ОБ ОДНОЙ ПРОЕКЦИОННОЙ ПОСТОЯННОЙ

В. В. Восканян

Пусть K — открытое кольцо на комплексной плоскости, ограниченное окружностями $\Gamma_1 = \{z : |z| = 1\}$ и $\Gamma_\rho = \{z : |z| = \rho\}$. Обозначим через $A(K)$ банахово пространство функций $f(z)$, аналитических в K и непрерывных вплоть до границы $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_\rho$ с нормой

$$\|f\| = \max_{z \in \overline{K}} |f(z)| = \max_{x \in \Gamma} |f(x)|.$$

Пространство $A(D)$ функций, аналитических в открытом единичном круге D и непрерывных в $\overline{D}$, с той же нормой является подпространством банахова пространства $A(K)$.

В настоящей заметке вычисляется проекционная постоянная

$$\lambda[A(D),\ A(K)] = \inf \|P\|,$$

где нижняя грань берется по всем операторам P, проектирующим пространство $A(K)$ на $A(D)$.

Конструкция усреднения (см., например, [1]) позволяет свести задачу к вычислению нормы «естественного» проектора — оператора «срезки» Q, который каждому элементу $f \in A(K)$ ставит в соответствие правильную часть его лорановского разложения:

$$Q: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Действительно, пусть задан ограниченный проектор P с $A(K)$ на $A(D)$. Обозначим через T_τ оператор сдвига функции:

$$T_\tau: f(z) \to f(ze^{i\tau}).$$

При фиксированном f функция $T_\tau f$ непрерывна по τ, поэтому имеет смысл интеграл

$$Q'f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_{-\tau} P T_\tau f \, d\tau.$$

Так как $\| T_\tau \| = 1$, то $\| Q' \| \leqslant \| P \|$. Легко проверить, что оператор Q' совпадает с оператором «срезки» Q.

Таким образом, доказано

Утверждение I. $\lambda \{A(D), A(K)\} = \| Q \|$.

Используем интегральную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(x)\,dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(x)\,dx}{x-z} = f_1(z) + f_2(z).$$

$$(Qf)(e^{it}) = f_1(e^{it}) = f(e^{it}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(x)\,dx}{x - e^{it}}.$$

При фиксированном $t \in [0, 2\pi]$ можно $(Qf)(e^{it})$ рассматривать как значение на элементе f функционала

$$Q_t: f \to (Qf)(e^{it}).$$

Покажем, что $\| Q \| = \| Q_t \| = \| Q_0 \|$ для всех t.

Действительно, пусть $f_n(z)$ — последовательность из $A(K)$ такая, что $\| f_n \| = 1$ и $\| Qf_n \| \to \| Q \|$. По принципу максимума модуля

$$\| Qf_n \| = \sup_{z \in \overline{K}} |(Qf_n)(z)| = \sup_{x \in \Gamma_1} |(Qf_n)(x)| = |(Qf_n)(e^{i\alpha_n})|.$$

Обозначим $f_n(e^{i\alpha_n} z)$ через $\varphi_n(z)$. Легко видеть, что $(Q\varphi_n)(z) = (Qf)(e^{i\alpha_n} z)$, поэтому

$$|(Qf_n)(e^{i\alpha_n})| = |(Q\varphi_n)(e^{i0})| = |Q_0 \varphi_n|.$$

Так как $\| \varphi_n \| = 1$ и $|Q_0 \varphi_n| \to \| Q \|$, то $\| Q_0 \| \geqslant \| Q \|$. С другой стороны ясно, что $\| Q_0 \| = \| Q_t \| \leqslant \| Q \|$ при всех t. Таким образом, доказано

Утверждение II. $\| Q \| = \| Q_0 \|$.

Задача свелась к вычислению нормы функционала

$$Q_0 : f(z) \to f(1) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(x)\,dx}{x-1},$$

который, как это видно, порождается мерой $d\mu$ на Γ вида

$$d\mu = d\mu_s + d\mu_a,$$

где $d\mu_s$ — мера единичной массы, сосредоточенная в точке $z = 1$, а

$$d\mu_a = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\ \dfrac{dx}{x-1} & \text{на } \Gamma_\rho, \\ \ \ 0 & \text{на } \Gamma_1. \end{cases}$$

Мера $d\mu_s$ сингулярна, а $d\mu_a$ — абсолютно непрерывна по мере Лебега dx.

Лемма. *Пусть на Γ задана мера (регулярная борелевская комплексная) $d\lambda$. Через $\|d\lambda\|$ будем обозначать норму функционала в пространстве $A(K)$, порожденного мерой $d\lambda$, т. е. действующего по формуле $\int\limits_\Gamma f d\lambda$. Пусть $d\lambda = d\lambda_a + d\lambda_s$ — разложение на абсолютно непрерывную и сингулярную части относительно меры Лебега dx.*

Тогда

$$\|d\lambda\| = \|d\lambda_a\| + \operatorname{Var} d\lambda_s.$$

Для доказательства используем следующее предложение, вытекающее из теоремы Хана—Банаха.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $X \subset Y$, S — единичный шар в X, $y^* \in Y^*$. Тогда

$$\|y^*\|_X = \sup_{x \in S} |y^* x| = \inf_{z^* \in X^\perp} \|y^* - z^*\|. \tag{1}$$

Так как $A(K) \subset C(\Gamma)$ (мы можем отождествить пространство $A(K)$ с ее сужением на границу Γ), то из соотношения (1) и теоремы Рисса следует, что

$$\|d\lambda\| = \inf_{d\sigma \in A(K)^\perp} \operatorname{Var}(d\lambda - d\sigma).$$

В работе [2, гл. 2, § 1] было показано, что если мера (функционал) $d\sigma$ ортогональна к $A(K)$, то она абсолютно непрерывна по мере Лебега. Отсюда следует, что

$$\|d\lambda\| = \inf_{d\sigma \in A(K)^\perp} \operatorname{Var}(d\lambda - d\sigma) = \inf_{d\sigma \in A(K)^\perp} \operatorname{Var}(d\lambda_a - d\sigma + d\lambda_s) =$$

$$= \inf_{d\sigma \in A(K)^\perp} \operatorname{Var}(d\lambda_a - d\sigma) + \operatorname{Var} d\lambda_s = \|d\lambda_a\| + \operatorname{Var} d\lambda_s.$$

Из доказанной леммы следует

Утверждение III. $\| Q_0 \| = \mathrm{Var}\, d\mu_s + \|d\mu_a\| = 1 + \| d\mu_a \|$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \rho \sqrt{\frac{(z-1)}{z(\rho^2 - z)}}.$$

Легко видеть, что $f \in A(K)$, $|f(x)| = 1$ на Γ_ρ и $|f(x)| < 1$ на Γ_1, и поэтому $\| f \| = 1$;

$$\left| \int_\Gamma f\, d\mu_a \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(x)\, dx}{x-1} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} \frac{ds}{|x-1|} = \mathrm{Var}\, d\mu_a.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Var}\, d\mu_a \leqslant \| d\mu_a \|$, а так как обратное неравенство очевидно, то получаем

$$\| d\mu_a \| = \mathrm{Var}\, d\mu_a = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} \frac{ds}{|x-1|} = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|\rho e^{it} - 1|} =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}} = \frac{2\rho}{\pi(1+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}\right).$$

Это равенство вместе с утверждениями I, II, III и дает решение поставленной задачи:

$$\lambda [A(D),\ A(K)] = \| Q \| = 1 + \frac{2\rho}{\pi(1+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}\right).$$

Замечание. Используя разложение в ряд полного эллиптического интеграла 1-го рода

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!} \right]^2 k^{2n} \right\}$$

и известные неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}},$$

получаем оценку

$$c_1 - \frac{\rho}{\rho+1} \ln(1-\rho) < \| Q \| < c_2 - \frac{\rho}{\rho+1} \ln(1-\rho).$$

Поэтому можно дать наглядную асимптотику

$$\lambda [A(D),\ A(K)] = \| Q \| \sim \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\rho} \text{ при } \rho \to 1.$$

В заключение автор выражает благодарность Б. С. Митягину за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rudin. Projections on invariant subspaces. Proc. Amer. Math Soc., 13, № 3, 1962.
2. С. Я. Хавинсон. Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях. «Матем. сб.», 36 (78), вып. 3, 1955.

Поступила 29 июня 1971 г.