ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ РАССЕЯНИЯ

В. А. Козел

В работе [1] доказано, что если данные рассеяния двух краевых задач

$$-y'' + v_j(x)\,y = \lambda^2 y,\ j = 1, 2,\ 0 < x < \infty,\ y(0) = 0 \tag{1}$$

с потенциалами $v_j(x)$, удовлетворяющими неравенствам

$$\int_x^\infty |v_j(t)|\,dt \leqslant \alpha(x), \tag{2}$$

где $\alpha(x)$ — невозрастающая, суммируемая на полуоси функция, совпадают при $\lambda^2 \leqslant N^2$, то в области, где

$$\frac{5(2[\ln N] + 1)}{N}\,\alpha(x) < 1,\ N > 1, \tag{3}$$

выполняется неравенство *

$$|v_1(x) - v_2(x)| \leqslant 10(2[\ln N] + 3)\left\{\frac{9\alpha(x)\beta(x) + \gamma(x)}{N} + \frac{1}{30N\ln^2 N}\right\}, \tag{4}$$

где

$$\beta(x) = \max_{j=1,2}\sup_{x\leqslant t}|v_j(t)|,$$

$$\gamma(x) = \max_{j=1,2}\sup_{x\leqslant t}|v_j'(t)|.$$

Это неравенство дает оценку погрешности, с которой может быть восстановлен потенциал $v(x)$ краевой задачи вида (1) по данным рассеяния, известным только при $\lambda^2 \leqslant N^2$.

В настоящей работе исследуется, насколько точной является эта оценка.

Мы покажем, что для любого числа $A < \frac{1}{2}$ найдется пара краевых задач, имеющих при $\lambda^2 \leqslant N^2$ одинаковые данные рассеяния

---

* Оценка в форме (4) приведена в книге [2].

и таких, что для некоторых значений x, удовлетворяющих условию (3), выполняется неравенство

$$|v_1(x) - v_2(x)| \geqslant A\left\{\frac{9\alpha(x)\beta(x)+\gamma(x)}{N} + \frac{1}{30N\ln^2 N}\right\}. \tag{5}$$

Следовательно, оценка (4) не может быть улучшена более, чем на множитель $20(2[\ln N]+3)$.

Обозначим через $\delta(\lambda)$ заданную на положительной полуоси бесконечно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\delta(0) = \delta'(0) = \delta'''(0) = 0;$$

$$\delta''(0) = \frac{\pi}{2};\ \delta(\lambda) = 0,\ \lambda > 1.$$

Из результатов, изложенных в [3] следует, что функция $S(\lambda)$, определенная при $\lambda \geqslant 0$ равенствами

$$S(\lambda) = 1\ (0 \leqslant \lambda \leqslant N),\ S(\lambda) = e^{2i\delta(\lambda-N)}\ (\lambda > N)$$

и продолженная на отрицательную полуось соотношением $S(-\lambda) = \overline{S(\lambda)}$, является функцией рассеяния краевой задачи вида (1). При этом потенциал этой задачи $v(x)$ находится по формуле

$$v(x) = -2\frac{d}{dx}K(x, x), \tag{6}$$

где $K(x, y)$ — решение интегрального уравнения

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x, t)F(t+y)\,dt = 0, \tag{7}$$

$$0 < x \leqslant y < \infty,$$

в котором

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1 - S(\lambda)]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{8}$$

Используя уравнение (7) и свойства функции $\delta(\lambda)$, можно получить нижнюю и верхнюю оценки для потенциала $v(x)$. Действительно, интегрируя по частям правую часть формулы (8), получим

$$\begin{gathered} F(x) = \frac{\cos Nx}{x^3} + \frac{\varphi(x)}{x^4}, \\ F'(x) = N\left[-\frac{\sin Nx}{x^3} + \frac{\varphi_1(x)}{x^4}\right], \\ F''(x) = N^2\left[-\frac{\cos Nx}{x^3} + \frac{\varphi_1(x)}{x^4}\right], \end{gathered} \tag{9}$$

где при $N > 1$ и $x > 1$

$$|\varphi(x)| \leqslant C,\ |\varphi_1(x)| \leqslant C,\ |\varphi_2(x)| \leqslant C.$$

Здесь и далее через C будем обозначать константы, не зависящие от x и N.

Из выражения (9) для $F(x)$ следует, что при $x > x_0 = \max(C, 1)$

$$\tau(2x) = \int_{2x}^{\infty} |F(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{4x^2}$$

поэтому в пространствах $C(x, \infty)$ при $x > x_0$ норма интегрального оператора

$$F[f] = \int_{x}^{\infty} f(t) F(t+y)\, dt, \quad x \leqslant y < \infty,$$

меньше $\frac{1}{4}$, что позволяет оценить решение интегрального уравнения (7) и его производные. Проведя эти оценки и используя затем формулу (6), получим

$$|4F'(2x) - v(x)| < \frac{N}{x^5},$$

$$|8F''(2x) - v'(x)| < \frac{8N^2}{x^5},$$

если $x > x_0$ и $N > 1$.

Отсюда, согласно формулам (9), следует, что при $x \geqslant x_0$ и $N > 1$ выполняются такие неравенства:

$$\frac{N}{2x^3}\left(|\sin 2Nx| - \frac{C}{x}\right) \leqslant |v(x)| \leqslant \frac{N}{2x^3}\left(1 + \frac{C}{x}\right), \tag{10}$$

$$|v'(x)| \leqslant \frac{N^2}{x^3}\left(1 + \frac{C}{x}\right). \tag{11}$$

Рассмотрим наряду с полученной краевой задачей краевую задачу с нулевым потенциалом. Эта пара краевых задач имеет, очевидно, *совпадающие данные рассеяния при* $\lambda^2 \leqslant N^2$ *и* удовлетворяет условию (2), если положить

$$\alpha(x) = \int_{x}^{\infty} |v(t)|\, dt.$$

Из неравенств (10) и (11) следует, что при $x > x_0$ и $N > 1$ для рассматриваемой пары краевых задач справедливы оценки:

$$\alpha(x) \leqslant \frac{N}{4x^2}\left(1 + \frac{C}{x}\right), \quad \beta(x) \leqslant \frac{N}{2x^3}\left(1 + \frac{C}{x}\right),$$

$$\gamma(x) \leqslant \frac{N^2}{x^3}\left(1 + \frac{C}{x}\right),$$

влекущие за собой неравенство

$$\frac{9\alpha(x)\beta(x) + \gamma(x)}{N} + \frac{1}{30N\ln^2 N} \leqslant \frac{N}{x^3}\left\{1 + \frac{C}{x} + \frac{x^3}{30(N\ln N)^2}\right\}.$$

С другой стороны, в точках, где $2Nx = k\pi + \frac{\pi}{2}$, согласно левой части неравенства (10),

$$|v(x)| \geqslant \frac{N}{2x^3}\left(1 - \frac{C}{x}\right).$$

Следовательно, в таких точках

$$|v(x) - 0| \geqslant \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{C}{x}}{1 + \frac{C}{x} + \frac{x^3}{30(N \ln N)^2}} \left\{\frac{9\alpha(x)\beta(x) + \gamma(x)}{N} + \frac{1}{30N \ln^2 N}\right\}.$$

Поскольку C не зависит от x и N, всегда можно найти такие значения x и N, чтобы выполнялось неравенство (3), $2Nx = k\pi + \frac{\pi}{2}$ и величина

$$A = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{C}{x}}{1 + \frac{C}{x} + \frac{x^3}{30(N \ln N)^2}}$$

была сколь угодна близка к половине.

Таким образом, существуют краевые задачи с совпадающими при $\lambda^2 \leqslant N^2$ данными рассеяния, для которых справедливо неравенство (5) и, следовательно, оценка (4) не может быть улучшена более, чем на множитель $20(2 \ln N + 3)$.

В заключение автор выражает благодарность проф. В. А. Марченко за руководство работой, Д. Ш. Лундиной, А. С. Сохину за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ш. Лундина. Кандидатская диссертация. Харьков, 1971.
2. В. А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. К., «Наукова думка», 1970.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Изд-во Харьковск. ун-та 1960.

Поступила 3 сентября 1971 г.