}(a)}$ — плотность множества $S_{nk_0(a)}$. Положим

$$A' = \{\bigcup_{(n)} A'_n\} \cap \{z : |\arg z| < \pi/6\},$$

где A'_n определяется соотношением (2.5).

Лемма 3.1. *При $z \in A'$ и $z = re^{i\theta}$, $r > r_0$ (r_0 не зависит от θ) справедливо неравенство*

$$e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta) - K_6 \ln r \geqslant \frac{1}{2} e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta). \quad (3.11)$$

Действительно, утверждение леммы следует, если заметить, что при $z \in A'$

$$\cos(r \cdot \sin\theta) > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\theta > \cos\frac{\pi}{6}.$$

Значит,

$$e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta) > e^{r/2} \quad (r > r_0),$$

поэтому

$$e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta) - K_6 \ln r \geqslant e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta) \times$$
$$\times \left\{1 - K_6 \cdot \frac{\ln r}{e^{r/2}}\right\} > \frac{1}{2} e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta).$$

Оценка (3.11) доказана.

Применяя к правой части неравенства (3.8) лемму 3.1 при $z(a) = re^{i\theta} \in A^{(n_{k_0}(a))} \cap A'$, получаем $(r > r_0)$

$$\ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\theta}) - a|} \geqslant \frac{1}{2} \cdot e^{r\cdot\cos\theta} \cdot \cos(r \cdot \sin\theta).$$

Поэтому при $p > 1$ с учетом (3.9) имеем

$$\left(\ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\theta}) - a|}\right)^p \geqslant \frac{1}{2^p} \cdot e^{pr\cdot\cos\theta} \times$$
$$\times \varphi_{p,\, n_{k_0}(a)}(r \cdot \sin\theta).$$

Интегрируем обе части этого неравенства по θ в пределах от 0 до 2π, получаем $\left(r > \frac{2}{\sqrt{3}} r_0\right)$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\ln^+ \frac{1}{|G(re^{i\theta}) - a|}\right)^p d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi \cdot 2^p} \cdot \int\limits_{-\arccos\frac{r_0}{r}}^{+\arccos\frac{r_0}{r}} e^{pr\cdot\cos\theta} \cdot \varphi_{p,\, n_{k_0}(a)}(r \cdot \sin\theta)\, d\theta \geqslant$$

$$> \frac{1}{2^p\pi} \cdot \int\limits_0^{+\arccos \frac{r_0}{r}} e^{pr\cdot\cos\theta} \cdot \varphi_{p,\, n_{k_0}(a)}(r \cdot \sin\theta)\, d\theta >$$

$$> \frac{1}{2^p\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi/6} e^{pr\cdot\cos\theta} \cdot \varphi_{p,\, n_{k_0}(a)}(r \cdot \sin\theta)\, d\theta.$$

Рассуждая далее как и при доказательстве леммы 2.5 и учитывая соотношение (3.10), при $r > r_0(a)$ будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\ln^+\frac{1}{|G(re^{i\theta})-a|}\right)^p d\theta > \frac{1}{(2e)^p}\cdot\sigma_p \times$$

$$\times\, \delta_{n_{k_0}(a)} \cdot \frac{e^{pr}}{4\sqrt{2\pi r}}.$$

Поэтому

$$m_p(r,\ a,\ G) > \frac{1}{2e}\sqrt[p]{\frac{\sigma_p\cdot\delta_{n_{k_0}(a)}}{4}}\cdot\frac{e^r}{(2\pi r)^{1/2p}}. \tag{3.12}$$

2. Пусть теперь ни при одном $n_k(a)$ не выполняется (3.3). Здесь возможны такие два случая:

а) имеется хотя бы одно $n_k(a) < \frac{1}{2}\ln r$ ($r > r_0$ — фиксировано).

Пусть

$$\max_{n_k(a) < \frac{1}{2}\ln r} n_k(a) = n_{k_1}(a) < \frac{1}{2}\ln r \tag{3.13}$$

и $n_{k_1+j}(a)$ — первое число, определенное соотношением (3.1), большее $n_{k_1}(a)$ и отличное от $n_{k_1}(a)$. Очевидно,

$$n_{k_1+j}(a) > \ln r. \tag{3.14}$$

Как и выше, числу $n_{k_1}(a)$ соответствует число $b_{n_{k_1}(a)} \in \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и, значит, существует система полуполосок $A^{(n_{k_1}(a))}$, на которых выполняется условие (3.4). В этом случае будем оценивать скорость приближения $G(z)$ к a при $z \in A^{(n_{k_1}(a))}$ ($|z| = r$).

Мы имеем

$$0 \leqslant a - b_{n_{k_1}(a)} \leqslant \sum_{i=k_1+j}^{\infty}\frac{\gamma_i}{\exp\theta(i)} \leqslant \frac{3}{2\cdot\exp\theta(k_1+j)}. \tag{3.15}$$

Выберем любое $z(a) = x + iy \in A^{(n_{k_1}(a))}$, тогда из (3.14) и (3.15), так же как и при получении оценки (3.8), находим

$$\ln^+\frac{1}{|G(z(a)) - a|} \geqslant e^x\cdot\cos y - K_7\cdot\ln r,$$

поэтому и в рассматриваемом случае при $r > r_1(a)$ выполняется неравенство

$$m_p(r, a, G) > \frac{1}{2e} \sqrt[p]{\frac{\sigma_p \cdot \delta_{n_{k_1}(a)}}{4}} \cdot \frac{e^r}{(2\pi r)^{1/2p}}, \tag{3.16}$$

где $\delta_{n_{k_1}(a)}$ — плотность множества $S_{n_{k_1}(a)}$.

б) Пусть теперь не выполняется соотношение (3.13), т. е. при данном r $n_\mu(a) = \min\limits_k n_k(a) > \ln r$.

В этом случае в разложении (2.1) для a выполняется $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\mu} = 0$ ($\mu = \mu(r)$, $r > r_0$ — фиксировано), поэтому будем оценивать величину отклонения $G(z)$ от b_0 ($b_0 = 1$). Согласно изложенному для b_0 также существует система полуполосок $A^{(0)}$, на которых выполняется оценка $|G(z) - b_0| \leqslant K_3 \cdot |z| \cdot |\exp(-e^z - z)|$.

Будем теперь оценивать скорость приближения $G(z)$ к a при $z \in A^{(0)}$ ($|z| = r$). Имеем

$$0 \leqslant a - b_0 = \sum_{k=\mu}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\exp\theta(k)} \leqslant \frac{3}{2 \cdot \exp\theta(\mu)}$$

и, как и выше, снова убеждаемся в справедливости (3.16).

Из результатов У. Хеймана и В. Фукса (см. [6, стр. 132]) следует такая оценка для неванлинновской характеристики функции $G(z)$:

$$T(r, G) \leqslant \frac{e^r}{\sqrt{r}} \ (r > r_0). \tag{3.17}$$

Оценки (3.12), (3.16) и (3.17) дают для любого $a \in C$

$$\delta_p(a, G) = \infty.$$

Тем самым теорема доказана.

Замечание. Для построенной целой функции $G(z)$ справедливы следующие утверждения:

а) $E_V(G) = E_N(G)$; (3.18)

б) множество $D_p(G) \setminus E_V(G)$ имеет мощность континуума.

Докажем утверждение а). Для величин дефектов Р. Неванлинны функции $G(z)$ справедливо (см. [6, стр. 125])

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \delta(b_\nu, G) = 1. \tag{3.19}$$

Выберем теперь $a \neq b_\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots$), тогда из второй основной теоремы Р. Неванлинны имеем ($r > r_0$)

$$m(r, a, G) + \sum_{\nu=0}^{q} m(r, b_\nu, G) \leqslant T(r, G) + K_8 \cdot q \cdot r,$$

поэтому ($\varepsilon > 0$)

$$m(r, a, G) + \left\{\sum_{\nu=0}^{q} \delta(b_\nu, G)\right\} \cdot (1-\varepsilon) \cdot T(r, G) \leqslant$$
$$\leqslant T(r, G) + K_8 \cdot q \cdot r,$$

а значит,

$$\Delta(a, G) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta(b_\nu, G) \leqslant 1, \tag{3.20}$$

где

$$\Delta(a, G) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, a, G)}{T(r, G)}.$$

Из (3.19) и (3.20) получаем $\Delta(a, G) = 0$.

Соотношение (3.18) доказано.

Утверждение б) следует из нашей теоремы и соотношения (3.18).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. П. Петренко за руководство работой и А. А. Гольдбергу за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Проскурня. Исследование роста мероморфных функций с использованием метрики $L^p[0,2\pi]$. Тезисы докладов. Всесоюзная конференция по теории функций комплексного переменного, Харьков, 1971.

2. И. П. Проскурня. Исследование роста мероморфных функций с использованием метрики $L^p[0,2\pi]$. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 16. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.

3. В. П. Петренко. Изучение структуры множества положительных отклонений мероморфных функций, ч. I. «Изв. АН. СССР, серия матем.», 33, № 6, 1969, 1330—1348.

4. А. А. Гольдберг. О дефектах мероморфных функций. ДАН СССР, 98, 1954, 893—895.

5. А. А. Гольдберг. О множестве дефектных значений мероморфных функций конечного порядка. «Укр. матем. журн.», 11, № 4, 1959, 438—443.

6. У. К. Хейман. Мероморфные функции. «Мир», 1966.

Поступила 22 февраля 1971 г.