ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕУНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Г. М. Фельдман

1. Введение

Настоящая статья является продолжением исследований [1—9] в плане гармонического анализа на группах. В гармоническом анализе употребляются различные определения спектра функций. Наиболее гибким среди них является, по-видимому, определение

Бёрлинга [10]. Независимо возникающее в теории операторов понятие спектра линейного оператора тесно связано со спектром в смысле гармонического анализа. Хорошей иллюстрацией к этому может служить классическое разложение однопараметрической унитарной группы в интеграл Фурье [11]:

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Из этого разложения следует, что спектр инфинитезимального оператора группы совпадает с замыканием объединения спектров Фурье, а значит, и спектром Бёрлинга семейства мер $d(E_\lambda x, x)$ (x пробегает гильбертово пространство, в котором действует группа U_t). Этот же спектр совпадает со спектром представления $t \to U_t$ (см. [6]). Ю. И. Любич высказал предположение, что аналогичное совпадение имеет место для широкого класса представлений локально компактных абелевых групп в банаховом пространстве. В первой части настоящей статьи это предположение доказано при условии неквазианалитичности, введенном Домаром [12] и использованном в работах [7, 8] в качестве условия отделимости спектра представления. Последний результат мы предсказываем, используя спектр Бёрлинга. Во второй части статьи мы применяем спектр Бёрлинга к исследованию представлений*, а затем изучаем вопросы полноты системы собственных векторов при помощи теории почти-периодических функций, аналогично тому, как это было сделано Ю. И. Любичем [3—5] для однопараметрической группы. Существенным для нас является использование почти-периодических векторов в смысле Маака [13, стр. 548], что позволяет в некоторых вопросах выйти за рамки слабо полных пространств (ср. [3—5]).

Результаты настоящей статьи были частично представлены в заметке [14].

Автор благодарит Ю. И. Любича за постановку задачи и полезные обсуждения.

2. Спектр Бёрлинга для функций ограниченных относительно веса

Пусть G — локально компактная сепарабельная абелева группа, G^* — группа ее унитарных характеров, наделенная компактно-открытой топологией, $\alpha(g)$ — измеримая на группе G функция, удовлетворяющая условиям:

$$1.\ \alpha(g) \geqslant 1; \quad 2.\ \alpha(g+h) \leqslant \alpha(g)\,\alpha(h).$$

Рассмотрим банахову алгебру L_α функций на группе G, интегрируемых с весом $\alpha(g)$. Нормой в L_α служит

$$\|f(g)\| = \int_G |f(g)|\,\alpha(g)\,dg,$$

* В связи с этим отметим, что в независимо выполненной работе [21] Р. Н. Леви использовал спектр Берлинга для спектрального анализа автоморфизмов полупростых банаховых алгебр.

где dg — мера Хаара. Умножением в L_α, как обычно, является свертывание. Двойственная алгебра $\tilde{L}_\alpha$ состоит из преобразований Фурье функций $f \in L_\alpha$

$$\tilde{f}(\chi) = \int_G f(g)\chi(g)\,dg \quad (\chi \in G^*,\ f \in L_\alpha).$$

Норма на неё переносится из L_α, умножение — поточечное. В работе [12] Домар подробно исследовал алгебры L_α и $\tilde{L}_\alpha$ при условии неквазианалитичности:

$$3.\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \alpha(ng)}{1+n^2} < \infty \quad (g \in G),$$

и установил следующее.

I. *Группа G^* совпадает с пространством максимальных идеалов алгебры L_α (как множество и как топологическое пространство), т. е. каждый мультипликативный функционал на L_α имеет вид:*

$$\chi(f) = \tilde{f}(\chi) \quad (\chi \in G^*).$$

II. *Алгебра $\tilde{L}_\alpha$ регулярна, т. е. для любого компакта $Q \subset G^*$ и любой его окрестности U существует функция $f \in L_\alpha$ такая, что*

$$0 \leqslant \tilde{f}(\chi) \leqslant 1,\quad \tilde{f}(\chi) = 1 \text{ на } Q \text{ и } \tilde{f}(\chi) = 0 \text{ вне } U.$$

III. *Функции из L_α, преобразования Фурье которых финитны, плотны в L_α.*

Для группы R эти результаты являются классическими [15]. В общем случае Домар использует структуру локально компактных абелевых групп [16].

Пространство, сопряженное к L_α, обозначим через L_α^∞. Оно состоит из ограниченных в существенно относительно веса функций $F(g)$ на группе G, т. е.

$$L_\alpha^\infty = \left\{F(g) : \operatorname*{vrai\,sup}_{g \in G} \frac{|F(g)|}{\alpha(g)} < \infty\right\}.$$

Спектром Бёрлинга $\sigma(F)$ функции $F(g) \in L_\alpha^\infty$ называется множество характеров χ группы G^*, принадлежащих L_α-замкнутому подпространству пространства L_α^∞, порожденному сдвигами функции $F(g)$. Из утверждений I—III следует [15], [17 стр. 104]:

III'. *Спектр Бёрлинга любой отличной от нуля функции из L_α^∞ не пуст.*

Сформулируем три леммы о спектре Бёрлинга. Их доказательство в случае когда вес $\alpha(g) = 1$, приведено, например, в [18], однако оно использует лишь свойства I — III алгебры L_α, и поэтому переносится без изменения на произвольный вес $\alpha(g)$, удовлетворяющий условиям 1—3.

Лемма 2.1. *Пусть функция* $f(g) \in L_\alpha$ *и функции* $F(g)$, $\Phi(g) \in L_\alpha^\infty$. *Тогда*

$$a)\ \sigma(f * F) \subset \sigma(F); \quad б)\ \sigma(F + \Phi) \subset \sigma(F) \cup \sigma(\Phi).$$

Лемма 2.2. *Пусть* $F(g) \in L_\alpha^\infty$ *и* U *— произвольная окрестность спектра* $\sigma(F)$. *Тогда функция* $F(g)$ *содержится в* L_α*-замкнутом подпространстве пространства* L_α^∞, *порожденном характерами из* U.

Лемма 2.3. *Если функция* $F(g) \in L_\alpha^\infty$ *слабо аппроксимируется характерами из замкнутого множества* Q, *то* $\sigma(F) \subset Q$.

3. B-спектр представления и его свойства

Пусть T — сильно непрерывное представление группы G ограниченными линейными операторами в бесконечномерном банаховом пространстве X, удовлетворяющее следующему условию неквазианалитичности:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln \| T_{ng} \|}{1 + n^2} < \infty \quad (g \in G). \tag{1}$$

Тогда, очевидно, функция $\alpha(g) = \| T_g \|$ удовлетворяет условиям 1—3 § 2. Свяжем представлением T семейство скалярных функций на группе G:

$$\varphi(T_g x),$$

где $x \in X$, а $\varphi \in X^*$, т. е. φ — произвольный линейный функционал в X.

Очевидно, что все такие функции принадлежат пространству L_α^∞. Спектр Бёрлинга функции $\varphi(T_g x)$ будем обозначать через $\sigma_{\varphi, x}$. Введём теперь следующие определения.

Определение 1. *Спектром* σ_x *элемента* x *банахова пространства* X *называется объединение спектров Бёрлинга* $\bigcup_{\varphi \in X^*} \sigma_{\varphi, x}$.

Определение 2. *B-спектром* $\sigma_B(T)$ *представления* T *называется замыкание объединения спектров элементов* σ_x, $x \in X$, *т. е.*

$$\sigma_B(T) = \overline{\bigcup_{\varphi, x} \sigma_{\varphi, x}}.$$

Сопоставим каждой функции $f(g) \in L_\alpha$ ее «преобразование Фурье по представлению T»:

$$\tilde{f}_T = \int_G f(g)\, T_g dg$$

(очевидно интеграл существует в сильном смысле). Тем самым алгебра L_α гомоморфно и непрерывно отображается в алгебру $\operatorname{End} X$.

В следующих леммах устанавливается связь преобразования Фурье с B-спектром представления.

Лемма 3.1. *Если $f(g) \in L_\alpha$ такова, что $\tilde{f}(\chi)$ обращается в нуль в окрестности V B-спектра представления T, то $\tilde{f}_T = 0$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, $\varphi \in X^*$. По определению $\tilde{f}_T$ имеем

$$\varphi(\tilde{f}_T x) = \int_G f(g) \varphi(T_g x) \, dg.$$

По лемме 2.2 функция $\varphi(T_g x)$ содержится в L_α-замкнутом подпространстве, порожденном характерами из V. Значит $\varphi(\tilde{f}_T x) = 0$. Так как x и φ произвольны, то $\tilde{f}_T = 0$.

Следствие. *Если $f(g) \in L_\alpha$ такова, что $\tilde{f}(\chi) = 1$ в окрестности V B-спектра представления T, то $\tilde{f}_T = I$.*

Доказательство. Можно считать, что окрестность V B-спектра имеет компактное замыкание Q. Нетрудно показать, что в алгебре L_α существует аппроксимативная единица $e_n(g)$ такая, что $e_n(\chi) = 1$ на Q. Тогда по лемме 3.1.

$$\tilde{f}_T = (\tilde{e}_n)_T \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

но

$$\lim_{n \to \infty} \int_G e_n(g) F(g) \, dg = F(0),$$

если $F(g)$ непрерывная и лежит в L_α^∞. Пусть $x \in X$, $\varphi \in X^*$ тогда

$$\varphi(\tilde{f}_T x) = \lim_{n \to \infty} \int_G e_n(g) \varphi(T_g x) \, dg = \varphi(x),$$

что и доказывает равенство $\tilde{f}_T = I$.

Лемма 3.2. *Если оператор $\tilde{f}_T$ равен нулю, то функция $\tilde{f}(\chi)$ равна нулю на B-спектре представления T.*

Доказательство. Так как $\tilde{f}_T = 0$, то для любого $g \in G$ $T_g \tilde{f}_T = 0$, т. е.

$$\int_G f(h) T_{g+h} dh = 0 \quad (g \in G).$$

Значит для произвольных $x \in X$, $\varphi \in X^*$

$$\int_G f(h) \varphi(T_{g+h} x) \, dh = 0 \quad (g \in G).$$

По определению спектра Бёрлинга $\tilde{f}(\chi) = 0$ на спектре $\sigma_{\varphi, x}$, и поскольку $\tilde{f}(\chi)$ непрерывна, то $\tilde{f}(\chi) = 0$ на $\sigma_B(T)$.

Лемма 3.3. $\sigma_{\tilde{f}_T x} \subset \sigma_{\tilde{f}} \cap \sigma_x$, *где* $\sigma_{\tilde{f}}$ *— носитель функции* $\tilde{f}(\chi)$.

Доказательство. Пусть $\chi_0 \overline{\in} \sigma_{\tilde{f}}$. Выберем функцию $\psi \in L_\alpha$ так, чтобы $\tilde{\psi}(\chi_0) = 1$ и $\tilde{\psi}(\chi) = 0$ в окрестности U носителя $\sigma_{\tilde{f}}$.

Тогда $\tilde{\psi}(\chi)\tilde{f}(\chi)=0$. Поэтому $\tilde{\psi}_T\tilde{f}_T=0$. Пусть $x\in X, \varphi\in X^*$. Обозначим $\tilde{f}_T x=y$. Тогда для любого $g\in G$ $\varphi(\tilde{\psi}_T T_g y)=0$, т. е.

$$\int_G \psi(h)\varphi(T_{g+h}y)\,dh=0 \quad (g\in G).$$

Следовательно, $\tilde{\psi}(\chi)=0$ на спектре $\sigma_{\varphi,y}$, а значит и на σ_y. Поэтому $\chi_0 \overline{\in} \sigma_{\tilde{f}_T x}$. Тем самым включение $\sigma_{\tilde{f}_T x}\subset\sigma_{\tilde{f}}$ доказано. Рассмотрим теперь функцию $\varphi(T_g\tilde{f}_T x)$. Имеем

$$\varphi(T_g\tilde{f}_T x)=\int_G f(h-g)\varphi(T_h x)\,dh=\int_G f_1(g-h)\varphi(T_h x)\,dh,$$

где $f_1(g)=f(-g)$. По лемме 2.1, *а*)

$$\sigma[\varphi(T_g\tilde{f}_T x)]\subset\sigma[\varphi(T_g x)]=\sigma_{\varphi,x}\subset\sigma_x,$$

значит, $\sigma_{\tilde{f}_T x}=\bigcup\limits_{\varphi}\sigma[\varphi(T_g\tilde{f}_T x)]\subset\sigma_x$. Лемма 3.3. полностью доказана

4. Теорема об отделимом спектре. Эквивалентные определения спектра

Применим результаты § 3 для изучения спектральных свойств представления. Аналогично [7—8] введем

Определение 3. *B-спектр $\sigma_B(T)$ представления T называется отделимым, если каждому компакту Q в группе G^* отвечает спектральное подпространство $L(Q)$, обладающее следующими свойствами:*

1. *Подпространство $L(Q)$ приводит T. Сужение $T(Q)= T\,|\,L(Q)$ равномерно непрерывно.*

2. $\sigma_B(T(Q))\subset\sigma_B(T)\cap Q$.

3. *Точки $\sigma_B(T)\cap Q$, внутренние относительно спектра $\sigma_B(T)$, принадлежит $\sigma_B(T(Q))$.*

4. *Если подпространство $L\subset X$ приводит T и B-спектр сужения T на L содержится в Q, то $L\subset L(Q)$.*

Отметим, что если спектр представления отделим и содержит более одной точки, то представлений T приводимо. Имеет место следующая

Теорема 1. *Если представление T удовлетворяет условию неквазианалитичности (1), то B-спектр $\sigma_B(T)$ представления T отделим.*

Доказательство. Определим подпространство $L(Q)$, существование которых утверждается в теореме следующим образом:

$$L(Q)=\{x\in X:\sigma_x\subset Q\}.$$

Лемма 2.1, б) показывает, что $L(Q)$ — линейное многообразие. Покажем, что $L(Q)$ замкнуто. Пусть $\{x_n\} \subset L(Q)$, т. е. $\sigma_{x_n} \subset Q$, и пусть $x_n \to x$. Предположим, что $\chi_0 \bar{\in} Q$. Выберем функцию $f \in L_\alpha$ так, чтобы $\tilde{f}(\chi_0) = 1$ и $\tilde{f}(\chi) = 0$ в некоторой окрестности V компакта Q. Тогда

$$\int_G f(g)\chi(g)\,dg = 0 \quad (\chi \in V). \tag{2}$$

Пусть $\varphi \in X^*$. По лемме 3.1 из (2) следует, что

$$\int_G f(g)\varphi(T_{g+h}x_n)\,dg = 0 \qquad (h \in G). \tag{3}$$

Переходя в (3) к пределу при $x_n \to x$, получим

$$\int_G f(g)\varphi(T_{g+h}x)\,dg = 0 \quad (h \in G). \tag{4}$$

Предположим теперь, что $\chi_0 \in \sigma_{\varphi,\,x}$, тогда из (4) следует, что $\tilde{f}(\chi_0) = 0$ вопреки выбору $f(g)$. Тем самым мы доказали, что $L(Q)$ замкнуто, а значит является подпространством в X. Проверим теперь выполнение свойств 1—4. Инвариантность $L(Q)$ относительно T очевидна, т. к. $\sigma_{T_g x} = \sigma_x$. Из определения подпространства $L(Q)$ следует также, что $\sigma_B(T(Q)) \subset \sigma_B(T) \cap Q$. В частности последнее означает, что $\sigma_B(T(Q))$ компакт. Выберем функцию $\psi \in L_\alpha$ так, чтобы $\tilde{\psi}(\chi) = 1$ в окрестности $\sigma_B(T(Q))$. По следствию из леммы 3.1 $\tilde{\psi}_T = I$ на $L(Q)$, т. е.

$$\int_G \psi(g)\,T_g dg = I_{L(Q)}.$$

Но тогда на $L(Q)$

$$\|I - T_h\| = \left\| \int_G \psi(g)\,T_g dg - \int_G \psi(g-h)\,T_g dg \right\| \leqslant \|\psi(g) - \psi(g-h)\|,$$

что и доказывает равномерную непрерывность сужения $T(Q)$. Свойства 1, 2 таким образом доказаны. Несколько сложнее доказать свойство 3. Пусть $\chi_0 \in \sigma_B(T) \cap Q$ и χ_0 — внутренняя точка относительно спектра $\sigma_B(T)$. Предположим, что $\chi_0 \bar{\in} \sigma_B(T(Q))$. У точки χ_0 существует окрестность U_0, не пересекающаяся с некоторой окрестностью U_1 дополнения компакта Q в спектре $\sigma_B(T)$. Выберем U_0 так, чтобы она не пересекалась с некоторой окрестностью спектра $\sigma_B(T(Q))$, и рассмотрим функцию $\psi \in L_\alpha$ такую, что $\tilde{\psi}(\chi_0 = 1$, $\tilde{\psi}(\chi) = 0$ вне U_0. По лемме 3.1 оператор $\tilde{\psi}_T = 0$ на $L(Q)$. Покажем, что образ оператора $\tilde{\psi}_T$ принадлежит $L(Q)$. Тогда получим, что $\tilde{\psi}_T^2 = 0$, а значит по лемме 3.2 $\tilde{\psi}(\chi) = 0$ на $\sigma_B(T)$, что противоречит равенству $\tilde{\psi}(\chi_0) = 1$. Пусть $f \in L_\alpha$ и $\tilde{f}(\chi) = 1$ в некоторой окрестности U компакта Q. Так как $U_0 \cap \sigma_B(T) \subset Q$, то, как нетрудно показать, существует такая окрестность $W \supset \sigma_B(T)$, что $U_0 \cap W \subset U$. По построению $(\tilde{f}(\chi) - 1)\tilde{\psi}(\chi) = 0$ в W. Значит по лемме 3.1.

$$\tilde{f}_T \tilde{\psi}_T = \tilde{\psi}_T. \tag{5}$$

Пусть $y \in X$. Обозначим $\tilde{\psi}_T y = x$. По лемме 3.3 $\sigma_{\tilde{f}_T x} \subset \sigma_x \cap \sigma_{\tilde{f}}$, но из (5) следует, что $\sigma_{\tilde{f}_T x} = \sigma_x$. Значит $\sigma_x \subset \sigma_{\tilde{f}}$, а отсюда, в свою очередь, видно, что $\sigma_x \subset Q$. Тем самым мы показали, что оператор $\tilde{\psi}_T$ отображает X в $L(Q)$. Свойство 3, таким образом, также установлено. Свойство 4 непосредственно следует из определения подпространства $L(Q)$. Теорема 1 полностью доказана.

В работе [6] Ю. И. Любич предложил следующее определение спектра представления T абелевой группы G.

Определение 4. *Характер χ принадлежит существенному спектру представления $\sigma_e(T)$, если существует такая нормированная последовательность $\{x_n\} \subset X$, что для всех $g \in G$*

$$\lim_{n\to\infty} (T_g x_n - \chi(g) x_n) = 0.$$

*Спектром $\sigma(T)$ представления T называется объединение существенного спектра $\sigma_e(T)$ и множества характеров, комплексно сопряженных с характерами из существенного спектра $\sigma_e(T^*)$ (T^* — представление, сопряженное с T).**

Ю. И. Любич доказал, что спектр равномерно непрерывного представления не пуст и замкнут в G^* поточечно. В работах [7—8] методами теории банаховых алгебр была получена теорема об отделимости спектра $\sigma(T)$ при условии неквазианалитичности и было установлено, что**

$$\sigma(T) = \sigma_e(T). \tag{6}$$

Теорема 2. *Если представление T удовлетворяет условию неквазианалитичности (1), то B-спектр представления $\sigma_B(T)$ совпадает со спектром представления $\sigma(T)$.*

Доказательство. Пусть $\chi_0 \overline{\in} \sigma_B(T)$. Выберем $f \in L_\alpha$ так

* Если рассматривать представление группы Z $n \to A^n$, где A — обратимый оператор в X, то спектр представления в смысле определения 4, очевидно, совпадает со спектром оператора.

** В [8] показано, что (6) имеет место при ограничениях на рост $\|T_g\|$ более слабых, чем неквазианалитичность, а именно, достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln \|T_{ng}\|}{n} = 0$ при всех $g \in G$.

чтобы $\tilde{f}(\chi_0) = 1$ и $\hat{f}(\chi) = 0$ в некоторой окрестности U B-спектра $\sigma_B(T)$. Тогда для любого $x \in X$ и любого $\varphi \in X^*$ по лемме 3.1

$$\int\limits_G f(g)\,\varphi(T_g x)\,dg = 0 \tag{7}$$

Если $\chi_0 \in \sigma(T)$, то из (6) следует, что $\chi_0 \in \sigma_c(T)$, и поэтому существует нормированная последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_G f(g)\,\varphi[(T_g - \chi_0(g)\,I]\,x_n]\,dg = 0$$

равномерно по всем $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$. Учитывая (7), получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$, что невозможно. Тем самым включение $\sigma(T) \subset \sigma_B(T)$ доказано. Для доказательства обратного включения воспользуемся теоремой 1. Пусть $\chi_0 \in \sigma_B(T)$, U — некоторая окрестность χ_0, замыкание которой $\overline{U}$, компактно. Тогда χ_0 — внутренняя точка $\overline{U} \cap \sigma_B(T)$ относительно $\sigma_B(T)$. По теореме 1 $\chi_0 \in \sigma_B(T(\overline{U}))$. Значит $L(\overline{U})$ отлично от нуля. Кроме того $\sigma_B(T(\overline{U})) \subset \overline{U}$. По доказанному выше $\sigma(T(\overline{U})) \subset \sigma_B(T(\overline{U}))$. Но спектр представления $\sigma(T)$ не пуст. Таким образом, в любой окрестности $\overline{U}$ точки χ_0 из $\sigma_B(T)$ содержатся точки из $\sigma(T)$. Вследствие замкнутости спектра $\sigma(T)$ имеем $\sigma_B(T) \subset \sigma(T)$. Теорема 2 полностью доказана.

Отметим, что из теорем 1 и 2 получается независимое от результатов [7—8] доказательство теоремы об отделимости спектра представления $\sigma(T)$. Полученное в процессе доказательства описание спектрального подпространства $L(Q)$ часто также оказывается полезным.

Для дальнейшего нам понадобится

Определение 5. *Характер $\chi \in G^*$ называется собственным характером представления T, если существует вектор $x \in X$, $x \neq 0$ такой, что $T_g x = \chi(g)\,x$ для всех $g \in G$. Соответствующий собственному характеру χ вектор x называется собственным вектором.*

Следующая теорема была получена в [5] для однопараметрических групп изометрических операторов методами теории почти-периодических функций. При этом доказательство можно было провести лишь для слабо полных пространств. Затем в [9] аналогичный результат был получен для изометрического оператора, действующего в произвольном банаховом пространстве. Мы применим соображения, связанные с использованием спектра Берлинга, что позволит обобщить эту теорему на более широкий класс представлений.

Теорема 3. *Если представление T неквазианалитично и система собственных векторов представления полна, то спектр представления $\sigma(T)$ совпадает с замыканием множества собственных характеров представления.*

Доказательство. Обозначим через $\sigma_d(T)$ множество собственных характеров представления. Замыкание множества $\sigma_d(T)$ обозначим через δ. Пусть $x \in X$. По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор собственных векторов $\{x_k\}_1^n$, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \varphi(T_g x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \chi_k(g) \right| < \varepsilon \|\varphi\| \|T_g\|. \tag{8}$$

Если $f \in L_\alpha (\alpha(g) = \|T_g\|)$ и $\|f\| = 1$, то из (8) получаем

$$\left| \int_G \left(\varphi(T_g x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \chi_k(g)\right) f(g)\, dg \right| < \varepsilon \|\varphi\|.$$

Последнее неравенство показывает, что функция $\varphi(T_g x)$ слабо аппроксимируется линейными комбинациями характеров из $\sigma_d(T)$. Поэтому по лемме 2.3 $\sigma_{\varphi, x} \subset \delta$. Применяя теорему 2, получим $\sigma(T) \subset \delta$.

Обратное включение очевидно. Теорема, таким образом, доказана.

5. Изометрические представления

Применим результаты предыдущего параграфа и теорию почти-периодических функций на группе для изучения некоторых свойств изометрических ($\|T_g\| = 1$) представлений.

Представление T, конечно, не обязано иметь собственные векторы. Однако в некоторых случаях существование собственного вектора следует из топологических свойств спектра представления $\sigma(T)$.

Теорема 4. *Если χ_0 — изолированная точка спектра $\sigma(T)$ изометрического представления T, то спектральное подпространство $L(\{\chi_0\})$ состоит из собственных векторов представления, соответствующих собственному характеру χ_0.*

Доказательство. Применяя теорему 1 в случае, когда компакт $Q = \{\chi_0\}$, получаем $\sigma(T \mid L(\{\chi_0\})) = \chi_0$. Поэтому теорема 2, примененная к подпространству $L(\{\chi_0\})$ дает

$$\chi_0 = \overline{\bigcup_{\varphi, x} \sigma_{\varphi, x}}, \tag{9}$$

где $x \in L(\{\chi_0\})$, $\varphi \in L(\{\chi_0\})^*$. Так как спектр Берлинга любой функции из L^∞ не пуст [18], то из (9) имеем $\sigma_{\varphi, x} = \chi_0$ для любого вектора $x \in L(\{\chi_0\})$ и любого функционала $\varphi \in L(\{\chi_0\})^*$. Но в пространстве L^∞ все функции с одноточечным спектром пропорциональны соответствующим характерам [18], и поэтому $\varphi(T_g x) = \gamma \chi_0(g)$.

Подставляя $g = 0$, получим $\gamma = \varphi(x)$. Значит $\varphi(T_g x - \chi_0(g) x) = 0$ для любого функционала $\varphi \in L(\{\chi_0\})^*$. Поэтому $T_g x = \chi_0(g) x$ для всех векторов $x \in L(\{\chi_0\})$, что и доказывает теорему.

Вопросы полноты системы собственных векторов представления тесно связаны с почти-периодическими функциями на группе*.

Теорема 5. *Если система собственных векторов изометрического представления T полна, то все функции*

$$\varphi(T_g x) \quad (g \in G),$$

где $x \in X$, φ — произвольный линейный функционал в X, являются почти-периодическими функциями на группе G.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем собственные векторы представления $x_1, \ldots x_n$ так, чтобы

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|\varphi(T_g x) - \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k) \chi_k(g)| < \varepsilon \|\varphi\|,$$

так как $T_g x_k = \chi_k(g) x_k$ и $\|T_g\| = 1$, значит функция $\varphi(T_g x)$ с любой точностью аппроксимируется равномерно на всей группе G линейными комбинациями характеров. Поэтому она почти-периодическая на группе G.

Так же как и в случае однопараметрических групп [4], обратная теорема имеет место при некоторых дополнительных ограничениях на пространство представления X.

Теорема 6. *Пусть пространство X слабо полно, T — изометрическое представление и все функции $\varphi(T_g x)$ почти-периодические на группе G. Тогда система собственных векторов представления полна.*

Доказательство. Обозначим через $M_g\{\psi(g)\}$ среднее почти-периодической функции $\psi(g)$ на группе G. Тогда каждой такой функции мы можем сопоставить ряд Фурье—Бора

$$\psi(g) \sim \sum_{\chi} a_\chi \chi(g),$$

где

$$a_\chi = M_g\{\psi(g) \overline{\chi}(g)\}. \tag{10}$$

Так как пространство X слабо полно, то существует слабый предел

$$P_\chi = M_g\{T_g \overline{\chi}(g)\}.$$

Заметим, что

$$|\varphi(P_\chi x)| \leqslant M_g\{|\varphi(T_g \overline{\chi}(g)) x|\} \leqslant \|\varphi\| M_g\{\|T_g x\|\} = \|\varphi\| \|x\|.$$

* О почти-периодических функциях на группе (см. например, в [19]).

Поэтому

$$\|P_\chi\| = \sup_{\|\varphi\|=1,\ \|x\|=1} |\varphi(P_\chi x)| \leqslant 1.$$

Значит P_χ — ограниченный оператор. Кроме того,

$$T_h P_\chi = T_h M_g \{T_g \overline{\chi}(g)\} = M_g \{T_{g+h} \overline{\chi}(g)\} = \chi(h) M_g \{T_g \overline{\chi}(g)\} = \\ = \chi(h) P_\chi.$$

Это показывает, что область значений оператора P_χ принадлежит собственному подпространству представления T, отвечающему собственному характеру χ. Отметим также, что если функции $\varphi(T_g x)$ отвечает ряд Фурье—Бора $\sum a_\chi \chi(g)$, то

$$a_\chi = \varphi(P_\chi x).$$

Поэтому, если некоторый линейный функционал φ аннулируется на всех собственных векторах представления, для любого $x \in X$

$$\varphi(P_\chi x) = 0 \quad (\chi \in G^*).$$

По теореме единственности для почти-периодических функций $\varphi(T_g x) = 0$. Полагая $g = 0$, получим $\varphi(x) = 0$, т. е. $\varphi = 0$. Теорема доказана.

Теорема 6 позволяет получить некоторые достаточные условия полноты системы собственных векторов представления. Примером может служить следующая

Теорема 7. *Пусть представление T в слабо полном пространстве X изометрично и спектр представления $\sigma(T)$ — приводимое множество (т. е. не содержит непустых совершенных подмножеств). Тогда система собственных векторов представления полна.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(T_g x)$ на группе G. По теореме 2 имеем $\sigma_{\varphi, x} \subset \sigma(T)$. Поэтому множество $\sigma_{\varphi, x}$ также приводимо. Так как представление T изометрично, то

$$\|\varphi(T_g x) - \varphi(T_h x)\| \leqslant \|\varphi\| \, \|(I - T_{g-h}) x\|,$$

и следовательно, функция $\varphi(T_g x)$ равномерно непрерывна на группе G. По теореме Люмиса [20] равномерно непрерывная ограниченная функция на локально компактной абелевой группе, спектр Берлинга которой является приводимым множеством — почти-периодическая. Значит система собственных векторов представления полна.

Отметим, что в случае, когда спектр изометрического представления топологически дискретен, полнота системы собственных векторов непосредственно следует из теоремы 3 и общей теоремы полноты для спектральных подпространств [8]. Требование слабой полноты на пространство представления в этом случае излишне.

Для того чтобы в некоторых вопросах выйти за рамки слабо полных пространств, нам удобно использовать введенное Мааком [13] понятие почти-периодического вектора.

Вектор $x \in X$ называется почти-периодическим, если для любого ε существует конечный набор элементов $\{g_i\}_1^n$ группы G такой, что «шары»

$$K_x(\varepsilon, g_i) = \{g : \| T_g x - T_{g_i} x \| < \varepsilon\} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

образуют ее покрытие. Очевидно, что собственные векторы представления являются почти-периодическими. Поэтому будут почти-периодическими их линейные комбинации и равномерные пределы. Рассмотрим какой-нибудь почти-периодический вектор $x \in X$. Тогда, как показал Маак [13], для любого $\chi \in G^*$ существует среднее

$$x_\chi = M\{\overline{\chi}(g) T_g x\} \tag{11}$$

при всех $\chi \in G^*$. Но тогда

$$T_h x_\chi = T_h M\{\overline{\chi}(g) T_g x\} = M\{\overline{\chi}(g) T_{g+h} x\} = \chi(h) x_\chi$$

в силу инвариантности среднего. Тем самым показано, что x_χ — собственный вектор представления, отвечающий собственному характеру χ. Из свойств среднего вытекает также, что x_χ аппроксимируется линейными комбинациями векторов вида $T_{g_i} x$. Из (11) и единственности среднего для почти-периодической функции на группе следует, что для любого линейного функционала φ

$$\varphi(x_\chi) = M_g\{\overline{\chi}(g)\varphi(T_g x)\}, \tag{12}$$

функция $\varphi(T_g x)$ почти-периодична, так как почти-периодичен вектор x. Поэтому, если функции $\varphi(T_g x)$ соответствует ряд Фурье—Бора

$$\varphi(T_g x) \sim \sum a_\chi \chi(g),$$

из (10) и (12) следует $a_\chi = \varphi(x_\chi)$, где x_χ определяется (11). Поэтому, если функционал φ аннулируется на всех собственных векторах представления, то коэффициенты Фурье—Бора функции $\varphi(T_g x)$ равны нулю. По теореме единственности для почти-периодических функций $\varphi(T_g x) = 0$. Значит $\varphi(x) = 0$. Тем самым доказана.

Теорема 8. *Пусть представление T изометрично. Вектор x является почти-периодическим тогда и только тогда, когда он принадлежит подпространству, натянутому на все собственные векторы представления.*

Следствие. (Теорема о спектральном синтезе). *Если система собственных векторов изометрического представления полна, то она полна в каждом инвариантном подпространстве.*

Доказательство. Пусть L — инвариантное подпространство и система собственных векторов представления, содержащаяся в V, не полна. Тогда существует такой вектор x и такой функционал φ, что $\varphi(x_k) = 0$ для всех $x_k \in L$ и $\varphi(x) \neq 0$. Из инвариантности L и свойств среднего почти-периодического вектора следует, что все x_k, определяемые (11), принадлежат L. Поэтому коэффициенты Фурье—Бора функции $\varphi(T_g x)$ равны нулю. По теореме единственности для почти-периодических функций $\varphi(T_g x) \equiv 0$, это противоречит тому, что $\varphi(x) \neq 0$.

Сделаем еще несколько замечаний об изометрических представлениях с полной системой собственных векторов. Формула (11) определяет в этом случае линейный оператор на всем X. Обозначим $x_\chi = P_\chi x$. Тогда

$$\| P_\chi \| = \sup_{\|x\|=1} \| M \{\overline{\chi}(g) T_g x\} \| \leqslant \sup_{\|x\|=1} M \{\| T_g x \|\} = 1.$$

Таким образом, P_χ — ограниченный оператор. Очевидно, что P_χ — проектор. Область значений P_χ, как было показано, является собственным подпространством, отвечающим собственному характеру χ. Очевидно, что имеет место соотношение ортогональности

$$P_{\chi_1} P_{\chi_2} = \delta_{\chi_1, \chi_2} P_{\chi_1}.$$

Это на языке теории операторов отражает тот факт, что собственные векторы, отвечающие различным собственным характерам, ортогональны (в банаховом смысле) *.

Сопоставим каждому вектору $x \in X$ формальный ряд

$$x \sim \sum P_\chi x. \tag{13}$$

Те члены разложения, для которых χ не является собственным характером, могут быть опущены, так как для них $P_\chi x = 0$. Если $P_\chi x = 0$ для любого $\chi \in G^*$, то ряд Фурье—Бора почти-периодической функции $\varphi(T_g x)$ равен нулю, поскольку $a_\chi = \varphi(P_\chi x)$. Поэтому $\varphi(T_g x) = 0$ по теореме единственности. Значит $\varphi(x) = 0$ и так как φ произвольно, то $x = 0$. Тем самым установлена

Теорема 9. *Формальное разложение* (13) *однозначно определяет каждый элемент* $x \in X$.

Следствие. Если разложение (13) *слабо сходится, то оно сходится к* x.

Отметим, что при доказательстве теорем 5—6, 8—9 сепарабельность и локальная компактность группы G не была использована. Эти теоремы верны, таким образом, для произвольных абелевых топологических групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Любич, В. И. Мацаев. К спектральной теории линейных операторов в банаховом пространстве. ДАН СССР, 131. № 1 (1960), 21—23.

2. Ю. И. Любич, В. И. Мацаев. Об операторах с отделимым спектром. «Матем. сб.,» 56 (98), № 4, 1962, 433—468.

3. Ю. И. Любич. Почти-периодические функции в спектральном анализе операторов. ДАН СССР, 132, № 3, (1960), 518—520.

4. Ю. И. Любич. Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. УМН, 18 : 1, 1963, 165—171.

---

* Вектор x ортогонален вектору y в банаховом смысле, если для любого комплексного $\gamma \; \| x + \gamma y \| \geqslant \| x \|$.

5. Ю. И. Любич. Консервативные операторы. УМН, 20 : 5, 1965, 221—225.
6. Ю. И. Любич. О спектре представления топологической абелевой группы. ДАН СССР, 200, № 4, 1971, 777—780.
7. Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман. Об отделимости спектра представления локально компактной абелевой группы. ДАН СССР.
8. Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман. О представлениях с отделимым спектром (В печати).
9. А. С. Маркус, Л. Н. Никольская, Н. К. Никольский. Об унитарном спектре сжатия в банаховом пространстве. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, т. 22, 1971, 65—74.
10. A. Beurling. Un thcoreme sup les fonctions bornees et uniforment continues sur e'axe reel, Acta Math, 77 (1945), 127—136.
11. M. H. Stone. On one-parameter unitary groups in Hilbert spaceh Ann. of Math., 33, (1932) 643—648.
12. Y. Domar. Harmoute analysis based on certan commutati ve Banac, algebras, Acta Math, 96, (1956), 1—66.
13. К. Морен. Методы гильбертова пространства. «Мир», 1965.
14. Г. М. Фельдман. К спектральной теории представлений локально компактных абелевых групп. «Функциональный анализ и его приложения», т. 6, вып. 1, 1972, 89.
15. Л. Люмис. Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ. 1956.
16. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954.
17. Е. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. Коммутативные нормированные кольца. М., ГИФМЛ, 1960.
18. Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. Линейные операторы. «Мир», 1966.
19. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
20. L. H. Loomis. The spektral character ization of a class of almos periodic functions, Ann, Math, 1960, 72, № 2, 362—368.
21. Р. Н. Леви. Об автоморфизмах банаховых алгебр. «Функциональный анализ и его приложения», т. 6. вып. 1, 1972, 16—18.

Поступила 24 июня 1971 г.