ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЛАСТЯХ

А. И. Хейфиц

Теория функций, аналитических в угле $\alpha < \arg z < \beta$ и вполне регулярного роста (в. р. р.) в каждом угле $\alpha + \xi \leqslant \arg z \leqslant \beta - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, была разработана Б. Я. Левиным и А. Пфлюгером [1, гл. III].

Функции в. р. р. в полуплоскости были рассмотрены Н. В. Говоровым [2, 3]. Здесь изучались функции, аналитические в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и удовлетворяющие следующему условию: Г) $f(z)$ ограничена в каждом полукруге

$$\{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{|z| < R\}, \quad 0 < R < \infty.$$

Известно [4], что тогда для почти всех вещественных t существует предел

$$\psi(t) = \lim_{y\to+0} \int_0^t \ln|f(x+iy)|\,dx.$$

ряет условие $\psi(t)$ может иметь только разрывы первого рода, в которых положим, по определению, $\psi(t) = \frac{1}{2}[\psi(t+0) + \psi(t-0)]$.

Функция $\psi(t)$ играет важную роль в рассматриваемых вопросах. В частности, в [2, 3] содержится следующее утверждение.

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — аналитическая и не имеющая корней в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ функция, удовлетворяющая условию Г). Пусть $f(z)$ — функция порядка $\rho < 1$* и нормального типа.*

Для того чтобы в каждом угле, внутреннем к $(0, \pi)$, $f(z)$ имела ρ — в. р. р. (т. е. в. р. р. относительно порядка ρ), необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\rho} u_1^+(t) \text{ и } \lim_{t\to-\infty} |t|^{-\rho} u_1^-(t),$$

где $u_1^+(t) = \int_1^t \frac{d\psi(x)}{x}$ при $t > 1$ и $u_1^-(t) = \int_t^{-1} \frac{d\psi(x)}{x}$ при $t < -1$.

Через H_ρ обозначим класс функций $f(z)$, аналитических и не обращающихся в нуль в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, удовлетворяющих условию Г), и имеющих в этой полуплоскости порядок $\rho < \infty$ и нормальный тип.

Вслед за функциями $u_1^{\pm}(t)$ естественно рассмотреть их «усреднения» — функции

$$u_m^+(t) = \int_1^t u_{m-1}^+(x) \frac{dx}{x} \text{ при } t > 1$$

и

$$u_m^-(t) = \int_t^{-1} u_{m-1}^-(x) \frac{dx}{x} \text{ при } t < -1.$$

Настоящая статья посвящена изучению роли $u_m^{\pm}(t)$ в теории функций в. р. р.

Легко видеть, что если $f(z) \in H_\rho$ и при некоторых m и λ $(0 < \lambda < \rho)$ существуют пределы

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\lambda} u_m^+(t), \quad \lim_{t\to-\infty} |t|^{-\lambda} u_m^-(t), \tag{1}$$

то $f(z)$ имеет λ-в. р. р. с тригонометрическим индикатором в каж-

* Порядок понимается в смысле Е. Титчмарша [5. стр. 209]. Эквивалентное определение дано в [2]. Здесь и всюду в дальнейшем порядок подразумевается формальным [2, 3].

дом угле, внутреннем к $(0, \pi)$. Обратное, однако, неверно, как показывает рассмотренный ниже пример 2.

Пример 1. Пусть $0 < \arg z < 2\pi$, $0 < \alpha < \rho$, и

$$f_{\rho, \alpha}(z) = \exp\{z^\rho e^{iz^\alpha}\}, \quad \ln|f_{\rho, \alpha}(z)| = e^{-r^\alpha \sin \alpha\theta} r^\rho \cos(\rho\theta - r^\alpha \cos \alpha\theta).$$

Очевидно, что в каждом угле, внутреннем к $(0, \pi)$, порядок $f(z)$ равен нулю, но $\ln|f_{\rho, \alpha}(r)| = r^\rho \cos(r^\alpha)$, поэтому порядок $f(z)$ в $[0, \pi]$ есть ρ. Рассмотрим для $f_{\varphi, \alpha}(z)$ функции $u_m^\pm(t)$:

$$u_1^+(t) = \int_1^t r^{\rho-1} \cos(r^\alpha)\, dr = O(t^{\rho-\alpha}) \text{ при } t \to +\infty.$$

Точно так же

$$u_m^+(t) = O(t^{\rho - m\alpha}) \text{ при } t \to +\infty.$$

Аналогично получаем

$$u_m^-(t) = O(\ln^{m-1}|t|) \text{ при } t \to -\infty.$$

Отсюда видно, что функция $(0 < \lambda < \rho)$

$$g(z) = f_{\rho, \alpha}(z) \exp\{z^\lambda\} \tag{2}$$

имеет λ-в. р. р. в каждом угле, внутреннем к $(0, \pi)$, и пределы (1) существуют при $m \geqslant \left[\frac{\rho - \lambda}{\alpha}\right] + 1$*, но не при меньших m.

Пример 2. Пусть $0 < \lambda < \rho < 1$. Положим

$$F(z) = \exp\{z^\lambda + h(z)\},$$

где

$$h(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \ln f_{\rho - \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}}(z),$$

$$n_0 = \left[\frac{1}{\rho - \lambda}\right] + 1, \quad a_n = e^{-n^2}.$$

Легко проверить, что при фиксированном $\theta \in (0, \pi)$ ряд $r^{-\lambda} \operatorname{Re} h(re^{i\theta})$ сходится равномерно по $r \in [1, \infty)$, откуда

$$\lim_{r \to \infty} r^{-\lambda} \operatorname{Re} h(re^{i\theta}) = 0 \quad (0 < \theta < \pi).$$

Следовательно, в каждом угле, внутреннем к $(0, \pi)$, $F(z)$ имеет порядок λ. Однако порядок $F(z)$ в $[0, \pi]$ определяется первым членом ряда $h(z)$ и равен ρ, так как имеем

$$|\operatorname{Re} h(r)| = a_{n_0} r^\rho |\cos(r^\rho)| + o(r^\rho), \quad r \to \infty.$$

Наконец, учитывая сказанное о функции $f_{\rho, \alpha}(z)$, легко проверить, что при $k_n = \left[n^2\left(\rho - \lambda + \frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}\right)\right] + 1$ существует предел

---

* Как обычно, $[x]$ обозначает целую часть x.

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-\lambda} u^{+}_{k_n}\left(t;\ f_{\rho-\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n},\ \frac{1}{n^2}}\right),$$

но уже $u^{+}_{k_n}\left(t;\ f_{\rho-\frac{1}{n_0}+\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{(n+1)^2}}\right)$ имеет порядок, больший, чем λ. Следовательно, функция $u^{+}_{m}(t, F)$ ни при каком m не удовлетворяет условию (1).

Оказывается, это условие связано с регулярностью роста $f(z)$ в криволинейных областях $G_{\alpha, C}$ следующего вида ($\alpha > 0$, $C > 0$)

$$G_{\alpha, C} = \{z = re^{i\theta} : r \geqslant r_0 > 0,\ Cr^{-\alpha} \leqslant \theta \leqslant \pi - Cr^{-\alpha}\}.$$

Определение. *Пусть $f(z) \in H_\rho$. Скажем, что $f(z)$ имеет λ-в. р. р. в $G_{\alpha, C}$, если для любого $\varepsilon > 0$*

$$|r^{-\lambda} \ln |f(re^{i\theta})| - h(\theta)| < \varepsilon,$$

лишь только $z \in G_{\alpha, C}$ и $r > R_\varepsilon$. Здесь $h(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} r^{-\lambda} \ln |f(re^{i\theta})|$ — индикатор $f(z)$ при $\theta \in (0, \pi)$.

Основной результат статьи составляет

Теорема 1. *Пусть $f(z) \in H_\rho$ и $0 < \lambda \leqslant \rho < 1$.*

I. *Предположим, что при некоторых $\alpha > 0$ и $C > 0$, $f(z)$ — функция λ-в. р. р. в $G_{\alpha, C}$, причем*

$$\ln |f(re^{i\theta})| = h(\theta) r^\lambda + \psi(r, \theta) \tag{3}$$

и найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$r^{-(\lambda-\varepsilon)} |\psi(r, \theta)| \leqslant \text{const}, \text{ если } z \in G_{\alpha, C}. \tag{4}$$

Тогда при любом $m \geqslant m_0\left(m_0 = \left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right] + 3\right.$, если $\left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right]$ — четное, $m_0 = \left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right] + 4$, если $\left.\left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right]\text{ — нечетное}\right)$ существуют

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} t^{-\lambda} u^{+}_{m}(t) = a^{+}_{m}, \\ &\lim_{t\to-\infty} |t|^{-\lambda} u^{-}_{m}(t) = a^{-}_{m}, \end{aligned} \tag{5}$$

причем

$$\begin{aligned} u^{+}_{m}(t) &= a^{+}_{m} t^\lambda + \varphi^{+}(t), \\ u^{-}_{m}(t) &= a^{-}_{m} |t|^\lambda + \varphi^{-}(t), \end{aligned} \tag{6}$$

и

$$|\varphi^{\pm}(t)| = O(|t|^{\lambda-\varepsilon}),\ |t| \to \infty. \tag{7}$$

Пример функции (2) показывает, что оценка m близка к точной.

II. *Обратно, пусть имеют место (6), (7). Для любого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ найдется $\alpha \in (0, 1)$, такое, что $f(z)$ имеет λ-в. р. р. в $G_{\alpha, C}$ при каждом $C > 0$, причем выполняются (3) и*

$$r^{-(\lambda-\varepsilon_1)} |\psi(r, \theta)| \leqslant \text{const},\ z \in G_{\alpha, C}. \tag{4'}$$

Если выполнены условия второй части теоремы, то индикатор $f(z)$ находится по формуле

$$h(\theta) = \frac{\lambda^m}{\sin \pi\lambda} [a_m^+ \sin \lambda (\pi - \theta) - a_m^- \sin \lambda\theta]. \qquad (8)$$

Замечание 1. Как будет видно из доказательства, существование пределов (5) следует только из наличия у $f(z)$ λ-в. р. р. в $G_{\alpha, C}$, т. е. если

$$r^{-\lambda} |\psi(r, \theta)| \to 0 \text{ при } z \in G_{\alpha, C}$$

и $r \to \infty$. Обратное, однако, неверно без дополнительных предположений, как показывает следующий пример.

Пример 3. Выберем в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ главные ветви z^λ и $\ln z$ и положим

$$f(z) = \exp\{z^\lambda + z^\lambda e^{i \ln^3 z}\}, \qquad (9)$$

тогда

$$\ln |f(re^{i\theta})| = r^\lambda \cos \lambda\theta + [\exp(\lambda \ln r - 3\theta \ln^2 r + \theta^3)] \cos (\lambda\theta + \\ + \ln^3 r - 3\theta^3 \ln r).$$

Очевидно, что в каждом угле $[\beta, \pi]$, $\beta > 0$, $f(z)$ имеет λ-в. р. р., но на кривых $\theta = Cr^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, $C > 0$, $f(z)$ этим свойством не обладает. В то же время легко проверить, что существуют пределы

$$\lim_{t \to +\infty} t^{-\lambda} u_1^+(t) \text{ и } \lim_{t \to -\infty} |t|^{-\lambda} u_1^-(t).$$

В этом примере $\rho = \lambda$, но не сложно построить аналогичный пример с $\rho > \lambda$.

Замечание 2. Благодаря наличию условий (4) и (7) теорему 1 можно сформулировать следующим образом:

Пусть $f(z) \in H_\rho$, $0 < \lambda \leqslant \rho < 1$, $\alpha > 0$, $C > 0$. *Для того чтобы в некоторой области* $G_{\alpha, C}$ функция $f(z)$ имела λ-в. р. р. со степенным скачком порядка остаточного члена (в смысле (4)), необходимо и достаточно, чтобы при некотором m функции $u_m^\pm(t)$ правильно менялись на бесконечности (в смысле (5)) и имели степенной скачок порядка остаточных членов.

Замечание 3. В. Н. Логвиненко в работе [6] доказал следующее утверждение.

Теорема Б. *Пусть $f(z)$ — целая функция нецелого порядка, все нули которой лежат на положительном луче вещественной оси, и пусть для функции $n(t)$, считающей нули $f(z)$, имеет место представление $n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^\lambda + \varphi(t)$, где $p + 1 > \rho > \lambda > p = [\rho]$, и при некотором $q > 1$ выполняется оценка*

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q \, dt = o(T^{\lambda q + 1}), \quad T \to +\infty. \qquad (10)$$

Тогда

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\pi\Delta}{\sin\pi\rho} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\pi\lambda} e^{i\lambda(\theta-\pi)} r^{\lambda} + \psi(r, \theta),$$

причем

$$\lim_{T\to+\infty} T^{-(\lambda q+1)} \int_T^{2T} |\psi(r, \theta)|^q\, dr = 0$$

равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$.

Обратно, пусть при $\theta = 0, \pi$

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\pi\Delta\cos\rho(\theta-\pi)}{\sin\pi\rho} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1\cos\lambda(\theta-\pi)}{\sin\pi\lambda} r^{\lambda} + \psi_1(r, \theta),$$

причем при вещественных x *и некотором* $q > 1$

$$\int |\psi_1(x)|^q\, dx = o(T^{\lambda q+1}),\ T\to\infty,\ T < |x| < 2T.$$

Тогда функция $n(t)$ *удовлетворяет условиям первой части теоремы.*

Но для рассматриваемого нами случая аналог первой части теоремы Б не имеет места, так же как только из существования пределов (5) не вытекает наличие у $f(z)$ в. р. р. в какой-либо области $G_{\alpha, C}$ (см. замечание 1). Точнее, рассмотрим снова функцию (9). Для нее $|\varphi_m^{\pm}(t)| = o(|t|^{\lambda})$ при $t\to\infty$, тем более при любом $q > 0$ имеет место (10). Однако ни для какой области $G_{\alpha, C}$, $\alpha > 0$, $C > 0$ нельзя найти положительную и стремящуюся к нулю при $T\to\infty$ функцию $\varepsilon(T)$ такую, что при $z \in G_{\alpha, C}$

$$\int_T^{2T} |\psi(r, \theta)|^q\, dr \leqslant T^{\lambda q+1}\varepsilon(T).$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится несколько вспомогательных предложений, в частности, некоторое видоизменение обобщенной формулы Карлемана [1, стр. 291, 3, 7, 8].

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ — *аналитическая ограниченная функция в области* $\{1 \leqslant |z| \leqslant r\} \cap \{0 < \arg z < \pi\}$ *и* $f(z) \neq 0$*. *Пусть* $\sigma(x) = \psi(x) - \psi(-x)$, $x > 0$. *Тогда при любом нечетном* $m = 2s-1 > 0$ *и* $\tilde\theta = \min\{\theta, \pi-\theta\}$ *имеет место равенство*

$$\int_1^r \ln^m\frac{x}{r}\,\frac{d\sigma(x)}{x} = (-1)^{s+1}\int_0^{\pi}\tilde\theta^m \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta +$$

$$+ 2m!\sum_{l=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-l-1}}{(2l+1)!\,(m-2l-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m-2l-1}\int_1^r \ln^{2l+1}\frac{x}{r}\ln|f(ix)|\frac{dx}{x} +$$

$$+ A_m(r), \tag{11}$$

$$A_m(r) = \int_0^{\pi} \operatorname{Im}\left[\left(i\tilde\theta + \operatorname{sgn}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ln r\right)^m \ln f(e^{i\theta})\right] d\theta.$$

* Утверждение понадобится нам только при этом условии.

Если $f(z)$ — аналитическая функция вплоть до границы, то формула (11) доказывается аналогично классической формуле Карлемана [1, стр. 291] с помощью равенств

$$\oint\limits_{l_+} \ln^m \frac{z}{r} \ln f(z) \frac{dz}{z} = \oint\limits_{l_-} \ln^m \left(\frac{-z}{r}\right) \ln f(z) \frac{dz}{z} = 0,$$

где l_+ — граница области $\left\{z;\ 1 \leqslant |z| \leqslant r,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$, а l_- — области $\left\{z: 1 \leqslant |z| \leqslant r,\ \frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \pi\right\}$. Переход к общему случаю осуществляется так же, как в работах [3, 7, 8]. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

Лемма 1. *Пусть* $f(z) \in H_\rho$, $0 < \lambda \leqslant \rho < 1$. Для того чтобы имели место соотношения (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы они выполнялись для функций

$$f_+(z) = \exp\left\{\frac{z}{\pi i} \int\limits_1^\infty \frac{d\psi(t)}{t(t-z)}\right\}$$

и

$$f_-(z) = \exp\left\{\frac{z}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{d\psi(t)}{t(t-z)}\right\}.$$

Доказательство. Как известно [2], если $f(z) \in H_\rho$, то имеет место представление

$$f(z) = C \exp\left\{\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\psi(t)}{t-z} + \frac{z}{\pi i} \int\limits_{1<|t|<\infty} \frac{d\psi(t)}{t(t-z)}\right\}. \qquad (12)$$

Функция $f_0(z) = C \exp\left\{\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\psi(t)}{t-z}\right\}$ имеет 0 — в. р. . в $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $f_0(z) \equiv 1$ и

$$f(z) = f_+(z) f_-(z).$$

Достаточность условий леммы очевидна. Докажем необходимость. Отобразим конформно угол $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$ на полуплоскость $0 < \eta = \arg\zeta < \pi$. Пусть $g(\zeta) = f(\sqrt{\zeta})$ при $\operatorname{Im}\zeta > 0$. В силу условий леммы $g(\zeta) = h_g(\eta)|\zeta|^{\frac{\lambda}{2}} + O\left(|\zeta|^{\frac{\lambda-\varepsilon}{2}}\right)$ при $|\zeta| \to \infty$ в области $\left\{\zeta: |\zeta| > k_0 > 0,\ C_1|\zeta|^{-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \eta < \pi\right\}$. Запишем для $g(\zeta)$ представление (12), считая $g_0(\zeta) \equiv 1$:

$$g(\zeta) = \exp\left\{\frac{\zeta}{\pi i} \int\limits_{1<|t|<\infty} \frac{d\psi_g(t)}{t(t-\zeta)}\right\} = g_+(\zeta) g_-(\zeta).$$

Заметим, что $d\psi_g(-t) = \ln|f(i\sqrt{t})|\,dt$ при $t>0$. Так как $\ln|f(ir)| = h\left(\frac{\pi}{2}\right)r^{\lambda} + O(r^{\lambda-\varepsilon})$, $r\to\infty$, то $g_-(\zeta) = h_1(\eta)|\zeta|^{\frac{\lambda}{2}} + O\left(|\zeta|^{\frac{\lambda-\varepsilon}{2}}\right)$ при $|\zeta|\to\infty$ и оценка равномерна в каждом угле $[0, \pi-\delta]$, $\delta>0$. Поэтому $g_+(\zeta)$ имеет аналогичное представление в области $\left\{C_1|\zeta|^{-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \eta \leqslant \pi-\delta\right\}$ при каждом $\delta>0$. Но $g_+(z^2) = f_+(z)$ при $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Следовательно, для $f_+(z)$ имеют место соотношения (5), (6) в области $G_{\alpha, C} \cap \left\{0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.

Непосредственно проверяется, что $\ln|f(-r)| \equiv 0$ при $r>0$. Поэтому $f_+(z)$ имеет в угле $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ порядок λ. Кроме того, $f_+(z) \neq 0$. Отсюда вытекает утверждение леммы относительно $f_+(z)$. Второе утверждение доказывается аналогично.

Лемма 2. *Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям первой части теоремы 1. Тогда для любых $\alpha>0$, $C>0$, $\delta>0$ и вещественной функции $b(r)$, удовлетворяющей неравенствам $0\leqslant b(r)\leqslant Cr^{-\alpha}$, выполняются соотношения*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho-\delta}\int_{b(r)}^{Cr^{-\alpha}} \theta\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho-\delta}\int_{\pi-Cr^{-\alpha}}^{\pi-b(r)} (\pi-\theta)\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Рассматривая $f(z)$ как функцию формального порядка $\rho+\delta$, заключаем, что $f(z)$ — функция $(\rho+\delta)$-в. р. р. в $(0, \pi)$, причем $h(\theta)\equiv 0$. Поэтому существует

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\rho-\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0. \tag{15}$$

Пусть $g(z) = f(z)\exp\{Mz^{\rho+\delta}\}$, где $M = \mathrm{const}$ выбрано так, что $|g(z)|\leqslant 1$. Учитывая это неравенство и (15), имеем

$$\lim_{r\to\infty}\left| r^{-\rho-\delta}\int_{b(r)}^{Cr^{-\alpha}} \theta\ln|g(re^{i\theta})|\,d\theta\right| = 0,$$

откуда легко получается равенство (13); (14) доказывается аналогично.

Лемма 3. *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям первой части теоремы 1. Тогда при любом $m \geqslant \left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right]+3$ и $r\to\infty$*

$$r^{-\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^{m-1}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^{m-1}h(\theta)\,d\theta + O(r^{-\varepsilon}), \tag{16}$$

$$r^{-\lambda}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-\theta)^{m-1}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-\theta)^{m-1}h(\theta)\,d\theta+O(r^{-\varepsilon}). \qquad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть (16):

$$r^{-\lambda}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\theta^{m-1}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta=r^{-\lambda}\int\limits_{Cr^{-\alpha}}^{\frac{\pi}{2}}\theta^{m-1}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta+\chi(r),$$

где

$$\chi(r)=r^{-\lambda}\int\limits_{0}^{Cr^{-\alpha}}\theta^{m-1}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Функция $\sin\theta\ln|f(re^{i\theta})|$ интегрируема на $(0,\pi)$ [4, стр. 63], следовательно, $\theta\ln|f(re^{i\theta})|$ также интегрируема. По второй теореме о среднем и лемме 2

$$\chi(r)=r^{-\lambda}(Cr^{-\alpha})^{m-2}\int\limits_{b(r)}^{Cr^{-\alpha}}\theta\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta=O(r^{-\varepsilon}), \qquad (18)$$

если $m\geqslant\left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right]+3$ (мы считаем ε и δ достаточно малыми).

Функция $f(z)$ — нормального типа в $\{\operatorname{Im} z>0\}$, поэтому ее индикатор ограничен сверху и по свойству тригонометрической выпуклости непрерывен и ограничен снизу. Тогда при $r\to\infty$

$$\int\limits_{Cr^{-\alpha}}^{\frac{\pi}{2}}\theta^{m-1}h(\theta)\,d\theta=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\theta^{m-1}h(\theta)\,d\theta+O(r^{-\varepsilon}). \qquad (19)$$

Теперь (16) легко следует из (18), (19) и условий леммы, (17) доказывается аналогично.

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, будем считать, что $\psi(\pm1)=0$.

Пусть выполнены условия первой части теоремы. Запишем для $f_+(z)$ формулу (11) с показателем $m-1$ вместо m. Функция $f_+(z)$ удовлетворяет на луче $\arg z=\frac{\pi}{2}$ условиям (3), (4), и $\psi_+(x)\equiv0$ при $x\leqslant1$; ($\psi_\pm(x)$ строится по $f_\pm(z)$ так же, как $\psi(x)$ по $f(z)$). Очевидно, что $|A_{m-1}(r)|=O(\ln^{m-1}r)$ при $r\to\infty$. Отсюда и из леммы 3 следует, что при наименьшем нечетном $m\geqslant\left[\frac{\rho-\lambda}{\alpha}\right]+3$ и $t\to\infty$;

$$t^{-\lambda}\int\limits_{1}^{t}\ln^{m-1}\frac{x}{t}\,\frac{d\psi_+(x)}{x}=\mathrm{const}+O(t^{-\varepsilon}).$$

Интегрируя по частям, легко проверить, что

$$\int_1^t \ln^{m-1}\frac{x}{t}\,\frac{d\psi_+(x)}{x} = C_m u_m^+(t).$$

Но $\psi_+(x)\equiv\psi(x)$ для $x>1$. Тем самым доказано первое из равенств (5). Второе доказывается аналогично.

Перейдем ко второй части теоремы.

Рассмотрим снова функцию $f_+(z)$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_1^{+\infty}\frac{d\psi_+(t)}{t(t-z)} = (-1)^m\int_1^{\infty}\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\frac{1}{t-z}\right]\frac{u_m^+(t)}{t}\,dt.$$

По условию $u_m^+(t) = a_m^+t^\lambda + \varphi^+(t)$. Поэтому

$$\int_1^{\infty}\frac{d\psi_+(t)}{t(t-z)} = (-1)^m a_m^+\int_1^{\infty}\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\frac{1}{t-z}\right]t^{\lambda-1}\,dt +$$
$$+\int_1^{\infty}\left[\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\frac{1}{t-z}\right]\varphi^+(t)\frac{dt}{t} = a_m^+\lambda^m\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^{1-\lambda}(t-z)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right) +$$
$$+\int_1^{\infty}\frac{P_m(t,z)}{(t-z)^{m+1}}\varphi^+(t)\frac{dt}{t}, \tag{20}$$

где $P_m(t,z)$ — однородный по t и z многочлен степени m.

Как известно,

$$\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^{1-\lambda}(t-z)} = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}(-z)^{\lambda-1}\quad (0<\arg z<2\pi).$$

Оценим последний интеграл в (20): $\int_1^{\infty} = \int_1^{\frac{r}{2}} + \int_{\frac{r}{2}}^{2r} + \int_{2r}^{\infty}$, $(r=|z|)$.

Легко видеть, что при всех θ и $r\geqslant 2$

$$\left|\int_1^{\frac{r}{2}} + \int_{2r}^{\infty}\right| \leqslant \mathrm{const}\, r^{\lambda-\varepsilon-1}.$$

Возьмем теперь некоторое $\alpha>0$ и пусть $Cr^{-\alpha}\leqslant\theta\leqslant\pi$. Заметим, что $|t-z|\geqslant r\sin\theta$. Тогда

$$\left|\int_{r/2}^{2r}\frac{P_m(t,z)}{(t-z)^{m+1}}\varphi^+(t)\frac{dt}{t}\right| \leqslant \int_{r/2}^{2r}\frac{|P_m(t,z)|}{|t-z|^{m+1}}\,\mathrm{const}\cdot t^{\lambda-\varepsilon}\frac{dt}{t} \leqslant \mathrm{const}\, r^{\lambda-\varepsilon_1-1}$$

при фиксированном $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, если $\alpha \leqslant \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{m+1}$. Отсюда при $Cr^{-\alpha} \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $r \to \infty$ имеем

$$\ln |f_+(re^{i\theta})| = \frac{a_m^+ \lambda^m}{\sin \pi\lambda} \sin \lambda (\pi - \theta) r^\lambda + O(r^{\lambda - \varepsilon_1}).$$

Аналогично получим, что при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi - Cr^{-\alpha}$ и $r \to \infty$

$$\ln |f_-(re^{i\theta})| = -\frac{a_m^- \lambda^m}{\sin \pi\lambda} \sin \lambda\theta \cdot r^\lambda + O(r^{\lambda - \varepsilon_1}).$$

Равенство (8) вытекает из двух последних формул. Теорема 1 полностью доказана.

Заметим, что теорема 1 обобщается на функции любого порядка $\rho < \infty$, для которых в области $G_{\alpha, C}$ вместо (3) выполняется более общее условие ($\lambda > \lambda_1 > \cdots > \lambda_m > 0$, λ, λ_1, $\ldots$, λ_m — нецелые, $\varepsilon > 0$):

$\ln | f(re^{i\theta}) | = h(\theta) r^\lambda + h_1(\theta) r^{\lambda_1} + \cdots + h_m(\theta) r^{\lambda_m} + O(r^{\lambda_m - \varepsilon})$, $r \to \infty$, а также на соответствующие классы субгармонических функций.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Н. В. Говорову и Б. Я. Левину за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.
2. Н. В. Говоров. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости. ДАН СССР, т. 162, № 3, 1965.
3. Н. В. Говоров. О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости. Автореф. канд. дисс. Ростов-на-Дону, 1966.
4. В. И. Крылов. О функциях, регулярных в полуплоскости. «Матем. сб.», 6(48), 1939.
5. Е. К. Титчмарш. Теория функций. М.-Л., ГИТТЛ, 1951.
6. В. Н. Логвиненко. О целых функциях с нулями на полупрямой. «Теория функций; функциональный анализ и их приложения», вып. 16. Изд-во Харьковск. ун-та 1972.
7. Ф. Jto. Asymptotic properties of subharmonic and analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958).
8. А. Ф. Гришин. О регулярности роста субгармонических функций. III. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 7. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.

Поступила 6 июня 1971.