# АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ЛЕВИТАНА

*М. Г. Любарский*

## Введение

В 1938 г. Б. М. Левитан построил обобщение теории почти-периодических (п.-п.) функций Г. Бора, рассмотрев класс функций, которые впоследствии стали называться почти-периодическими по Левитану ($L$. п.-п.). Теория $L$. п.-п. функций во многом аналогична теории Г. Бора.

Ниже рассматриваются аналитические $L$. п.-п. функции и переносятся на этот класс функций основные теоремы теории аналитических п.-п. функций Г. Бора.

В первом параграфе доказывается эквивалентность двух определений аналитических $L$. п.-п. функций, из которых одно аналогично определению Г. Бора п.-п. функций, а второе — определению С. Бохнера. С этой целью на вещественной оси вводится новая топология, сходимость в которой совпадает со сходимостью по функции, почти-периодической в смысле Б. М. Левитана относительно первого определения. Этот метод принадлежит Б. Я. Левину [2, 6] и В. А. Марченко [7, 8].

Во втором параграфе вводится понятие числового модуля аналитической $L$. п.-п. функции, определенной в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$. Оказывается, что этот модуль совпадает с минимальным числовым модулем, содержащим все числовые модули $M_y$, отвечающие $L$. п.-п. функциям семейства $\{f_y(x) = f(iy + x)\}_{a<y<b}$.

В третьем параграфе доказывается, что класс аналитических $L$. п.-п. функций является замыканием (в некотором смысле) множества всех тригонометрических полиномов.

В четвертом параграфе устанавливаются достаточные условия того, чтобы аналитической $L$. п.-п. функции в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ отвечал ряд Дирихле. Это условие состоит в том, что для любого $y \in (a, b)$ выполнено:

$$\sup_{T>0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(iy + x)|^2 \, dx < +\infty.$$

В пятом параграфе предлагается способ суммирования ряда Дирихле, восстанавливающий функцию, которой этот ряд отвечает. Этот способ аналогичен методу Бохнера — Фейера и заключается в том, что коэффициенты Фурье умножаются на постоянные множители. Эти множители не зависят от восстанавливаемой функции, и лишь конечное число их отлично от нуля. Полученные таким образом тригонометрические полиномы аппроксимируют исходную функцию в том же смысле, что и в третьем параграфе.

И, наконец, в шестом параграфе обобщаются на класс $L$. п.-п. функций две известные из теории п.-п. функций Г. Бора теоремы:

теорема об аналитическом продолжении п.-п. функции, имеющей ограниченный спектр, и теорема о связи между максимальной полосой почти-периодичности аналитической функции и максимальной полосой ее ограниченности.

Автор благодарен Б. Я. Левину, предложившему тему этой работы и оказавшему существенную помощь в ее выполнении.

**§ 1.** Данное Б. М. Левитаном [1] определение $L$. п.-п. функций аналогично определению Г. Бора. Впоследствии Б. Я. Левин [2] дал другое их определение, аналогичное определению С. Бохнера, и доказал эквивалентность этих определений.

Мы не будем здесь повторять эти определения и дадим сразу определение аналитических $L$. п.-п. функций в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. В частности, при $a = b = 0$ эти определения переходят в определения $L$. п.-п. функций на числовой оси.

Назовем число $\tau\{\varepsilon, N\}$ — смещением функции $f(z)$, заданной в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$, если

$$\sup_{|\operatorname{Re} z| \leqslant N} \sup_{a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b} |f(z+\tau) - f(z)| < \varepsilon.$$

Определение 1. *Функция, аналитическая в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ и непрерывная в замкнутой полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$, называется почти-периодической по Левитану в этой замкнутой полосе, если каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ можно поставить в соответствие множество $E_{\varepsilon, N}$, состоящее из $\{\varepsilon, N\}$-смещений и удовлетворяющее следующим свойствам:*

*а) множество $E_{\varepsilon, N}$ относительно плотно и*

*в) $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma_\varepsilon : \sigma < \sigma_\varepsilon \Rightarrow E_{\sigma, N} - E_{\sigma, N} \subset E_{\varepsilon, N}$.*

Пусть $f(z)$ — произвольная функция, заданная в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. Назовем последовательность вещественных чисел $\{\tau_k\}_{k=1, 2, \ldots}$ сходящейся по функции $f(z)$ к нулю ($\tau_k \xrightarrow{f} 0$), если для любого действительного $x$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\operatorname{Re} z = x,\ a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b} |f(z+\tau_k) - f(z)| = 0.$$

Последовательность вещественных чисел назовем условно сходящейся или фундаментальной по функции $f(z)$ ($\tau_k \xrightarrow{f}$), если при любом действительном $x$

$$\lim_{\min\{m, n\}\to 0} \sup_{\operatorname{Re} z = x,\ a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b} |f(z+\tau_m-\tau_n) - f(z)| = 0.$$

Определение 2. *Аналитическая в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ и непрерывная в замкнутой полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$ функция $f(z)$ называется почти-периодической по Левитану в этой замкнутой полосе, если*

*а') из любой последовательности вещественных чисел можно выделить условно сходящуюся по функции $f(z)$ подпоследовательность, и*

*в') $\tau_k' \xrightarrow{f} 0,\ \tau_k'' \xrightarrow{f} 0 \Rightarrow \tau_k' - \tau_k'' \xrightarrow{f} 0$.*

2. Перейдем к доказательству эквивалентности этих определений. Будем исходить из определения 1.

В работе [2] Б. Я. Левин показал, что множества $\{E_{\varepsilon, N}\}_{\varepsilon, N>0}$ обладающие свойствами а) и в), после некоторого прореживания образуют полную систему окрестностей нуля аддитивной группы вещественных чисел. Свойство а), то есть относительная плотность каждого множества, при этом сохраняется. Соответствующая топологическая группа, будем обозначать ее $\Omega$, предкомпактна и метризуема.

Говоря это, мы исключаем из рассмотрения периодические функции, так как в этом случае топология группы $\Omega$ такова, что точки, находящиеся на расстоянии, кратном периоду, сливаются, и между осью и группой $\Omega$ нет взаимно-однозначного соответствия. Сделав это замечание, мы в дальнейшем будем считать, что взаимно-однозначное соответствие есть. Точки оси будем обозначать $x$, $t$, $\tau$, а соответствующие точки группы — $p_x$, $p_t$, $p_\tau$. Любую функцию $\varphi(t)$, заданную на оси, можно рассматривать как функцию на группе $\Omega$, при этом будем писать $\varphi(p_t)$.

Дальнейшие рассуждения проводятся по схеме, примененной Б. Я. Левиным в той же работе [2]. Поэтому мы сохраним нумерацию лемм, заключив соответствующие номера в скобки.

***Лемма 1(4).*** *Семейство функций $\{f_y(x) = f(iy + x)\}_{a<y<b}$ равностепенно непрерывно в каждой точке группы $\Omega$.*

Доказательство. Если точки $\{p_{x+\tau_k}\}_{k=1, 2, \ldots}$ имеют своим пределом точку $P_x$, то по построению топологии группы числа $\{\tau_k\}_{k=1,2,\ldots}$, начиная с некоторого номера $k_\varepsilon$, являются $\{\varepsilon, |x|\}$-смещениями функции $f(z)$ в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. То есть, начиная с номера $k_\varepsilon$, выполняется соотношение

$$\sup_{a<y<b} |f_y(p_{x+\tau_k}) - f_y^{\varepsilon}(p_x)| = \sup_{\operatorname{Re} z = x,\ a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b} |f(z+\tau_k) - f(z)| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Пусть $T$ — пополнение группы $\Omega$. Очевидно, что $T$ компактная группа. Введем обозначение:

$$H = \{h \in T : \exists \tau_k \xrightarrow{f} 0,\ p_{\tau_k} \to h\}.$$

***Лемма 2(5).*** *Множество $H$ совпадает с множеством общих периодов всех функций семейства $\{\boldsymbol{f}_y(p)\}_{a<y<b}$, где функции $\boldsymbol{f}_y(p)$ заданы на всем компакте $T$ равенствами:*

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{f}_y(p) = \varliminf_{p_x \to p} \operatorname{Re} f_y(x);$$

$$\operatorname{Im} \boldsymbol{f}_y(p) = \varliminf_{p_x \to p} \operatorname{Im} f_y(x).$$

Доказательство. Пусть $h \in H$. Лемма 2(5) доказана в работе [2] для случая обычных $L$. п.-п. функций, каковыми, очевидно, являются все функции семейства $\{f_y(x)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$. Воспользуемся этим результатом. Получм, что $h$ является периодом каждой функции семейства $\{f_y(p)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$, то есть их общим периодом.

Обратно, пусть $h$ есть общий период всех функций семейства $\{f_y(p)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$, и пусть $h=\lim\limits_{k\to\infty} p_{\tau_k}$. Нужно доказать, что $\tau_k \xrightarrow{f} 0$. Это и будет означать, что $h\in H$. Итак,

$$\sup_{\operatorname{Re} z = x,\ a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b} |f(z+\tau_k)-f(z)| = \sup_{a\leqslant y\leqslant b} |f_y(x+\tau_k)-f_y(x)| =$$

$$= \sup_{a\leqslant y\leqslant b} |f_y(p_x+p_{\tau_k})-f_y(p_x)| =$$

$$= \sup_{a\leqslant y\leqslant b} |f_y(p_x+p_{\tau_k})-f_y(p_x+h)| \to 0.$$

Последнее выражение стремится к нулю, потому что семейство функций $\{f_y(p)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$ равностепенно непрерывно в точке $p_x$ и, значит, в точке $p_x+h$.

***Лемма 3(6).*** *Множество $H$ образует замкнутую подгруппу группы $T$.*

Доказательство. Обозначим через $H_y$ множество периодов функции $f_y(p)$. Легко видеть, что $H=\bigcap\limits_{a\leqslant y\leqslant b} H_y$. Снова воспользуемся тем, что доказываемая лемма справедлива, как это показано в [2], для $L$. п.-п. функций, определенных на вещественной оси. Таким образом, $H$ есть пересечение континуального множества замкнутых подгрупп. Это означает, что $H$ — замкнутая подгруппа группы $T$. Лемма доказана.

Все функции семейства $\{f_y(p)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$ сохраняют постоянные значения на каждом классе смежности $p+H$ и, следовательно, их можно рассматривать как функции, определенные на фактор-группе $T_f=T/H$. Эта группа может быть метризована следующим способом.

Пусть символ $d(p_1, p_2)$ обозначает расстояние между точками $p_1,\ p_2\in T$. Можно считать, что метрика $d$ инвариантна относительно групповой операции. Действительно, из компактности группы $T$ вытекает, что метрика $d'$, задаваемая равенством:

$$d'(p_1, p_2)=\sup_{p\in T} d(p_1+p,\ p_2+p),$$

эквивалентна метрике $d$. Легко видеть, что новая метрика инвариантна относительно групповой операции.

Пусть $\tilde{p}_1,\ \tilde{p}_2\in T_f$. Введем следующую метрику:

$$\rho(\tilde{p}_1,\ \tilde{p}_2)=\inf_{\substack{p_1\in\tilde{p}_1\\ p_2\in\tilde{p}_2}} d(p_1, p_2).$$

Не трудно убедиться, что эта метрика инвариантна и превращает группу $T_f$ в метрическую.

Так как мы исключили из рассмотрения периодические функции, то ни одна точка группы $\Omega$ кроме точки нуль не может принадлежать множеству $H$. Поэтому группа $T_f$ содержит подгруппу $\{\tilde{p}_t = p_t + H\}_{-\infty<t<+\infty}$. Эту подгруппу вместе с топологией, порожденной топологией группы $T_f$, будем обозначать $\Omega_f$. Очевидно, что семейство функций $\{f_y(p)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $p_t + h$ $(h \in H)$ группы $T$. Пусть теперь дана последовательность точек $\{\tilde{p}_{t_k}\}_{k=1,2,\ldots}$, стремящаяся к $\tilde{p}_{t_0}$ в топологии группы $\Omega_f$. Это означает, что существует подпоследовательность $\{h_k \in H\}_{k=1,2,\ldots}$ такая, что в топологии группы $T$ выполнено

$$p_{t_k} + h_k \to p_{t_0}.$$

Следовательно, равностепенно по $y \in [a, b]$

$$f_y(\tilde{p}_{t_k}) = f_y(p_{t_k} + h_k) \to f_y(p_{t_0}) = f_y(\tilde{p}_{t_0}),$$

Таким образом, семейство функций $\{f_y(\tilde{p}_t)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$ равностепенно непрерывно в каждой точке группы $\Omega_f$. Отсюда, если последовательность точек $\{\tilde{p}_{\tau_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ сходится к нулю на $\Omega_f$, то

$$\sup_{a\leqslant y\leqslant b} |f_y(\tilde{p}_t + \tilde{p}_{\tau_k}) - f_y(\tilde{p}_t)| \to 0$$

и, следовательно, $\tau_k \xrightarrow{f} 0$.

Пусть, наоборот, дано, что $\tau_k \xrightarrow{f} 0$. Рассмотрим множество точек $\{p_{\tau_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ на группе $T$. Так как все предельные точки этой последовательности принадлежат множеству $H$, то в силу компактности $T$, вне любой окрестности $H$ может существовать лишь конечное число точек последовательности. Иначе говоря, на группе $\Omega_f$ имеет место $\tilde{p}_{\tau_k} \to 0$.

*Итак, мы можем сделать вывод: сходимость на группе* $\Omega_f$ *эквивалентна сходимости по функции* $f(z)$ *в полосе* $\{z : a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. Отсюда, конечно, следует, что соответствующие условные сходимости также эквивалентны. Так как группа предкомпактна, и групповая операция непрерывна в ее топологии, то условия $a'$) и $b'$) второго определения аналитической $L$. п.-п. функции выполнены.

Таким образом, функции, удовлетворяющие первому определению, удовлетворяют также и второму. Доказательство обратного дословно совпадает с доказательством аналогичного факта для $L$. п.-п. функций на оси, проведенным в [2].

Отметим еще одно свойство топологии группы $\Omega_f$, вытекающее из того факта, что сходимости на группе $\Omega_f$ и по функции $f(z)$ эквивалентны. А именно: тождественное отображение $x \to \tilde{p}_x$ является непрерывным. Действительно, пусть последовательность вещественных чисел $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ стремится к $x_0$, тогда в нашей полосе $x_k \xrightarrow{f} x_0$ и, значит, $\tilde{p}_{x_k} \to \tilde{p}_{x_0}$.

§ 2. Определение 3. *Назовем боровской компактификацией оси предкомпактную метрическую группу* $\Omega$, *изоморфную адди-*

*тивной группе вещественных чисел, и такую, что отображение $x \to p_x$, осуществляющее изоморфизм, непрерывно.*

Примером боровской компактификации оси может служить группа $\Omega_f$, построенная в предыдущем параграфе.

В дальнейшем инвариантную метрику группы $\Omega$ будем обозначать символом $\rho(p_{t_1}, p_{t_2})$. Такая метрика может быть получена стандартным приемом из произвольной, как мы это делали в § 1.

Определение 4. *Последовательность действительных чисел $\{\tau_k\}_{k=1,2,\dots}$ мы назовем сходящейся к числу $\tau_0$ на счетном числовом модуле $M$ $(\tau_k \xrightarrow{M} \tau_0)$ если для каждого $\Lambda \in M$*

$$\lim_{k\to\infty} R[\Lambda(\tau_k - \tau_0)] = 0,$$

*где $R[u]$ — расстояние точки $u$ от множества $\{2k\pi\}_{k=0,\pm 1,\dots}$*

**Теорема 1.*** *Каждой боровской компактификации оси $\Omega$ можно единственным образом сопоставить счетный числовой модуль, сходимость на котором эквивалентна сходимости в топологии группы $\Omega$.*

*Обратно, каждому счетному числовому модулю $M$ можно в том же смысле сопоставить боровскую компактификацию оси $\Omega_M$.*

Доказательство. Пусть $\Omega$ — боровская компактификация оси. Рассмотрим функцию

$$\varphi(p_t) = \rho(0, p_t).$$

Порождаемая ею на оси функция

$$\varphi(t) = \varphi(p_t)$$

непрерывна как суперпозиция двух непрерывных функций.

Пусть задана последовательность функций $\{\varphi(t + \tau_k)\}_{k=1,2,\dots}$. Из множества точек $\{p_{\tau_k}\}_{k=1,2,\dots}$ выберем в силу предкомпактности группы $\Omega$ фундаментальную подпоследовательность $\{p_{\tau'_k}\}_{k=1,2,\dots}$. Из равномерной непрерывности функции $\varphi(p_t)$ вытекает, что последовательность функций $\{\varphi(t + \tau'_k) = \varphi(p_t + p_{\tau'_k})\}_{k=1,2,\dots}$ фундаментальна в равномерной метрике.

Таким образом, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет критерию Бохнера (см., например, [3], стр. 23) и, следовательно, является почти-периодической.

Функции $\varphi(t)$ можно сопоставить наименьший числовой модуль $M$, содержащий все ее показатели Фурье. Очевидно, модуль $M$ счетен.

Из теорем Бора о связи между показателями Фурье и почти-периодами [3], стр. 104 вытекает, что сходимость на модуле $M$ совпадает со сходимостью по функции $\varphi(t)$ и, значит, со сходимостью в топологии группы $\Omega$.

---

* Теорема 1 в неявном виде содержится в работе [2].

Первое утверждение теоремы доказано. Зададимся теперь произвольным счетным числовым модулем $M$ и рассмотрим какую-нибудь почти-периодическую функцию, которой он отвечает. Например,

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e^{i\lambda_k t} \left(\overset{\infty}{\underset{k=1}{U}} \lambda_k = M\right).$$

Из теорем Бора, которые мы только что упоминали, вытекает, что сходимость на модуле $M$ эквивалентна сходимости по функции $\psi(t)$. Как мы показали в § 1 функции $\psi(t)$ отвечает боровская компактификация оси, сходимость в топологии которой совпадает со сходимостью по функции $\psi(t)$.

Установленное соответствие между счетными числовыми модулями и боровскими компактификациями оси является взаимно-однозначным, так как полное описание всех сходящихся последовательностей задает однозначно как топологию метрического пространства, так и числовой модуль. Теорема полностью доказана.

*Теперь мы каждой аналитической L. п.-п. функции можем сопоставить счетный числовой модуль, сходимость по которому эквивалентна сходимости в топологии группы $\Omega_f$ и, значит, сходимости по функции $f(z)$ в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$.*

**Теорема 2.** *Если аналитическая в полосе $\{z: a<\operatorname{Im} z<b\}$ и непрерывная в замкнутой полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Jm} z \leqslant b\}$ функция $f(z)$ такова, что семейство функций*

$$\{f_y(p_x)=f(iy+x)\}_{a \leqslant y \leqslant b} \qquad (*)$$

*равностепенно непрерывно в каждой точке некоторой боровской компактификации оси $\Omega_M$, то $f(z)$ — аналитическая L. п.-п. функция в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$ с* числовым *модулем, принадлежащим модулю $M$.*

*Обратно, если $f(z)$ — аналитическая L. п.-п. функция в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$, и ее числовой модуль принадлежит модулю $M$, то семейство (*) равностепенно непрерывно в каждой точке $\Omega_M$.*

Доказательство. Пусть семейство (*) равностепенно непрерывно в каждой точке $\Omega_M$. Мы уже доказали в § 1, не формулируя этого результата, что если семейство (1), отвечающее аналитической функции $f(z)$, равностепенно непрерывно на некоторой, не обязательно боровской, компактификации оси, то $f(z)$ есть аналитическая $L$. п.-п. функция. Напомним основные моменты доказательства этого факта. Из лемы 2(5) и 3(6) следует, что множество $\{h: \exists \tau_k \xrightarrow{f} 0,\ p_{\tau_k} \to h\}$ есть замкнутая подгруппа группы $T_M=\overline{\Omega}_M$. Далее, группа $\{p_t+H\}_{-\infty<t<+\infty}=\Omega_f$ является боровской компактификацией оси, сходимость в топологии которой эквивалентна сходимость по функции $f(z)$ в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. Следовательно, выполнены условия определения 2, и значит, $f(z)$ — аналитическая $L$. п.-п. функция в этой полосе.

Кроме того, из сходимости последовательности чисел на модуле $M$ вытекает сходимость ее в топологии группы $\Omega_f$ и, значит, на модуле функции $f(z)$. Таким образом, $M_f \subset M$.

Предположим теперь, что $f(z)$ — аналитическая $L$. п.-п. функция в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$ и $M_f \subset M$. Тогда из сходимости последовательности чисел на модуле $M$ вытекает ее сходимость по модулю $M_f$ или, что то же самое, сходимость по функции $f(z)$ в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. А это и означает, что семейство (*) равностепенно непрерывно в каждой точке $\Omega_M$.

*Замечание.* Теорема, подобная теореме 2, может быть сформулирована для аналитических п.-п. функций Г. Бора. В этом случае нужно требовать не только равностепенную непрерывность, но и равностепенную равномерную непрерывность семейства функций (*).

Пример аналитической $L$. п.-п. функции.

Функция $f(z) = 2 + e^{i\lambda z} + e^{i\mu z}$, где $\lambda$ и $\mu$ положительны и несоизмеримы, есть аналитическая п.-п. функция. К ней можно применить последнее замечание. Кроме того, в полосе $\{z: 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$ эта функция не обращается в нуль. С помощью теоремы 2 легко установить, что функция $[f(z)]^{-1}$ является аналитической $L$ п.-п. функцией в указанной выше полосе.

На вещественной оси функция $[f(z)]^{-1}$ принимает сколь угодно большие по модулю значения и, следовательно, не может быть аналитической п.-п. функцией Г. Бора в рассматриваемой полосе.

**Теорема 3.** *Пусть $f(z)$ — аналитическая $L$. п.-п. функция в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$. Тогда если последовательность вещественных чисел $\{\tau_k\}_{k=1, 2, \dots}$ сходится к нулю по каждой функции из семейства $\{f_y(x)\}_{a \leqslant y \leqslant b}$, то эта последовательность сходится к нулю по функции $f(z)$ в полосе $\{z: a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$.*

Доказательство. Предположим, что для всех функций семейства $\{f_y(x)\}_{a \leqslant y \leqslant b}$ последовательность чисел сходится к нулю: $\tau_k \xrightarrow{f_y} 0$.

Пусть существует подпоследовательность $\{\tau_k'\}_{k=1, 2, \dots}$ такая, что $p_{\tau'_k} \to h$. Как мы уже отмечали, в этом случае $h$ есть период нижнего доопределения на группу $T_f$ каждой функции из нашего семейства. Но в группе $T_f$ нет по определению общих периодов для всех функций семейства $\{\boldsymbol{f}_y(p)\}_{a \leqslant y \leqslant b}$. Следовательно, все предельные точки последовательности $\{p_{\tau_k}\}_{k=1, 2, \dots}$ совпадают с нулем. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что $M_y$ — числовой модуль $L$. п.-п. функции $f_y(x)$ при любом $y \in [a, b]$ принадлежит модулю $M_f$. Из теоремы 3 следует, что модуль $M_f$ — минимальный числовой модуль, содержащий все модули $M_y$ при $y \in [a, b]$. Иначе говоря, $M_f = \bigcup\limits_{a \leqslant y \leqslant b} M_y$.

В заключение параграфа отметим, что можно несколько расширить понятие аналитической $L$. п.-п. функции, рассматривая аналитические функции в открытой полосе.

Определение 5. *Функция $f(z)$, аналитическая в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$, называется почти-периодической по Левитану в этой полосе, если в любой внутренней полосе $\{z: a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta;\ \delta > 0\}$ функция $f(z)$ — аналитическая L. п.-п. функция.*

Аналитической $L$. п.-п. функции в открытой полосе также можно сопоставить счетный числовой модуль. *Если $M_\delta$ — модуль функции $f(z)$ в полосе $\{z: a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta\}$, то под модулем функции $f(z)$ в открытой полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ будем понимать объединение всех модулей $M_\delta: M_f = \bigcup_{\delta > 0} M_\delta$.* Счетность этого модуля следует из того факта, что при $\delta_1 < \delta_2\ M_{\delta_2} \subset M_{\delta_1}$.

Интересно отметить, что в рассуждениях §§ 1 и 2 мы не пользовались аналитичностью функции $f(z)$.

**§ 3. Теорема 4** (*аппроксимации*). *Для того чтобы аналитическая в открытой полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ функция $f(z)$ была почти-периодической по Левитану в этой полосе с числовым модулем, принадлежащим модулю $M$, необходимо и достаточно, чтобы каждой точке $P_x \subset \Omega_M$ и произвольным числам $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно было сопоставить тригонометрический полином $P(z)$ с показателями из $M$ и некоторую окрестность нуля $U \subset \Omega_M$ такие, что*

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \ \sup_{p \in U + p_x} |f_y(p) - P_y(p)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть условие (1) выполнено. Покажем что при любом $\delta > 0$ семейство функций $\{f_y(p_x)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$ равностепенно непрерывно в каждой точке группы $\Omega_M$, после чего сошлемся на теорему 2 § 2.

Из замечания к теореме 2 § 2 следует, что семейство функций $\{P_y(p_x)\}_{a \leqslant y \leqslant b}$ равностепенно непрерывно в каждой точке группы $\Omega_M$. Зададимся некоторой точкой $p_x \in \Omega_M$. Пусть $V \subset \Omega_M$ — такая окрестность нуля, что

$$\sup_{a \leqslant y \leqslant b} \ \operatorname*{osc}_{p_x + V} P_y(p) < \varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (1) следует

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} \ \operatorname*{osc}_{p_x + V \cap U} f_y(p) < 3\varepsilon.$$

Достаточность условия теоремы доказана. Перейдем к доказательству его необходимости. Для этого нам понадобится следующий хорошо известный факт (см., например, [4], стр. 280).

Пусть $D$ — односвязная область в комплексной плоскости и $\{\lambda_k\}_{k=1,2,\ldots}$ — последовательность чисел, имеющая предельную точку. Тогда любую аналитическую в $D$ функцию можно сколь угодно точно на каждом внутреннем компакте равномерно аппроксимировать конечными линейными комбинациями функций

$$\{e^{i\lambda_k z}\}_{k=1,2,\ldots}$$

Предположим, что $f(z)$ — аналитическая $L$. п.-п. функция в полосе $\{z: a < \operatorname{Im} z < b\}$ с числовым модулем, принадлежащим модулю $M$. Как всегда предполагаем, что $f(z)$ — непериодическая функция. В этом случае, как легко проверить, числовой модуль функции $f(z)$, следовательно, и модуль $M$, его содержащий, плотны на оси. Поэтому мы можем выбрать из модуля $M$ последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1,2,\ldots}$, имеющую предельную точку.

Зададимся произвольными $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $p_x \in \Omega_M$. На отрезке $\{z : \operatorname{Re} z = x,\ a + \delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b - \delta\}$ приблизим функцию $f(z)$ линейной комбинацией функций из системы $\{e^{i\lambda_k z}\}_{k=1,2,\ldots}$ с точностью до $\varepsilon$. Обозначим эту линейную комбинацию $P(z)$, так как это и есть наш искомый тригонометрический полином. Действительно, по построению показатели $P(z)$ принадлежат $M$, и выполняется неравенство

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} |f_y(p_x) - P_y(p_x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Учтем, что семейство $\{f_y(p)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$, как и семейство $\{P_y(p)\}_{a \leqslant y \leqslant b}$, равностепенно непрерывно в точке $p_x$. Поэтому существует такая окрестность $p_x + U$, на которой неравенство (2) сохраняется. Теорема доказана.

Теорему аппроксимации можно сформулировать так, чтобы не пользоваться понятием боровской компактификации оси.

**Теорема 5.** *Для того чтобы аналитическая в открытой полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ функция $f(z)$ была почти-периодической по Левитану в этой полосе с числовым модулем, принадлежащим модулю $M$, необходимо и достаточно, чтобы каждой тройке чисел $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $x$ $(-\infty < x < +\infty)$ можно было сопоставить тригонометрический полином $P(z)$ с показателями из $M$ и число $\sigma > 0$, такие что*

$$\sup_{\substack{a+\delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b-\delta \\ \operatorname{Re} z = x}} |f(z+\tau) - P(z+\tau)| < \varepsilon, \tag{1'}$$

*где $\tau$ любое $\sigma$-смещение полинома $P(z)$ в полосе $\{z : a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$.*

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости условия теоремы. Пусть в рассматриваемой полосе $f(z)$ — аналитическая $L$. п.-п. функция с числовым модулем, принадлежащим модулю $M$. По теореме 4 произвольному $\varepsilon > 0$ отвечают тригонометрический полином $P(z)$ и окрестность нуля $U$, удовлетворяющие условию (1). Для того чтобы выполнялось условие (1'), достаточно показать, что существует такое $\sigma > 0$, что любое $\sigma$-смещение полинома $P(z)$ в полосе $\{z : a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$, рассматриваемое как точка группы $\Omega_M$, принадлежит окрестности $U$. Для этого придется несколько усложнить построение аппроксимирующего полинома.

Так как сходимость в топологии группы $\Omega_M$ эквивалентна сходимости на модуле $M$, то можно указать такой конечный набор элементов модуля $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{n}$ и число $\Theta > 0$, что любое вещественное $\tau$, удовлетворяющее неравенствам

$$|\Lambda_k \tau| < \Theta \,(\operatorname{mod} 2\pi)\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

при отображении $x \to p_x$ попадает в окрестность $U$.

Обозначим $\hat{p}(z)=\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k z}$. Причем коэффициенты $c_k$ выберем настолько малыми, чтобы во-первых:

$$\sup_{a+\delta\leqslant y\leqslant b-\delta}\ \sup_{p\in p_x+U}|f_y(p)-P_y(p)-\hat{P}_y(p)|<2\varepsilon,$$

а во-вторых: среди показателей полинома $P_1(z)=P(z)+\hat{P}(z)$ находились все числа $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{n}$. Другими словами, чтобы коэффициенты при членах $e^{i\Lambda_k z}$ в полиномах $P(z)$ и $\hat{P}(z)$ не сокращались.

Таким образом, если $p_\tau\in U$, то

$$\sup_{\substack{a+\delta\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b-\delta\\ \operatorname{Re} z=x}}|f(z+\tau)-P_1(z+\tau)|<2\varepsilon.$$

По известной теореме (см., например, [3], стр. 104) существует такое число $\sigma>0$, что любое $\sigma$-смещение полинома $P_1(z)$ удовлетворяет системе неравенств (3) и, следовательно, при отображении $x\to p_x$ попадает в окрестность $U$.

Необходимость условия (1′) доказана. Для доказательства его достаточности заметим, что множество $\sigma$-смещений полинома $P_1(z)$ в полосе $\{z:a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b\}$ образуют в топологии группы $\Omega_M$ некоторую окрестность нуля. Действительно, если $\tau$ является $\sigma$-смещением полинома $P_1(z)$ в нашей полосе, то из равностепенной непрерывности в топологии группы $\Omega_M$ семейства функций $\{P_{1y}(p_x)\}_{a\leqslant y\leqslant b}$ вытекает, что существует окрестность нуля $V$, такая что открытое множество $p_\tau+V$ состоит исключительно из $\sigma$-смещений полинома $P_1(z)$ в полосе $\{z:a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b\}$.

Таким образом, выполнено условие (1) теоремы 4. Следовательно, функция $f(z)$ является почти-периодической по Левитану в рассматриваемой полосе, и отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю $M$.

Теорема полностью доказана.

*Замечание.* Оказывается, что аппроксимирующий тригонометрический полином можно подобрать так, что неравенство (1′) будет выполняться не только при $\operatorname{Re} z=x$, но и при $|\operatorname{Re} z|\leqslant N$, где число $N>0$ задано наперед. Более подробно, имеет место следующая теорема.

**Теорема 6.** *Если $f(z)$ — аналитическая L. п.-п. функция в полосе $\{z:a<\operatorname{Im} z<b\}$ с числовым модулем, принадлежащим модулю $M$, то каждой тройке чисел $\varepsilon>0$, $\delta>0$ и $N>0$ можно поставить в соответствие тригонометрический полином $P(z)$ с показателями из $M$ и число $\sigma>0$, такие что*

$$\sup_{\substack{a+\delta\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b-\delta,\\ |\operatorname{Re} z|\leqslant N}}|f(z+\tau)-P(z+\tau)|<\varepsilon,$$

*где $\tau$ любое $\sigma$-смещение полинома $P(z)$ в полосе $\{z:a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b\}$.*

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство необходимости условий предыдущих двух теорем. Единственным отличием является то, что в качестве полинома $P(z)$, удовлетворяющего в тех случаях неравенству (2), нужно выбрать полином, для которого выполнено

$$\sup_{\substack{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta,\\ |x| \leqslant N}} |f_y(p_x) - P_y(p_x)| < \varepsilon.$$

Последнее возможно в силу полноты множества функций $\{e^{i\lambda_k z}\}_{k=1,2,\ldots}$, о которой мы уже упоминали.

§ 4. Пусть $f(t)$ — $L$. п.-п. функция, заданная на оси, или, что то же самое, на группе $\Omega_t$. Функцию $\hat{f}(p)$, удовлетворяющую неравенствам

$$\varliminf_{p_t \to p} f(t) \leqslant \hat{f}(p) \leqslant \varlimsup_{p_t \to p} f(t) \ (p \in T_f),$$

будем называть пространственным расширением функции $f(t)$.

На группе $T_f$ можно построить (см. [2]) инвариантную меру и по ней обычным образом определить интеграл Лебега, который также будет инвариантен относительно групповой операции.

В работе [2] показано, что $L$. п.-п. функции, имеющей суммируемое (в смысле введенного таким образом интеграла) пространственное расширение, можно сопоставить ряд Фурье. Оказывается, вообще говоря, что $L$. п.-п. функция может иметь несколько суммируемых расширений. Соответственно этому ей может отвечать несколько различных рядов Фурье. Однако теорема единственности для класса $L$. п.-п. функций сохраняется. Если хотя бы один из рядов, отвечающих $L$. п.-п. функции $f(t)$, равен нулю, то и сама функция — тождественный нуль.

Мы покажем в этом параграфе, что для аналитической $L$. п.-п. функции при некоторых условиях верен следующий факт.

Для каждой функции из семейства $\{f_y(x) = f(iy + x)\}_{a<y<b}$ среди отвечающих ей рядов Фурье $f_y(x) \sim \sum\limits_{(k)} a_k(y) e^{i\lambda_k x}$ можно выбрать ряд так, что

$$f_y(x) \sim \sum_{(k)} a_k e^{-\lambda_k y} e^{i\lambda_k x} = \sum_{(k)} a_k e^{i\lambda_k z},$$

где $a_k$ — некоторые числа, не зависящие от $y$.

В этом случае будем говорить, что аналитической $L$. п.-п. функции $f(z)$ отвечает ряд Дирихле: $f(z) \sim \sum\limits_{(k)} a_k e^{i\lambda_k z}$.

**Теорема 7.** *Пусть $f(z)$ — аналитическая $L$. п.-п. функция в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$, и для любого $y \in (a, b)$ выполнено*

$$\sup_{T>0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(iy + x)|^2 \, dx < +\infty.$$

*Тогда функции $f(z)$ отвечает по крайней мере один ряд Дирихле.*

Отсюда, в частности, следует, что модули $M_y$ $L$. п.-п. функций из семейства $\{f_y(x)\}_{a<y<b}$ совпадают, так как (см. [2], теорема 8) они однозначно определяются показателями ряда Фурье.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

**Лемма 4.** *Пусть* $f(t)$ — $L$. *п.-п. функция на оси, такая что*

$$\sup_{T>0}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt<+\infty,$$

*и* $M$ — *числовой модуль, содержащий числовой модуль* $M_f$. *Тогда, если стремящаяся к бесконечности последовательность положительных чисел* $\{T_k\}_{k=1,2,\ldots}$ *такова, что существует предел*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2T_k}\int_{-T_k}^{T_k}f(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=a_\lambda$$

*для всех* $\lambda\in M$*, *то у функции* $f(t)$ *есть пространственное расширение на группу* $T_M$, *которому отвечает ряд Фурье* $\sum\limits_{\lambda\in M}a_\lambda e^{i\lambda t}$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что ряд $\sum\limits_{\lambda\in M}|a_\lambda|^2$ при наших условиях сходится. Для этого рассмотрим тождество

$$\Big|f(t)-\sum_{j=0}^{m}a_j e^{i\lambda_j t}\Big|^2=|f(t)|^2-f(t)\cdot\sum_{j=0}^{m}\bar{a}_j e^{-i\lambda_j t}-$$
$$-\overline{f(t)}\cdot\sum_{j=0}^{m}a_j e^{i\lambda_j t}+\sum_{j=0}^{m}a_j e^{i\lambda_j t}\cdot\sum_{j=0}^{m}\bar{a}_j e^{-i\lambda_j t}.$$

Левая часть тождества неотрицательна. Проинтегрируем тождество от $-T_k$ до $T_k$ и разделим на $2T_k$. Устремляя к бесконечности индекс $k$, получим

$$0\leqslant\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt-\sum_{j=0}^{m}|a_j|^2.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^{m}|a_j|^2\leqslant\sup_{T>0}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt. \qquad (*')$$

---

* Легко видеть, что из условий леммы вытекает существование последовательности $\{T_k\}_{k=1,2,\ldots}$ с такими свойствами. Одна из таких последовательностей будет построена при доказательстве теоремы 7.

Далее, пусть

$$\varphi_\delta(p)=\begin{cases}\omega_\delta\left[1-\frac{\rho(p,0)}{\delta}\right]; & \rho(p,0)<\delta\\ 0 & ;\ \rho(p,0)\geqslant\delta\end{cases}\quad(p\in T_M).$$

Константа $\omega_\delta$ выбрана так, что $\int\varphi_\delta(p)\,dp=1$.

Здесь и далее интеграл берется по всей группе $T_M$. Образуем свёртку

$$\psi_\delta(p)=\int\varphi_\delta(p+s)\,\varphi_\delta(s)\,ds.$$

Функция $\psi_\delta(p)$ представима своим абсолютно сходящимся рядом Фурье: $\psi_\delta(p)=\sum\limits_{(k)}c_k^\delta\chi_{\lambda_k}(p)$,

где $\chi_{\lambda_k}$ — пространственное расширение функции $e^{i\lambda_k t}$ на группу $T_M$. Действительно, легко видеть, что $c_k^\delta=|d_k^\delta|^2$, где $d_k^\delta$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi_\delta(p)$. Ряд сходится в силу неравенства Бесселя для этой функции.

Носителем функции $\psi_\delta(p)$, очевидно, является замкнутый шар радиуса $2\delta$. Кроме того, $\lim\limits_{\delta\to0}c_k^\delta=1$. Это следует из того, что

$$|1-d_k^\delta|=\left|\int\varphi_\delta(p)\,dp-\int\varphi_\delta(p)\,\overline{\chi_{\lambda_k}(p)}\,dp\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\varphi_\delta(p)\,|1-\overline{\chi_{\lambda_k}(p)}|\,dp\to0.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $\delta\to0$ в силу непрерывности характера $\chi_{\lambda_k}(p)$ в нуле группы $T_M$.

Наконец, рассмотрим функцию

$$D^\delta(p)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2T_k}\int\limits_{-T_k}^{T_k}f(t)\,\psi_\delta(p-p_t)\,dt\ (p\in T_M).$$

Для доказательства существования предела при каждом $p\in T_M$ аппроксимируем функцию $\psi_\delta(p)$ с точностью до $\varepsilon>0$ отрезком ее ряда Фурье $P_{\varepsilon,\delta}(p)$. Тогда выполняется

$$\left|\frac{1}{2T_k}\int\limits_{-T_k}^{T_k}f(t)\cdot\psi_\delta(p-p_t)\,dt-\frac{1}{2T_k}\int\limits_{-T_k}^{T_k}f(t)\,P_{\varepsilon,\delta}(p-p_t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2T_k}\int\limits_{-T_k}^{T_k}|f(t)|\,|\psi_\delta(p-p_t)-P_{\varepsilon,\delta}(p-p_t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\frac{1}{2T_k}\int\limits_{-T_k}^{T_k}|f(t)|\,dt\leqslant\varepsilon\left[1+\sup_{T>0}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt\right].$$

Из предположений теоремы следует, что выражение в квадратных скобках конечно.

*Таким образом,* функция $D^{\delta}(p)$ существует и является непрерывной в каждой точке $p \in T_M$. Найдем коэффициенты Фурье этой функции:

$$\int \left[\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} f(t) \cdot \psi_\delta(p - p_t)\, dt\right] \overline{\chi_{\lambda_k}(p)}\, dp =$$

$$= \int \psi_\delta(p - p_t)\, \overline{\chi_{\lambda_k}(p - p_t)}\, dp \times$$

$$\times \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} f(t)\, e^{-i\lambda_k t} dt = c_k^{\delta} \cdot a_k.$$

Из неравенства $(*')$ следует, что ряд $\sum\limits_{(k)} c_k^{\delta} a_k \chi^{\lambda}{}_k(p)$ сходится абсолютно и, значит,

$$D^{\delta}(p) = \sum_{(k)} c_k^{\delta} a_k \chi_{\lambda_k}(p) \quad (p \in T_M); \quad D^{\delta}(p) \in L_2(T_M).$$

Мы уже показали, что $\sum\limits_{(k)} |a_k|^2 < +\infty$. Из этого следует, что существует функция $\hat{f}(p) \in L_2(T_M)$, которой отвечает ряд Фурье $\sum\limits_{(k)} a_k \chi_{\lambda_k}(p)$. Из равенства Парсеваля, справедливого для функций, принадлежащих $L_2(T_M)$, следует

$$\int |\hat{f}(p) - D^{\delta}(p)|^2\, dp = \sum_{(k)} |a_k|^2\, |c_k^{\delta} - 1|^2.$$

Так как $\lim\limits_{\delta\to\infty} c_k^{\delta} = 1$, то семейство функций $\{D^{\delta}(p)\}_{\delta>0}$ сходится по норме $L_2(T_M)$ к функции $\hat{f}(p)$. *По известной теореме* можно выделить подпоследовательность $\{\delta_k\}_{k=1,2,\dots}$, стремящуюся к нулю и такую, что

$$\lim_{k\to\infty} D^{\delta_k}(p)^{п.\,в.} = \hat{f}(p).$$

Из очевидного неравенства

$$\inf_s f(s) \leqslant D^{\delta}(p) \leqslant \sup_s f(s) \quad (\rho(p, s) < 2\delta)$$

следует, что функция $\hat{f}(p)$ там, где равенство выполнено, определена как пространственное расширение функции $f(t)$. Остается только соответствующим образом доопределить функцию $\hat{f}(p)$ на множестве меры нуль, что не отразится на ее ряде Фурье.

Перейдем к доказательству теоремы о существовании ряда Дирихле.

Пусть $y_0$ — заранее выделенное, а $y$ — произвольное число из интервала $(a, b)$. И пусть $G$ — относительно плотное множество $\{\varepsilon, N\}$ — смещений функции $f(z)$ в полосе $\{z: a+\delta \leqslant \operatorname{Jm} z \leqslant b-\delta\}$ такое, что $\tau \in G \Rightarrow -\tau \in G$, где $\delta > 0$ выбрано так, что отрезок $[a+\delta, b-\delta]$ содержит обе точки $y$ и $y_0$. Это требование можно удовлетворить с помощью условия в) определения 1. Действительно, выберем в качестве $G$ множество $E_{\sigma, N} - E_{\sigma, N}$.

Из построенного таким образом множества выделим диагональным процессом Кантора последовательность положительных стремящихся к бесконечности чисел $\{T_k\}_{k=1, 2, \ldots}$ таких, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} f_{y_0}(t)\, e^{-i\lambda t} dt$$

существует для всех $\lambda \in M_f$.

Рассмотрим интеграл от функции $f(z)\, e^{-i\lambda z}$ по контуру, образуемому сторонами прямоугольника $\{z: |\operatorname{Re} z| \leqslant T_k, \ \operatorname{Im} z \in [y, y_0]\}$. По теореме Коши он равен нулю. Интегралы по боковым сторонам ограничены при всех значениях $k$ одной и той же константой. Действительно,

$$\sup_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta} |f(iy + T_k) - f(iy)| < \varepsilon.$$

Таким образом, если мы разделим интеграл по нашему контуру на $2T_k$ и перейдем к пределу по $k$, то получим

$$e^{\lambda y_0} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} f_{y_0}(t)\, e^{-i\lambda t} dt = e^{\lambda y} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2T_k} \int_{-T_k}^{T_k} f_y(t)\, e^{-i\lambda t} dt.$$

Из этого равенства и леммы следует, что функции $f(z)$ отвечает ряд Дирихле.

**§ 5.** Для дальнейшего нам понадобится следующая теорема, аналогичная хорошо известной из теории п.-п. функций Г. Бора теореме об одновременной аппроксимации семейства равномерно ограниченных, равностепенно непрерывных и равностепенно п.-п. функций.

**Теорема 8.** *Пусть $\{f_\alpha(t)\}_{\alpha \in A}$ — семейство равностепенно непрерывных функций в топологии боровской компактификации оси $\Omega_M$. Пусть кроме того каждой функции семейства отвечает ряд Фурье:*

$$f_\alpha(t) \sim \sum_{(k)} a_{\alpha, k} e^{i\lambda_k t} \quad (\alpha \in A).$$

*Тогда, если множество коэффициентов Фурье ограничено* $(\sup\limits_{\alpha \in A} \sup\limits_{k=1, 2, \ldots} |a_{\alpha, k}| < +\infty)$, *то существует зависящая от параметра $\sigma > 0$ последовательность чисел $\{c_k^\sigma\}_{k=1, 2, \ldots}$ такая, что любым $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ отвечают $\sigma$, $m_\sigma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$|f_\alpha(t+\tau)-\sum_{k=1}^{m_\sigma} c_k^\sigma a_{\alpha,\,k} e^{i\lambda_k(t+\tau)}|<\varepsilon \text{ при } |t|\leqslant N,$$

*где* $\tau$ — *любое* $\left\{\delta,\ \frac{1}{\delta}\right\}$ — *смещение для всех функций семейства.*

Доказательство. Пусть $\psi_\sigma(p)$ — та же функция, которую мы использовали при доказательстве леммы 4. Как мы уже доказали, функцию $\psi_\sigma(p)$ можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда Фурье:

$$\psi_\sigma(p)=\sum_{(k)} c_k^\sigma \chi_{\lambda_k}(p)\quad (p\in T_M).$$

Легко проверить, что если $\hat{f}_\alpha(p)$ — суммируемое пространное расширение функции $f_\alpha(t)$, и $a_{\alpha,\,k}$ — соответствующие этому расширению коэффициенты Фурье, то выполняется равенство

$$\int \hat{f}_\alpha(p+s)\,\psi_\sigma(s)\,ds=\sum_{(k)} a_{\alpha,\,k} c_k^\sigma \chi_{\lambda_k}(p)\quad (p\in T_M).$$

Действительно, в обеих частях равенства стоят непрерывные функции, имеющие один и тот же ряд Фурье.

Далее, выберем параметр $\sigma>0$ так, что колебание любой функции семейства $\{f_\alpha(p_t)\}_{\alpha\in A}$ в $\sigma$-окрестности любой точки множества $\{p_t:|t|\leqslant N\}$ не превосходит $\varepsilon/2$.

Имеем

$$\left|f_\alpha(p_t)-\int \hat{f}_\alpha(s+p_t)\,\psi_\sigma(s)\,ds\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int|f_\alpha(p_t)-\hat{f}_\alpha(s+p_t)|\cdot\psi_\sigma(s)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant \operatorname*{osc}_{\rho(s,p_t)<2\sigma}\hat{f}_\alpha(s)=\operatorname*{osc}_{\rho(s_t,\,p_t)<2\sigma} f_\alpha(s_t)<\varepsilon/2 \text{ при } |t|\leqslant N.$$

С другой стороны, для всех $\alpha\in A$ существует число $m_\sigma$ такое, что

$$|\sum_{k=1}^{m_\sigma} a_{\alpha,\,k}c_k^\sigma\chi_{\lambda_k}(p)-\sum_{(k)} a_{\alpha,\,k}c_k^\sigma\chi_{\lambda_k}(p)|\leqslant M\sum_{k=m_\sigma+1}^{\infty} c_k^\sigma<\varepsilon/2,$$

где $M=\sup_{\alpha\in A}\ \sup_{k=1,\,2,\,\ldots}|a_{\alpha,\,k}|$.

Таким образом, для всех $\alpha\in A$ выполнено

$$|f_\alpha(p_t)-\sum_{k=1}^{m_\sigma} c_k^\sigma a_{\alpha,\,k}\chi_{\lambda_k}(p_t)|<\varepsilon \text{ при } |t|\leqslant N.$$

Семейства функций $\{f_\alpha(p_t)\}_{\alpha\in A}$ и $\{\sum_{k=1}^{m_\sigma} c_k^\sigma a_{\alpha,\,k}\chi_{\lambda_k}(p_t)\}_{\alpha\in A}$ являются равностепенно непрерывными в каждой точке группы $\Omega_M$. Поэтому неравенство можно распространить на некоторую окрестность компакта $\{p_t:|t|\leqslant N\}$.

Теорема доказана. Пользуясь ею, установим сейчас следующий факт о суммировании рядов Дирихле.

**Теорема 9.** *Пусть $f(z)$ — аналитическая L. п.-п. функция в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ с рядом Дирихле $\sum\limits_{(k)} a_k e^{i\lambda_k z}$. Тогда существует зависящая от параметра $\sigma > 0$ последовательность чисел $\{c_k^\sigma\}_{k=1,2,\ldots}$ такая, что любым $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ и $N > 0$ отвечают $\sigma$, $m_\sigma > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что*

$$\sup_{\substack{a+\delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b-\delta \\ |\operatorname{Re} z| \leqslant N}} \left| f(z+\tau) - \sum_{k=1}^{m_\sigma} c_k^\sigma a_k e^{i\lambda_k (z+\tau)} \right| < \varepsilon,$$

*где $\tau$ — любое $\left\{\gamma, \frac{1}{\gamma}\right\}$-смещение, отвечающее функции $f(z)$ в полосе $\{z : a+\delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b-\delta\}$.*

Доказательство. Семейство функций $\{f_y(x) = f(iy + x)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Действительно, равностепенная непрерывность следует из теоремы 2. Остается доказать ограниченность множества всех коэффициентов Фурье. Эти коэффициенты имеют вид $a_k e^{-\lambda_k y}$. Поэтому для $\lambda_k \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|a_k e^{-\lambda_k y}| \leqslant |a_k| \cdot e^{-\lambda_k (a+\delta)},$$

а для $\lambda_k < 0$:

$$|a_k e^{-\lambda_k y}| \leqslant |a_k| \cdot e^{-\lambda_k (b-\delta)}.$$

Правые части неравенств являются взятыми по модулю коэффициентами Фурье функций $f_{a+\delta}(x)$ и $f_{b-\delta}(x)$. По теореме Римана—Лебега они ограничены в совокупности. Таким образом, множество коэффициентов Фурье семейства функций $\{f_y(x)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$ ограничено. Теорема доказана.

**§ 6.** Следующие две теоремы являются аналогами для класса L. п.-п. функций двух хорошо известных из теории почти-периодических функций Г. Бора теорем: теоремы об аналитическом продолжении п.-п. функции, имеющей ограниченный спектр, и теоремы о связи между максимальной полосой почти-периодичности аналитической функции и максимальной полосой ее ограниченности (см., например, [3], стр. 88 и 312).

**Теорема 10.** *Пусть $f(z)$—аналитическая функция в полосе $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ такая, что при некотором $y_0 \in (a, b)$ функция $f_{y_0}(x) = f(iy_0 + x)$ является почти-периодической по Левитану с числовым модулем, принадлежащим модулю M. Для того чтобы функция $f(z)$ была почти-периодической по Левитану в этой полосе и отвечающий ей числовой модуль принадлежал модулю M, необходимо и достаточно, чтобы каждой паре чисел $\delta > 0$ и $x$ $(-\infty < x < +\infty)$ можно было сопоставить окрестность нуля $U$ группы $\Omega_M$ такую, что функция $f(z)$ ограничена на множестве*

$$A_{U,x,\delta} = \{z : p_{\operatorname{Re} z} - p_x \in U,\ \operatorname{Im} z \in [a+\delta,\ b-\delta]\}.$$

Доказательство. Необходимость этого условия почти евидна. Действительно, при любом $\delta > 0$ функция $f(z)$ ограни-ена на множестве $\{z : \operatorname{Re} z = x,\ \operatorname{Im} z \in [a+\delta,\ b-\delta]\}$ как непре-ывная функция на компакте. Кроме того, из равностепенной епрерывности семейства функций $\{f_y(x) = f(iy + x)\}_{a+\delta \leqslant y \leqslant b-\delta}$ каждой точке группы $\Omega_M$ следует существование окрестности уля $U \in \Omega_M$ такой, что колебание каждой функции из этого емейства в окрестности $p_x + U$ не превосходит, например, еди-ицы. Поэтому

$$\sup_{z \in A_{U,\,x,\,\delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{\substack{\operatorname{Re} z = x \\ \operatorname{Im} z \in [a+\delta,\ b-\delta]}} |f(z)| + 1 < +\infty$$

Таким образом, условия теоремы являются необходимыми. Іерейдем к доказательству их достаточности. Для этого зададимся роизвольной точкой $x\ (-\infty < x < +\infty)$ и некоторой последова-ельностью вещественных чисел $\{\tau_k\}_{k=1,2,\ldots}$, стремящейся в топо-огии группы $\Omega_M$ к нулю. Как показал Б. Я. Левин [2], стр. 53, ля любого $N > 0$ выполнено

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{|x| \leqslant N} |f_{y_0}(x + \tau_k) - f_{y_0}(x)| = 0.$$

Из непрерывности отображения $x \to p_x$ вещественной оси группу $\Omega_M$ вытекает, что существует $\alpha > 0$ такое, что образ трезка $[-\alpha,\ \alpha]$ при этом отображении принадлежит окрестности уля $U$. По условию теоремы для всех значений индекса $k$, таких, то $p_{\tau_k} \in U$, аналитическая функция $f(z + \tau_k) - f(z)$ ограничена прямоугольнике

$$I = \{z : \operatorname{Re} z \in [x - \alpha,\ x + \alpha],\ \operatorname{Im} z \in [a + \delta,\ y_0]\}.$$

Построим гармоническую меру $\omega(z)$ отрезка

$$i = \{z : \operatorname{Re} z \in [x - \alpha,\ x + \alpha],\ \operatorname{Im} z = y_0\}$$

тносительно этого прямоугольника. По теореме о «двух констан-ах» [5], стр. 343 в каждой точке нашего прямоугольника выпол-яется неравенство

$$\ln |f(z+\tau_k) - f(z)| \leqslant \omega(z) \sup_{z \in i} \ln |f(z + \tau_k) - f(z)| +$$
$$+ [1 - \omega(z)] \sup_{z \in I} \ln |f(z + \tau_k) - f(z)|.$$

Второе слагаемое в правой части, как мы уже отметили, ограни-ено. Поэтому можно заменить его некоторой константой:

$$\ln |f(z + \tau_k) - f(z)| \leqslant \omega(z) \sup_{z \in i} \ln |f(z + \tau_k) - f(z)| + C.$$

Далее, переходя к нашим обозначениям, получим

$$\ln |f(z + \tau_k) - f(z)| \leqslant \omega(z) \sup_{|t - x| \leqslant \alpha} \ln |f_{y_0}(t + \tau_k) - f_{y_0}(t)| + C.$$

Обозначим нижнюю грань значений гармонической меры на отрезке $j=\{z:\operatorname{Re} z=x,\ \operatorname{Im} z\in[a+2\delta,\ y_0]\}$ буквой $\omega$. Из принципа максимума для гармонических функций следует, что $\omega>0$. При значениях индекса $k$, таких что

$$\sup_{|t-x|\leqslant\alpha}|f_{y_0}(t+\tau_k)-f_{y_0}(t)|<1,$$

будем иметь

$$\sup_{z\in j}\ln|f(z+\tau_k)-f(z)|\leqslant\omega\sup_{|t-x|\leqslant\alpha}\ln|f_{y_0}(t+\tau_k)-f_{y_0}(t)|+C.$$

Из этого неравенства и теоремы Б. Я. Левина, сформулированной нами в начале доказательства, следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{a+2\delta\leqslant y\leqslant y_0}|f_y(x+\tau_k)-f_y(x)|=0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{y_0\leqslant y\leqslant b-2\delta}|f_y(x+\tau_k)-f_y(x)|=0.$$

Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 2 § 2.

**Теорема 11.** *Пусть $f(t)$ — ограниченная L. п.-п. функция на числовой оси, имеющая суммируемое пространственное расширение $\hat{f}(p)$*, такое, что все показатели соответствующего ряда Фурье превосходят некоторое число $\Lambda$.*

*Тогда существует аналитическая L. п.-п. функция в верхней полуплоскости, непрерывная вплоть до вещественной оси, и совпадающая на ней с функцией $f(t)$.*

Доказательство. Вернемся к теореме 8 § 5. Если множество $A$ состоит из одного элемента, то условие теоремы выполнено, так как множество коэффициентов Фурье суммируемой функции ограничено в силу теоремы Римана—Лебега. В таком виде эта теорема была доказана Б. Я. Левиным [2].

Пользуясь этой теоремой мы можем подобрать последовательность тригонометрических полиномов $\{P_k(t)\}_{k=1,2,\ldots}$, таких что любой паре чисел $\varepsilon>0$ и $N>0$ отвечают окрестность нуля $U_{\varepsilon,N}$ группы $\Omega_f$ и номер $k_{\varepsilon,N}$, начиная с которого, выполнено:

$$\sup_{p_\tau\in U_{\varepsilon,N}}\sup_{|x|\leqslant N}|f(x+\tau)-P_k(x+\tau)|<\varepsilon.$$

Все показатели этих полиномов содержатся в множестве показателей Фурье функции $f(x)$. Поэтому, во-первых, числовые модули полиномов принадлежат модулю $M_f$; во-вторых, все показатели полиномов превосходят число $\Lambda$.

---

* Очевидно, любое пространственное расширение ограниченной L. п.-п. функции является суммируемым.

Отметим еще одно свойство аппроксимирующих тригонометрических полиномов, существенно связанное с ограниченностью функции $f(t)$. Из доказательства теоремы 8 вытекает, что наши полиномы являются конечными суммами рядов типа

$$\int \hat{f}(p+s)\cdot\psi_\sigma(s)\,ds=\sum_{(k)} a_k c_k^\sigma \chi_{\lambda_k}(p)\quad (p\in T_f)$$

и мало отличаются от них по величине. Если же функция $f(t)$ ограничена, то ее пространственное расширение ограничено той же константой. Поэтому выполняется неравенство

$$\left|\int \hat{f}(p+s)\cdot\psi_\sigma(s)\,ds\right|\leqslant \sup_{s\in T_f}|\hat{f}(s)|\cdot\int\psi_\sigma(s)\,ds=\sup_{-\infty<t<+\infty}|f(t)|.$$

Таким образом, мы можем сделать вывод: последовательность полиномов ограничена на оси.

Введем обозначение $R_k(t)=e^{-i\Lambda t}\cdot P_k(t)$. Все полиномы из семейства $\{R_k(z)\}_{k=1,2,\dots}$ ограничены в верхней полуплоскости, так как их показатели Фурье положительны. По теореме Фрагмена—Линделефа для полуплоскости (см., например, [4], стр, 71) они ограничены в верхней полуплоскости одной и той же константой

$$\sup_{k=1,2,\dots}\ \sup_{\operatorname{Im} z\geqslant 0}|R_k(z)|\leqslant C<+\infty.$$

Зададимся произвольными $h>0$, $N>0$ и построим прямоугольник

$$I_{h,N}\{z:|\operatorname{Re} z\leqslant N|,\ 0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant h\}.$$

Пусть $\omega(z)$ — гармоническая мера стороны прямоугольника, лежащей на вещественной оси, относительно всего прямоугольника. По теореме о «двух константах» [5], стр. 343 в каждой точке нашего прямоугольника выполнено:

$$\ln|R_k(z+\tau)-R_l(z+\tau)|\leqslant\omega(z)\sup_{|x|\leqslant N}\ln|R_k(x+\tau)-R_l(x+\tau)|+$$
$$+[1-\omega(z)]\sup_{z\in I_{h,N}}\ln|R_k(z+\tau)-R_l(z+\tau)|\quad (k,\ l=1,\ 2,\ \dots).$$

Последнее слагаемое в правой части, как мы показали, ограничено при всех вещественных $\tau$. Поэтому имеем

$$\ln|R_k(z+\tau)-R_l(z+\tau)|\leqslant\omega(z)\sup_{|x|\leqslant N}\ln|R_k(x+\tau)-$$
$$-R_l(x+\tau)|+\ln 2C\quad (k,\ l=1,\ 2,\ \dots).$$

Или, что то же самое,

$$\ln|P_k(z+\tau)-P_l(z+\tau)|\leqslant\omega(z)\times$$
$$\times\sup_{|x|\leqslant N}\ln|P_k(x+\tau)-P_l(x+\tau)|+\ln 2C-\Lambda h.$$

Последовательность тригонометрических полиномов $\{P_k(z)\}_{k=1,2,\dots}$ сходится на вещественной оси. Из последнего неравенства, справедливого при произвольных $h>0$ и $N>0$, вытекает, что наша последовательность полиномов равномерно сходится на каждом компакте, принадлежащем замкнутой верхней полуплоскости. Аналитическую в верхней полуплоскости функцию, являющуюся пределом нашей последовательности полиномов, обозначим $F(z)$. Очевидно, функция $F(z)$ непрерывна вплоть до вещественной оси, где она совпадает с функцией $f(t)$.

Устремляя в последнем неравенстве индекс $k$ в бесконечность получим

$$\ln|F(z+\tau)-P_l(z+\tau)| \leqslant \omega(z) \times$$
$$\times \sup_{|x|\leqslant N} \ln|f(x+\tau)-P_l(x+\tau)| + \ln 2C - \Lambda h.$$

Отсюда следует, что функция $F(z)$ в любой конечной полосе $\{z: 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant h\}$ удовлетворяет условию теоремы 4 § 3. Значит, она является аналитической почти-периодической по Левитану функцией в верхней полуплоскости. Отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю $M_f$. Теорема полностью доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Новое обобщение почти-периодических функций Г. Бора. Зап. Харьковск. ин-та матем. и матем. об-ва, 15, 2, 1938.
2. Б. Я. Левин. О почти-периодических функциях Левитана. «Укр. матем. журн». № 1. Изд-во Харьковск. ун-та, 1949.
3. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции, ГИТТЛ, 1953.
4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. ГИТТЛ, 1956.
5. М. А. Евграфов. Аналитические функции. «Наука», 1968.
6. Б. Я. Левин. Новое построение теории почти-периодических функций Б. М. Левитана. ДАН СССР, 62, 5, 1948.
7. В. А. Марченко. Применение метода суммирования Фейера-Бохнера к обобщенным рядам Фурье. ДАН СССР, 53, 1, 1946.
8. В. А. Марченко. Методы суммирования обобщенных рядов Фурье. Зап. научно-иссл. ин-та матем. и мех. Харьковск. ун-та, 20, 1950.

*Поступила 14 июня 1971 г.*