ТЕОРЕМА БОРА — ВАН КАМПЕНА НА ПОЛУГРУППАХ

Т. В. Тонев

Введение

Ван Кампену [3] принадлежит следующее обобщение теоремы Бора об аргументе почти-периодической функции: если непрерывная функция на связной компактной группе не обращается в нуль, то она представима в виде $\chi_{\exp}\varphi$, где χ — одномерный характер, а φ — непрерывна.

В работах Е. А. Горина [1] и В. Я. Лина [2] получены различные обобщения теоремы ван Кампена, в которых речь идет о представлениях связной компактной группы в группу автоморфизмов коммутативной банаховой алгебры или об отображениях в локально компактную группу. Эти результаты в конкретных ситуациях приводят к разнообразным «теоремам об аргументе» (например, для аналитических почти-периодических функций многих переменных), а также имеют другие интересные следствия (полуинвариантный интеграл, непрерывные когомологии групп, подобие автоморфизмов и т. д.), указанные в [1] и [2].

Цель данной статьи состоит в распространении части упомянутых выше результатов на случай функций, заданных на полугруппе. Точнее, мы опишем класс связных компактных полугрупп, для которых сохраняется теорема Бора-ван Кампена (в ее общем виде) и существует полуинвариантный интеграл.

1. Напомним некоторые определения и результаты, касающиеся полугрупп. Полугруппой называется множество S с бинарной ассоциативной операцией $\tau: S \times S \to S$, $\tau(\tau(x, y), z) = \tau(x, \tau(y, z))$. Операция τ называется умножением, и $\tau(x, y)$ обозначается через $x.y$. Непустое подмножество $L \subset S$ называется левым идеалом, если $S. L \subset L$, т. е. $x.l \in L$ для каждого $x \in S$ и $l \in L$. Аналогично R — правый идеал, если $R.S \subset R$. Идеал, одновременно левый и правый, называется двусторонним. Элемент $e \in S$ называется идемпотентом, если $e^2 = e$. Множество всех идемпотентов будем обозначать через I. Полугруппа S называется топологической, если S — хаусдорфово топологическое пространство, причем $\tau: S \times S \to S$ — непрерывное отображение. Мы будем рассматривать только компактные полугруппы.

Известно, что каждая компактная полугруппа содержит хотя бы один идемпотент (4). Также хорошо известно (4), что каждая компактная полугруппа S имеет единственный минимальный (двусторонний) идеал K, который является замкнутой подполугруппой полугруппы S. При этом $K = \bigcap\limits_{l \in I} S e S$.

Минимальный двусторонний идеал топологической полугруппы называется ядром этой полугруппы. Структура ядра компактной полугруппы хорошо известна (см., например, [5]). В частности, ядро является объединением непересекающихся замкнутых подгрупп [4].

Отсюда следует, что ядро является группой, т. и т. т., когда в нем содержится единственный идемпотент.

Легко видеть, что ядро коммутативной компактной полугруппы есть подгруппа. Действительно, для любого $a \in S$ множество aK есть двусторонний идеал: $aKS \subset aK$; $SaK = aSK \subset aK$, откуда из $aK \subset K$ вытекает $aK = K$, поскольку K — минимальный идеал. Но из $aK = K$ для каждого $a \in K$ легко следует, что K — топологическая группа (см. [4]).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что ядро — топологическая группа в индуцированной топологии. Из предыдущего вытекает, что каждая компактная коммутативная полугруппа обладает этим свойством. Для полугрупп с нулем это тоже верно. Для компактных полугрупп свойство ядра быть группой эквивалентно существованию двустороннего инвариантного среднего из $C^*(S)$ [6].

Через e_1 будем обозначать единственный идемпотент K — это единица группы K. Тогда очевидно, что $K = Se_1S$: из $S.K.S \subset K$ следует $Se_1S \subset K = \bigcap_{l \in I} SeS \subset Se_1S$. Отображение $r: S \to K: r(x) = x \cdot e_1$ является ретракцией; то же верно для $r_1(x) = e_1 \cdot x$ и $r_2(x) = e_1 \cdot x \cdot e_1$. Отсюда вытекает, что если S связна, то и K также связно.

2. Пусть S^* — множество всех непрерывных полухарактеров полугруппы S, по модулю равных 1, т. е. тех функций χ на S, для которых $\chi(x.y) = \chi(x).\chi(y)$ при всех x, y из S, и $|\chi| = 1$.

Лемма 1. *Множество всех характеров $\widehat{K}$ группы K естественно топологически изоморфно множеству S^*.*

Ясно, что из $x \in S^*$ следует $\lambda|_K \in \widehat{K}$ и что сужение — непрерывный гомоморфизм $S^* \to \widehat{K}$ (относительно равномерных топологий в S и K). Обратно, если $\chi \in \widehat{K}$, то $|\chi| = 1$, и γ, определяемое формулой $\gamma(t) = \chi(r(t)) = \chi(t, e_1)$, принадлежит S^*, поскольку $\gamma(s.t) = \chi(s.t.e_1) = \chi(s.e_1.t.e_1) = \chi(s.e_1)\chi(t.e_1) = \gamma(s).\gamma(t)$. Но $t.e_1 \in K$, так что $t.e_1 = e_1.t.e_1$. Если $\gamma|_K = \gamma_1|_K$, то $\gamma_1(e_1) = \gamma(e_1) = 1$ и $\gamma_1(t) = \gamma_1(t.e_1) = \gamma(t.e_1) = \gamma(t)\gamma(e_1) = \gamma(t)$, так что γ однозначно определяется по χ. Непрерывность отображения очевидна, а если $t \in K$, то $\gamma(t)|_K = \chi(t.e_1) = \chi(t)$. Итак, искомый изоморфизм осуществляет сужение $\chi \to \chi|_K$.

Теорема 1. *Если S — связная компактная полугруппа, такая, что ее ядро — группа, то каждая непрерывная комплексная функция f, отличная от 0 на S, представляется (единственным образом) в виде $f(g) = \gamma_f(g) \cdot \exp\varphi_f(g)$,* где $\gamma_f \in S^*$, а $\varphi_f \in C(S)$, *тогда и только тогда, когда сопряженный вложению $i: K \to S$ гомоморфизм групп одномерных целочисленных когомологий S и K: $H^1(S,\mathbf{Z}) \to H^1(K,\mathbf{Z})$, есть изоморфизм.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что если для некоторой $f \neq 0$ имеется разложение вида $f(g) = \gamma_f(g) \cdot \exp\varphi_f(g)$, то γ_f может быть выбрано единственным образом, а φ_f — с точностью до слагаемого $2n\pi i$. Действительно, сужения обеих частей этого равенства на ядро K (K — группа), в силу теоремы ван Кампена, определяются однозначно и γ_f определяется однозначно по своему сужению на K.

Через $\mathscr{E}(X)$ будем обозначать множество всех отличных от 0 функций на компакте X, через $\mathscr{E}_1(X)$ — те из них, которые представляются как экспоненты функций из $C(X)$. В силу теоремы Брушлинского-Эйленберга существует естественный изоморфизм η_x: $\mathscr{E}(X)/\mathscr{E}_1(X) \to H^1(X, \mathbf{Z})$.

Пусть теперь для каждого $f \in C(S)$ существует (единственное) разложение $f = \gamma_f \cdot \exp\varphi_f$. Ясно, что возникает изоморфизм $j^*: \mathscr{E}(S)/\mathscr{E}_1(S) \to S^*: f \to \gamma_f$, обратный к которому является вложением $S^* \subsetneqq \mathscr{E}(S) \to \mathscr{E}(S)/\mathscr{E}_1(S)$. Заметим, что если $\gamma \neq 1$, то $\gamma \not\sim 1$, так как $\gamma|_K \neq 1|_K$, а K — группа. Вложение $i: K \to S$ индуцирует изоморфизм $i_0^*: S^* \to \widehat{K}$, построенный в лемме 1, а также гомоморфизмы $i_1^*: \mathscr{E}(S)/\mathscr{E}_1(S) \to \mathscr{E}(K)/\mathscr{E}_1(K)$ и $i^*: H^1(S, \mathbf{Z}) \to H^1(K, \mathbf{Z})$, которые связаны следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc} S^* & \xleftarrow{j^*} & \mathscr{E}(S)/\mathscr{E}_1(S) & \xrightarrow{\eta_S} & H^1(S, \mathbf{Z}) \\ i_0^* \downarrow & & i_1^* \downarrow & & i^* \downarrow \\ \widehat{K} & \xleftarrow{k} & \mathscr{E}(K)/\mathscr{E}_1(K) & \xrightarrow{\eta_K} & H^1(K, \mathbf{Z}). \end{array}$$

Поскольку диаграмма коммутативна, ее строки точны и i_0^* — изоморфизм, то изоморфизмами являются и i_1^* и i^*. Итак, $i^*: H^1(S, \mathbf{Z}) \to H^1(K, \mathbf{Z})$ — изоморфизм.

Обратно, пусть $i^*: H^1(S, \mathbf{Z}) \to H^1(K, \mathbf{Z})$ — изоморфизм. Из коммутативности правой диаграммы следует биективность i_1^*, а отсюда — биективность и $i_0^{*-1} \circ k \circ i_1^* = j^*$. Рассмотрим диаграмму, верхняя строка которой представляет собой точную последовательность:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{E}_1(S) & \overset{\alpha^*}{\subsetneqq} & \mathscr{E}(S) & \to & \mathscr{E}(S)/\mathscr{E}_1(S) & \to & 0 \\ & & & & {\scriptstyle j'^*} \searrow \nwarrow {\scriptstyle \beta^*} & & \downarrow j^* & & \\ & & & & & & S^* & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Поскольку j^* — изоморфизм, а S^* вкладывается в $\mathscr{E}(S)$ так, что $j'^* \circ \beta^* = \mathrm{id}_s{}^*$, то $\mathscr{E}(S)$ расщепляется: $\mathscr{E}(S) = \mathscr{E}_1(S) \oplus S^*$. Если теперь $f \in \mathscr{E}(S)$, то $\gamma_f = j'^*(f) \in S^*$. Пусть $\psi_f = f \cdot (\beta^* \circ j'^* f)^{-1}$. Тогда $\psi_f \in \mathscr{E}(S)$ и $j'^* \psi_f = j'^* f \cdot j'^* (\beta^* \circ j'^* f)^{-1} = j'^* f (j'^* \circ \beta^* \circ j'^* f)^{-1} = j'^* f \cdot (j'^* f)^{-1} = e$, поскольку $j'^* \circ \beta^* = \mathrm{id}_s{}^*$. Итак, $\psi_f \in \operatorname{Im} \alpha^*$, в силу точности и, следовательно, $\psi_f \in \mathscr{E}_1(S)$.

Итак, $f = \beta^* \circ j'^* f \circ \psi_f = \beta^* \gamma_f \cdot \psi_f = \gamma_f \cdot \psi_f$ (где $\gamma_f = j'^* f \in S^*$, $\psi_f \in \mathscr{E}_1(S)$, так как $\beta^*: S^* \to \mathscr{E}(S)$ — естественное вложение, т. е.

$$f(g) = \gamma_f \cdot \exp\varphi_f$$

для некоторого $\varphi_f \in C(S)$. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть S — окружность, а умножение определяется формулой $x \cdot y = x_0 \in S$. Тогда x_0 будет нулем получившейся полугруппы, ядро

$K \subset S$ будет совпадать с x_0, и следовательно, будет подгруппой S. Легко видеть, что S^* состоит лишь из $\chi \equiv 1$. Разложение ван-Кампена в такой ситуации означает просто логарифмируемость функции. Конечно, на окружности не все отличные от 0 непрерывные функции имеют непрерывный логарифм и, в соответствии с теоремой в данном случае $H^1(S, \mathbf{Z}) \neq 0 = H^1(K, \mathbf{Z})$.

2) Пусть S — связный компакт, для которого $H^1(S, \mathbf{Z}) \neq 0$. Определим умножение, полагая $a.b = a$. Здесь K и S совпадают, но K не является группой, и разложения ван-Кампена снова не имеется.

Известны некоторые условия для того, чтобы в S выполнялось равенство $H^1(S, \mathbf{Z})^{i^*} = H^1(K, Z)$. Если, например, S имеет единицу, то, как следует из результатов в [7], совпадение когомологий имеется во всех размерностях. Следовательно, если S — компактная связная полугруппа с единицей, для которой K есть группа, (например, S — коммутативна с единицей), то в S верна теорема ван-Кампена.

В [8] показано, что если линейно связная компактная полугруппа S имеет левую или правую гомотопическую единицу, то $S \sim K$, откуда также следует равенство их когомологий. Заметим, что так как K — непрерывный ретракт S, то для наших целей достаточно иметь $H^1(S,K;\ Z) = 0$.

3. Используя теорему 1, можно распространить на полугруппы некоторые результаты из [1] и [2].

Следствие 1. *Пусть A — локально компактная абелева группа, S — связная компактная полугруппа, такая что ее ядро K — группа, причем $i^*: H^1(S) \to H^1(K)$ — изоморфизм. Всякое непрерывное отображение $f: S \to A$ единственным образом представляется в виде*

$$f(g) = f(e_1) \cdot \chi_f(g) \cdot \varphi_f(g),$$

где χ_f — непрерывный гомоморфизм полугруппы S в максимальную компактную подгруппу A_c связной компоненты единицы группы A, $\varphi_f(e_1) = e_A$, φ_f — стягиваемо.

Действительно, доказательство, приведенное в [2], использует структурную теорему для группы A, теорему ван-Кампена для связной компактной группы (которую теперь надлежит заменить теоремой 1), тот факт, что если два гомоморфизма группы G в A гомотопны, то они совпадают и, кроме того, что $\mathrm{Hom}(G, A)$ — вполне несвязная группа для связной компактной группы G. Но два последних факта, очевидно, сохраняются по отношению к полугруппам, удовлетворяющим условиям теоремы 1, так как полухарактеры полугруппы по модулю, равные 1, суть характеры ядра.

Замечание 1. Отсюда, как и для групп, вытекает существование и единственность полуинвариантного (S, A)-интеграла в смысле [2]. В процессе доказательства нам понадобится существование и единственность (S,B)-инвариантного интеграла, где B — полное локально выпуклое топологическое линейное пространство. Так как ядро K — группа, то если $\underset{K,B}{I}(f)$ — единственный инвариантный (K,B)-интеграл, то искомый (S,B)-интеграл будет $\underset{S,B}{I}(f) = \underset{K,B}{I}(f|_K)$.

Столь же непосредственно переносятся на полугруппы и некоторые результаты из [1]. Как обычно, через $\mathscr{E}(A)$ обозначается группа обратимых элементов коммутативной банаховой алгебры A с единицей, а $\mathscr{E}_1(A)$ — связная компонента единицы в $\mathscr{E}(A)$. Через $\mathrm{Hom}(A)$ будем обозначать группу всех непрерывных гомоморфизмов алгебры A в себя, наделенную сильной операторной топологией. Пусть $g \to T_g$ есть непрерывное представление $G \to \mathrm{Hom}(A)$. Элемент $\chi \in \mathscr{E}(A)$ назовем квазисобственным, если существует представление $t: S \to \mathscr{E}(A)$, такое, что $T_g\chi = t(g).\chi$ для всех $g \in S$. Поскольку $\chi \in \mathscr{E}(A)$, то ясно, что $t(g)$ будет непрерывным.

Лемма 2. *Пусть $t: S \to \mathscr{E}(A)$ — непрерывное представление компактной полугруппы S в мультипликативную группу обратимых элементов коммутативной банаховой алгебры A. Тогда существует такой нормальный набор идемпотентов $p_1, \ldots, p_n$, ($p_i \cdot p_j = 0$, $i \neq j$; $p_1 + \ldots + p_n = 1$) и такой конечный набор полухарактеров μ_i из S^*, что*

$$t(s) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(s) \cdot p_i.$$

Действительно, из $t(S) \subset \mathscr{E}(A)$ следует, что компактная полугруппа $t(S)$ вкладывается в группу, так что в $t(S)$ выполняются законы сокращения. Отсюда следует (см. [4]), что фактически $t(S)$- подгруппа $\mathscr{E}(A)$. Как показано в [1], тогда существует нормальный набор идемпотентов p_i и конечное число одномерных характеров $\lambda_i \in t(\hat{S})$, так что для каждого $g \in t(S)$ имеем $g = \sum \lambda_i(g).\, p_i$. Тогда, если $s \in S$, $t(s) = \sum \lambda_i(t(s)).\, p_i$. Очевидно, $\mu_i(s) = \lambda_i(t(s)) \in S^*$ и $t(s) = \sum \mu_i(s) \cdot p_i$.

Теорема 2. *Пусть S — компактная связная полугруппа с единицей e, такая, что ее ядро K — подгруппа, T — непрерывное представление полугруппы S в группу $\mathrm{Hom}(A)$. Тогда для любого обратимого элемента $f \in A$ существует такой квазисобственный элемент $\chi \in A$ и такой элемент $\varphi \in A$, что $f = \chi.\exp\varphi$.*

Доказательство. (ср. [1]). Поскольку $F(g_1, g_2) = f.T_{g_1 g_2}f.(T_{g_1}f.T_{g_2}f)^{-1} \in \mathscr{E}(C(G \times G, A))$, и $F(e_1, g_2) = F(g_1, e_1) = 1$, то $F(g_1, g_2) \in \mathscr{E}_1(C(G \times G, A))$ так, что снова $F(g_1, g_2) = \exp\psi(g_1, g_2)$, $\psi \in C(G \times G, A)$. Легко видеть, что $\psi(g_1, g_2)$ удовлетворяет условиям

$$\psi(g_1, g_3) + T_{g_1}\psi(g_2, g_3) - \psi(g_1 \cdot g_2, g_3) = 0, \tag{1}$$

$$\psi(g_1, g_2 \cdot g_3) + \psi(g_2, g_3) - \psi(g_1 \cdot g_2, g_3) - \psi(g_1, g_2) = 0. \tag{2}$$

Положим $\varphi = \iint_{K \times K} \psi|_{K \times K}(g_2, g_3)\, dg_2\, dg_3$, и рассматривая (1) только для g_2 и g_3 из K, интегрируя по $dg_2\, dg_3$ на K, получаем $\int_K \psi|_{S \times K}(g_1, g_3) dg_3 =$

$= \varphi - T_{g_1}\varphi$. Аналогично, рассматривая (2) только для g_3 из K и интегрируя по dg_3 получаем

$$\int\limits_K \psi|_{S\times K}(g_1, g_3)\, dg_3 + \int\limits_K \psi|_{S\times K}(g_2, g_3)\, dg_3 - \int\limits_K \varphi|_{S\times K}(g_1\cdot g_2, g_3)\, dg_3 = = \psi(g_1, g_2),$$

откуда

$$\psi(g_1, g_2) = T_{g_1 g_2}\varphi - T_{g_1}\varphi - T_{g_2}\varphi + \varphi.$$

Если положим $\chi = f\,\exp(-\varphi)$, а $t(g) = \chi^{-1}T_g\chi$, то $t(g_1, g_2) = t(g_1), t(g_2)$, так что χ — квазисобственный и $f = \chi\exp\varphi$. Теорема доказана.

Замечание 2. Этот результат можно использовать (как и в [1]) для определения полуинвариантного $(S, \mathscr{E}(A))$-интеграла. Именно, если $f \in C(S, \mathscr{E}(A))$, то $f \in \mathscr{E}(C(S, A))$ и, следовательно, по теореме 2 $f = \chi\cdot\exp\varphi$, где χ — квазисобственный элемент относительно представления $T: S \to \mathrm{Hom}\,(C(S, A))$, осуществляемого сдвигами на элементы из $S: (T_s f)(h) = (t_s f)(h) = f(s\cdot h)$. Тогда из $\chi(s\cdot h) = t(s)\chi(h)$ следует, что $\chi(s) = \chi(e)\cdot t(s)$, где $t(s) \in \mathrm{Hom}\,(S, \mathscr{E}(A))$. Поэтому можно положить

$$I(f) = \chi(e)\exp\int\limits_K \varphi|_K(g)\, dg,$$

где интеграл справа берется по обычной мере Хаара на K.

4. Известно [9], что если G — вполне несвязная компактная группа, то существует даже инвариантный (G, A) — интеграл, где A — локально компактная абелева группа, подчиненная некоторым условиям (исключающим, например, случай, когда A — окружность S^1). Если же на A не накладывать дополнительных условий, то, вообще говоря, не будет существовать и полуинвариантного интеграла.

Теорема 3. *Пусть G вполне несвязная бесконечная группа. Тогда не существует нетривиального полуинвариантного (G, S^1)-интеграла.*

Доказательство. Нетрудно проверить (см., например [10]), что отображение $\chi(f) = \exp(2\pi i\int\limits_G u\,d\mu)$, где $f = \exp 2\pi iu$ — функция из $\mathscr{E}_1(C(G, S^1))$, является изоморфизмом между $\mathrm{Hom}\,(\mathscr{E}_1(C(G, S^1))$ и $M_Z(G)$ — совокупностью всех вещественных мер Радона на G, принимающих целые значения на (локально постоянных) функциях из $C(G, Z)$. Фактически это те вещественные меры Радона на G, которые принимают целые значения на каждой из некоторого конечного набора компонент связности G [10]. Так как G — вполне несвязна, то ее компоненты связности — точки, и для каждого $\chi \in \mathrm{Hom}\,(\mathscr{E}_1(C(G, S^1)))$ будем иметь $\chi(f) = \exp(2\pi i\sum\limits_{i=1}^{k} u(g_i))$, $g_i \in G$.

Поскольку G — бесконечная, найдется такое $b \in G$, что $b g_i \neq g_j$, $i, j = 1, \ldots, k$, тем более существует окрестность единицы V, такая, что $b.g_i \bar{\in} V.g_j$. Возьмем вещественную функцию φ, которая вне всех V. g_i обращается в нуль, а в точках g_i принимает значение $\frac{1}{k+1}$. При этом

$$\psi = \exp(2\pi i\varphi) \in \mathscr{E}_1 C(G_1, S^1)),$$

$$\chi(\psi) = \exp(2\pi i \sum_{i=1}^{k} \varphi(g_i) = \exp(2\pi i \frac{k}{k+1}) \neq 1.$$

Если вычислим теперь $\chi(t_h \psi)$, где $t_h \psi(g) = \psi(g \cdot h)$, то получим

$$\chi(t_h \psi) = \exp(2\pi i \sum_{i=1}^{k} \varphi(hg_i) = \exp 0 = 1.$$

Итак, никакой гомоморфизм из $\mathscr{E}_1(C(G, S^1))$ в S^1, не является инвариантным относительно сдвигов на все $\mathscr{E}_1(C(G, S^1))$, так что полуинвариантный $(C(G, S^1), S^1)$ — интеграл, где G — бесконечная вполне несвязная компактная хаусдорфова группа заведомо не существует.

В заключение автор благодарит Е. А. Горина за постановку задач и за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Горин. Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора-ван-Кампена. «Матем. сб.», 82 (124), 1970, 259—272.

2. В. Я. Лин. Полуинвариантное интегрирование со значениями в группе и некоторые его применения. «Матем. сб.», 82 (124),1970, 233—259.

3. E. R. van Kampen. On almost periodic functions of const. abs. value, J. Lond. Math. Soc. XII, № 1, 1937, 3—6.

4. E. Hewitt, K. A. Ross. Abstract harmonic analisis, v. 1, Berlin, 1963.

5. J. S. Pym. Idempotent measures on semigroups. Pacific J. Math, 1962, v.12, № 2, 685—698.

6. W. G. Rosen. On invariant means over compact semigroups, Proc Am. M. S. 7, 1956, 1076—1082.

7. A. D. Wallace. The structure of topological semigroup, Bull. Am. Math, Soc, 1955 v, 61, № 2, 95—112.

8. А. М. Скряго. О гомотопическом типе некоторых компактных полугрупп. «Матем. заметки», т. 8, вып. 6, 1970, 711—719.

9. K. H. Hoffman. Zerfällung topologischer Gruppen. Math. Z. 84. 1964, 16—37.

10. A. Bernard, N. T. Vavopulos. Groupes de fonctions continuies sur un compact. Applications á l'etude des ensembles de Kroneker, Stud. Math, 1970, 35, № 2, 199—205.

Поступила 21 июня 1971 г.