ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТИ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. П. Котляров

Введение

Пусть область $D^{(n)}$ является дополнением до ограниченной области D некоторого множества $F^{(n)} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} F_j^{(n)}$, состоящего из конечного числа связных множеств $F_j^{(n)}$ (см. рисунок). При этом будем предполагать, что граница $\partial D^{(n)}$ области $D^{(n)}$ состоит из конечного числа гладких кривых. В этой области рассмотрим первую краевую задачу плоской теории упругости:

$$Au^{(n)}(x) \equiv \mu\, \Delta u^{(n)}(x) + (\lambda + \mu)\, \mathrm{grad\, div}\, u^{(n)}(x) = K(x), \quad x \in D^{(n)}, \tag{1}$$

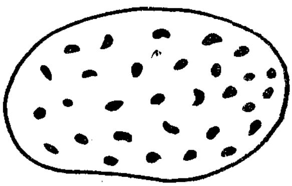
$$u^{(n)}(x) = 0, \quad x \in \partial D^{(n)}, \tag{2}$$

где вектор $K(x) \in L_2(D)$, $x = \{x_1, x_2\} \in R_2$.

Будем рассматривать последовательность $u^{(n)}$ решений краевых задач (1)-(2) и исследовать их поведение при условии, что при $n \to \infty$ число множеств $F_j^{(n)}$ неограниченно возрастает, а диаметры их стремятся к нулю. Такая задача была рассмотрена в работе [1] для того случая, когда множество $F^{(n)}$ располагается вблизи некоторой кривой (поверхности), лежащей в области D. В данной работе изучается другой случай, когда множество $F^{(n)}$ «регулярно» заполняет область D. Будет показано, что при определенных условиях, накладываемых на множество $F^{(n)}$ последовательность $u^{(n)}$ сходится в метрике $L_2(D)$ к вектору u, который является решением следующей краевой задачи:

$$Au(x) + Qu(x) = K(x),\ x \in D, \tag{3}$$

$$u(x) = 0,\ x \in \partial D, \tag{4}$$



где $Q = Q(x)$ — неотрицательная и непрерывная матрица-функция, выражающаяся через определенные характеристики множеств $F_j^{(n)}$.

Доказательство этого результата опирается на метод работы [2].

§ 1. Постановка задачи и основной результат

Уточним постановку задачи. Под решением краевой задачи (1)-(2) мы понимаем вектор $u^{(n)} \in \mathring{W}_2^1(D^{(n)}) \cap W_2^2(D^{(n)}, \text{лок})$ и удовлетворяющий уравнению (1). Решением краевой задачи (3)-(4) назовем вектор $u \in \mathring{W}_2^1(D) \cap W_2^2(D, \text{лок})$ и удовлетворяющий уравнению (3). В такой постановке нетрудно доказать существование и единственность решений краевых задач (1)-(2) и (3)-(4). (см. [3]). Продолжим решение $u^{(n)}$ краевой задачи (1)-(2) на множество $F^{(n)}$, положив $u^{(n)}(x) = 0$ при $x \in F^{(n)}$ и будем рассматривать последовательность полученных векторов $u^{(n)}$ при $n \to \infty$. Ставится вопрос, при каких условиях эта последовательность имеет предел и как его описать. Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Пусть выполнены такие условия.*

1. *Для каждого множества $F_j^{(n)}$ существуют круги $K_{1j}^{(n)}$ и $K_{2j}^{(n)}$ такие, что*

$$K_{1j}^{(n)} \subset F_j^{(n)} \subset K_{2j}^{(n)}.$$

2. *Радиусы этих кругов удовлетворяют неравенствам:*

$$aR_{2j}^{(n)} \leqslant R_j^{(n)} \leqslant bR_{1j}^{(n)},$$

где $R_j^{(n)}$ — некоторое число; a, b — постоянные.

3. Для любой подобласти $S \subset D$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{(S)} |\ln R_j^{(n)}|^{-1} = \int_S q(x)\,dx,$$

где $q(x)$ — неотрицательная и непрерывная функция, а $\sum_{(S)}$ означает суммирование по тем значениям j, для которых круги $K_{2j}^{(n)}$ лежат в области S на положительном расстоянии от ее границы ∂S.

4. Расстояние $\overline{R}_j^{(n)}$ каждого круга $K_{2j}^{(n)}$ до множества $\bigcup_{i\neq j} K_{2i}^{(n)}$ таково, что

$$\sup_{(n)} \sum_{(D)} [\overline{R}_j^{(n)} |\ln R_j^{(n)}|]^{-2} \leqslant M = \mathrm{const}.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} = 0.$

Тогда последовательность $u^{(n)}$ сходится слабо в метрике пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (и значит сильно в $L_2(D)$) к вектору u, который является решением краевой задачи (3)-(4), при этом $Q(x)$ имеет вид

$$Q_{pr}(x) = 2\pi\mu\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+3\mu} q(x)\,\delta_{pr}, \quad p,\ r = 1,\ 2,$$

где δ_{pr} — символ Кронекера.

Доказательство. Как известно [3], решение $u^{(n)}$ краевой задачи (1)-(2) реализует минимум функционала:

$$J(u^{(n)}) = H(u^{(n)}) - (K,\ u^{(n)}) = \int_{D^{(n)}} [W(u^{(n)}) - K\cdot u^{(n)}]\,dx$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(D^{(n)})$. Квадратичная форма

$$W(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,k,l,m=1}^{2} c_{iklm}\varepsilon_{ik}(u)\,\varepsilon_{lm}(u),$$

где

$$\varepsilon_{lk}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$$

есть плотность потенциальной энергии упругой деформации. Коэффициенты c_{iklm} в случае уравнения (1) выражаются через коэффициенты Ляме по формулам

$$c_{iiii} = \lambda + 2\mu; \quad c_{iikk} = \lambda, \quad c_{ikik} = \mu, \qquad i \neq k,$$

все остальные коэффициенты c_{iklm} равны нулю.

Вектор $u^{(n)}$, продолженный нулем на множество $F^{(n)}$, принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Поскольку нулевой вектор входит в пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то

$$0 = J(0) \geqslant J(u^{(n)}).$$

Отсюда, применяя неравенство Корна *)

$$\int_D |\nabla u|^2\,dx = \int_D \sum_{i,\,k=1}^{2} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right|^2 dx \leqslant C \int_D \sum_{i,\,k=1}^{2} \varepsilon_{ik}(u)\,dx,$$

можно получить

$$H(u^{(n)}) = \int_D W(u^{(n)})\,dx \leqslant C\,\|K\|_0^2,$$

где $\|\cdot\|_0$ — норма в пространстве $L_2(D)$. Но так как энергетическая норма $H(u)$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_1$ пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то

$$\|u^{(n)}\|_1 \leqslant \text{const}.$$

Таким образом, последовательность $u^{(n)}$ слабо компактна в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Следовательно, из последовательности $u^{(n)}$ можно выделить подпоследовательность $u^{(n_k)}$, слабо сходящуюся к вектору $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$

Ясно, что решение краевой задачи (3)-(4) реализует минимум такого функционала:

$$J_Q(v) = \int_D [W(v) + Qv\cdot v - K\cdot v]\,dx$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Поэтому утверждение теоремы будет вытекать из следующей леммы, доказательство которой будет проведено в § 3.

Лемма. *Пусть $u^{(n)}$ — последовательность решений краевых задач (1)-(2). Пусть u — слабый предел подпоследовательности $u^{(n_k)}$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Тогда для любого вектора $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ справедливы неравенства*

$$J_Q(u) - \varepsilon(n) \leqslant J(u^{(n)}) \leqslant J_Q(v) + \varepsilon(n), \tag{5}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Действительно, переходя к пределу в этом неравенстве, получим

$$J_Q(u) \leqslant J_Q(v).$$

Следовательно, вектор u реализует минимум функционала $J_Q(v)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Таким образом, вектор u есть решение краевой задачи (3)-(4), которое, как уже отмечалось, един-

---

*) В случае первой краевой задачи можно показать, что постоянная C в этом неравенстве от n не зависит.

ственно. Поэтому любая подпоследовательность будет сходитьс к вектору u, а значит и вся последовательность $u^{(n)}$ слабо в мет рике $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ сходится к вектору u — решению краевой задачи (3) (4). Вид $Q(x)$ будет установлен при доказательстве леммы.

§ 2. Вспомогательные оценки

Для доказательства леммы нам понадобится решение однород ного уравнения плоской теории упругости в кольце и оценки некоторых величин, связанных с этим решением.

Пусть вектор ψ^p $(p = 1, 2)$ удовлетворяет уравнению

$$A\psi^p(x) = 0, \quad x \in K_3 \setminus K_1 \tag{2.1}$$

и граничным условиям

$$\psi^p_k(x) = \delta_{pk}, \quad x \in \partial K_1, \tag{2.2}$$

$$\psi^p(x) = 0, \quad x \in \partial K_3, \tag{2.3}$$

где K_3 — круг радиусом R_3, концентрический с кругом K_1 $\partial K_1(\partial K_3)$ — граница круга $K_1(K_3)$; δ_{pk} — символ Кронекера. Реше ния ψ^p имеют вид

$$\psi^1_1(r, \theta) = \frac{B}{2}\left[2\varkappa(R_1^2 + R_3^2)\ln\frac{R_3}{r} + \frac{2}{\varkappa}(R_3^2 - r^2) + \right.$$
$$\left. + \left(r^2 - (R_1^2 + R_3^2) + \frac{R_1^2R_3^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right],$$
$$\psi^1_2(r, \theta) = \frac{B}{2}\left[r^2 - (R_1^2 + R_3^2) + \frac{R_1^2R_3^2}{r^2}\right]\sin 2\theta,$$
$$\psi^2_1(r, \theta) = \psi^1_2(r, \theta),$$
$$\psi^2_2(r, \theta) = \frac{B}{2}\left[2\varkappa(R_1^2 + R_3^2)\ln\frac{R_3}{r} + \frac{2}{\varkappa}(R_3^2 - r^2) - \right.$$
$$\left. - \left(r^2 - (R_1^2 + R_3^2) + \frac{R_1^2R_3^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right],$$

где

$$B = \left[\varkappa(R_1^2 + R_3^2)\ln\frac{R_3}{R_1} + \frac{1}{\varkappa}(R_3^2 - R_1^2)\right]^{-1}; \qquad \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}.$$

В дальнейшем важную роль играет такая величина:

$$H(\psi^p, \psi^r) = \int\limits_{K_3\setminus K_1} W(\psi^p, \psi^r)\,dx,$$

где

$$W(u, v) = \frac{1}{2}\sum_{i, k, l, m=1}^{2} c_{iklm}\varepsilon_{ik}(u)\,\varepsilon_{lm}(v).$$

Оценим ее в предположении, что $R_j^{(n)} \to 0$ (индексы j и n опускаем так, что $R_j^{(n)} = R$):

$$H(\psi^p, \psi^r) = a_{pr}(\lambda, \mu) |\ln R|^{-1} + 0(|\ln R|^{-2}) \tag{2.4}$$

где

$$a_{pr}(\lambda, \mu) = 2\pi\mu \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + 3\mu} \delta_{pr}.$$

При условии $\overline{R} = \overline{R}_j^{(n)} \to 0$ нетрудно получить следующие оценки, необходимые при доказательстве леммы:

$$\int_{K_3 \setminus K_1} |\psi_i^p| |\psi_k^r| \, dx \leqslant C(R^2 + \overline{R}^2 |\ln R|^{-2}), \qquad p, i, r, k = 1, 2, \tag{2.5}$$

$$\int_{K_3 \setminus K_1} |\psi_k^p| \, dx \leqslant C(R^2 + \overline{R}^2 |\ln R|^{-1}), \ p, k = 1, 2 \tag{2.6}$$

$$\int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla \psi_i^p| |\psi_k^r| \, dx \leqslant CR |\ln R|^{-1}, \qquad p, i, r, k = 1, 2, \tag{2.7}$$

$$\int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla \psi_k^p| \, dx \leqslant C\overline{R} |\ln R|^{-1} \qquad p, k, = 1, 2 \tag{2.8}$$

$$\int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla \psi_k^p|^2 \, dx \leqslant C |\ln R|^{-1}, \qquad p, k = 1, 2 \tag{2.9}$$

$$\int_{K_3 / K_1} |\nabla \psi_i^p| |\delta_{rk} - \psi_k^r| \, dx \leqslant C\overline{R} |\ln R|^{-1}, \qquad p, i, r, k = 1, 2, \tag{2.10}$$

Пусть $\overline{K}_3$ — круг, концентрический с кругом K_3, радиусом $\frac{1}{2} R_3$. В кольце $K_3 \setminus \overline{K}_3$ имеют место такие оценки:

$$\max |\psi_k^p| \leqslant C |\ln R|^{-1}, \qquad p, k = 1, 2, \tag{2.11}$$

$$\max |\nabla \psi_k^p| \leqslant C\overline{R}^{-1} |\ln R|^{-1} \qquad p, k = 1,2. \tag{2.12}$$

Наряду с формулой (2.4) справедлива и такая:

$$\int_{\overline{K}_3 \setminus K_1} W(\psi^p, \psi^r) \, dx = a_{pr}(\lambda, \mu) |\ln R|^{-1} + O(|\ln R|^{-2}). \tag{2.13}$$

Во всех оценках постоянная C от n не зависит. Всюду в дальнейшем буквой C обозначаем постоянные от n не зависящие.

§ 3. Доказательство леммы

1. Докажем левое неравенство (5). Условие 1) теоремы позволяет в каждое множество $F_j^{(n)}$ погрузить круг $K_1 = K_{1j}^{(n)}$ радиуса $R_1 = R_{1j}^{(n)}$. В силу условий 2) и 4) можно построить непересекающиеся между собой круги $K_3 = K_{3j}^{(n)}$ радиусов $R_3 = R_{3j}^{(n)}$ концентрические с кругами $K_{1j}^{(n)}$. Пусть u есть слабый предел подпоследовательности $u^{(n_k)}$, которую в дальнейшем будем обозначать через $u^{(n)}$.

Пусть вектор $u_\delta \in \overset{\circ}{C}{}^2(D)$ (дважды непрерывно дифференцируемый и обращающийся в нуль в окрестности границы ∂D) аппроксимирует вектор u, т. е.

$$\lim_{\delta\to 0} \| u - u_\delta \|_1 = 0. \tag{3.1}$$

Вектор $u^{(n)}$ представим в виде

$$u^{(n)} = u_\delta + f^{(n)} + h^{(n)}, \tag{3.2}$$

при этом

$$f^{(n)} = -\eta_j \sum_{p=1}^{2} u_{\delta p} \psi_j^p,$$

где $u_{\delta p}$ — компоненты вектора u в местной системе координат, отнесенной к центру круга $K_{1j}^{(n)}$; векторы ψ_j^p $(j = 1, \ 2, \dots n)$ — решения уравнения (2.1)-(2.3) в кольце $K_{3j}^{(n)} \setminus K_{1j}^{(n)}$; функция $\eta_j = \eta_j = \eta_1\left(\frac{r}{R_{3j}^{(n)}}\right)$, $\eta_1(t) \in C^\infty(0, \ \infty)$ и $\eta_1(t) \equiv 1$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $\eta_1 \equiv 0$ при $t \geqslant 1$. Из представления (3.2) вытекает, что $h^{(n)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и вектор

$$g^{(n)} = f^{(n)} + h^{(n)} \tag{3.3}$$

слабо в метрике $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ сходится (при $n \to \infty$) к вектору $u - u_\delta$.

Значение функционала J на векторе $u^{(n)}$ равно $J(u^{(n)}) =$

$$= H(u^{(n)}) - (K, \ u^{(n)}) = J(u_\delta) + H(f^{(n)}) + H(h^{(n)}) + \\ + 2H(u_\delta, \ g^{(n)}) + 2H(f^{(n)}, \ h^{(n)}) - (K, \ g^{(n)}). \tag{3.4}$$

Учитывая положительность формы $H(h^{(n)})$, получаем

$$J(u^{(n)}) \geqslant J(u_\delta) + H(f^{(n)}) - [2\,|H(f^{(n)}, \ h^{(n)})| + \\ + 2\,|H(u_\delta, \ g^{(n)})| + (K, \ g^{(n)})\,|]. \tag{3.5}$$

Для того чтобы оценить форму $H(f^{(n)})$, разобьем область D на куски S_α, ограниченные кусочно-гладкими кривыми ∂S_α, так, что $D = \bigcup_{\alpha=1}^{N} S_\alpha$. Это разбиение проведем так, чтобы максимальный диаметр $d \max d = (S_\alpha)$ множеств S_α был достаточно мал. Учитывая, что $f^{(n)} = 0$ вне кругов K_3, запишем:

$$H(f^{(n)}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \int_{K_3 \setminus K_1} W(f^{(n)})\,dx + \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \int_{K_1} W(f^{(n)})\,dx + \\ + \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)}' \int_{K_3 \cap S_\alpha} W(f^{(n)})\,dx = J_1 + J_2 + J_3. \tag{3.6}$$

Здесь $\sum\limits_{(S_\alpha)}$ означает суммирование по тем значениям j, для которых круги K_{3j} лежат строго внутри S_α, а $\sum\limits_{(S_\alpha)}'$ — по тем значениям j, для которых круги K_{3j} пересекаются с границей ∂S_α.

Тензор деформации на векторе $f^{(n)}$ равен

$$\varepsilon_{ik}(f^{(n)}) = -[\eta u_{\delta p}\varepsilon_{ik}(\psi^p) + a_{ik} + b_{ik}],$$

где

$$a_{ik} = \frac{1}{2}\eta\left(\frac{\partial u_{\delta p}}{\partial x_k}\psi_i^p + \frac{\partial u_{\delta p}}{\partial x_i}\psi_k^p\right),$$

$$b_{ik} = \frac{1}{2}u_{\delta p}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\psi_i^p + \frac{\partial \eta}{\partial x_i}\psi_k^p\right)$$

(здесь и далее по дважды встречающемуся индексу проводится суммирование от 1 до 2). Следовательно, подставляя значение $\varepsilon_{ik}(f^{(n)})$ в J_1, найдем:

$$J_1 = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{(S_\alpha)}\int\limits_{K_3\setminus K_1} W(f^{(n)})\,dx \geqslant \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{(S_\alpha)}\int\limits_{\overline{K}_3\setminus K_1} u_{\delta p}u_{\delta r}W(\psi^p, \psi^r)\,dx -$$

$$-\Bigg|\sum_{(D)}\int\limits_{K_3\setminus K_1}\frac{1}{2}\eta c_{iklm}u_{\delta p}\varepsilon_{ik}(\psi^p)(a_{lm}+b_{lm})\,dx +$$

$$+\sum_{(D)}\frac{1}{8}\int\limits_{K_3\setminus K_1} c_{iklm}(a_{ik}+b_{ik})(a_{lm}+b_{lm})\,dx +$$

$$+\sum_{(D)}\int\limits_{K_3\setminus \overline{K}_3}\eta^2 u_{\delta p}u_{\delta r}W(\psi^p, \psi^r)\,dx\Bigg|,$$

где $\overline{K}_3 = \overline{K}_{3j}^{(n)}$ — круг радиусом $\frac{1}{2}R_{3j}^{(n)}$, концентрический с кругом $K_{3j}^{(n)}$. Оценивая компоненты $u_{\delta p}$ и их производные по модулю, можем записать:

$$J_1 \geqslant \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{(S_\alpha)}\int\limits_{\overline{K}_3\setminus K_1} u_{\delta p}u_{\delta r}W(\psi^p, \psi^r)\,dx -$$

$$-C(\delta)\sum_{(D)}\Bigg\{\int\limits_{K_3\setminus K_1}\sum_{p,i,r,k}|\nabla\psi_i^p||\psi_k^r|(1+|\nabla\eta|)\,dx +$$

$$+\int\limits_{K_3\setminus K_1}\sum_{p,i,r,k}|\psi_i^p||\psi_k^r|(1+|\nabla\eta|+|\nabla\eta|^2)\,dx +$$

$$+\int\limits_{K_3\setminus \overline{K}_3}\sum_{p,i,r,k}|\nabla\psi_i^p||\nabla\psi_k^r|\,dx\Bigg\}.$$

Из свойств функции η вытекает, что модуль ее градиента допускает оценку

$$\max|\nabla\eta| \leqslant C[\overline{R}_j^{(n)}]^{-1}. \tag{3.7}$$

Используя неравенства (2.7), (2.5), (2.11), (2.12), (3.7) и условие 3) теоремы, получим

$$J_1 \geqslant \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \int_{\overline{K}_3 \setminus K_1} u_{\delta p} u_{\delta r} W(\psi^p, \psi^r)\, dx - C \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)}.$$

Пусть x_α — фиксированная точка, принадлежащая S_α. Тогда, используя формулу (2.13) и непрерывную дифференцируемость функций $u_{\delta p}$, получим

$$J_1 \geqslant \sum_{\alpha=1}^{N} u_{\delta p}(\bar{x}_\alpha)\, u_{\delta r}(\bar{x}_\alpha) \sum_{(S_\alpha)} \int_{\overline{K}_3 \setminus K_1} W(\psi^p, \psi^r)\, dx -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{S_\alpha} W(\psi^p, \psi^r)\, [u_{\delta p}(x_\alpha)\, u_{\delta r}(\bar{x}_\alpha) - u_{\delta p}(x)\, u_{\delta r}(x)]\, dx -$$

$$- C \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} \geqslant \sum_{\alpha=1}^{N} a_{pr}(\lambda, \mu)\, u_{\delta p}(x_\alpha)\, u_{\delta r}(\bar{x}_\alpha) \sum_{(S_\alpha)} \{|\ln R_j^{(n)}|^{-1} +$$

$$+ C\, |\ln R_j^{(n)}|^{-2}\} - C(\delta)\, d \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} |\ln R_j^{(n)}|^{-1} - C \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)}.$$

Из условия 3) теоремы вытекает

$$\sum_{(S_\alpha)} |\ln R_j^{(n)}|^{-1} \geqslant \int_{S_\alpha} q(x)\, dx\, [1 - \varepsilon(n)],$$

причем

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon(n) = 0.$$

Следовательно, учитывая условие 4) теоремы, получаем

$$J_1 \geqslant \sum_{\alpha=1}^{N} a_{pr}(\lambda, \mu)\, u_{\delta p}(x_\alpha)\, u_{\delta r}(\bar{x}_\alpha) \int_{S_\alpha} q(x)\, dx -$$

$$- C(\delta) \int_{\alpha} q(x)\, dx\, [\varepsilon(n) + d] - C(\delta) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} R_j^{(n)}.$$

Далее, это неравенство перепишем так:

$$J_1 \geqslant \int_D a_{pr}(\lambda, \mu)\, q(x)\, u_{\delta p}(x)\, u_{\delta r}(x)\, dx - \sum_{\alpha=1}^{N} a_{pr}(\lambda, \mu) \times$$

$$\times \int_{S_\alpha} q(x)\, [u_{\delta \kappa}(x)\, u_{\delta p}(x) - u_{\delta p}(x_\alpha)\, u_{\delta r}(x_\alpha)]\, dx - \varepsilon(n, d).$$

Используя дифференцируемость компонент $u_{\delta p}$ и непрерывность $q(x)$ заключаем, что второе слагаемое есть величина порядка $O(d)$. Таким образом,

$$J_1 \geqslant (Qu_\delta, u_\delta) - \varepsilon(n, d), \tag{3.8}$$

где $\lim\limits_{d \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon(n, d) = 0$.

Для того, чтобы оценить величину J_3, проведем аналогичные рассуждения, но при этом все величины будем оценивать сверху. Учитывая, что суммирование в J_3 ведется лишь по тем кругам $K_{3j}^{(n)}$, которые пересекаются с границей ∂S_α множества S_α, можно получить такую оценку:

$$J_3 \leqslant C(\delta) N \cdot d \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Совсем просто оценивается величина J_2. Действительно, учитывая условия 2), 3) и 5) теоремы, находим

$$J_2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \int_{K_1} W(u_\delta)\, dx \leqslant C(\delta) \sum_{(D)} [R_{1j}^{(n)}]^2 \leqslant C(\delta) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} [R_j^{(n)}]^2 \times$$
$$\times |\ln R_j^{(n)}| \sum_{(D)} \ln R_j^{(n)}|^{-1} \leqslant C(\delta) \left[\int_D q(x)\, dx\right] \max_{1 \leqslant j \leqslant n} R_j^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

Таким образом, из неравенств (3.6), (3.8—3.10) вытекает

$$H(f^{(n)}) \geqslant (Qu_\delta, u_\delta) - \varepsilon(n, d), \tag{3.11}$$

где

$$\lim_{d \to 0} \lim_{n \to \infty} \varepsilon(n, d) = 0.$$

Попутно отметим, что точно так же можно получить оценку сверху:

$$H(f^{(n)}) \leqslant (Qu_\delta, u_\delta) + 1 \leqslant C(\delta), \tag{3.12}$$

т. е. последовательность $f^{(n)}$ равномерно по n ограничена в метрике $H(u)$.

Покажем, что последовательность $f^{(n)}$ слабо в метрике $H(u)$ сходится к нулю. В силу (3.12) достаточно доказать сходимость $f^{(n)}$ на плотном множестве, т. е. на гладких векторах. Пусть v — произвольный гладкий вектор. Тогда, учитывая равенство нулю вектора $f^{(n)}$ вне кругов K_3, получим

$$|H(v, f^{(n)})| = \left|\sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_1} W(v, f^{(n)})\, dx + \sum_{(D)} \int_{K_1} W(v, -u_\delta)\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant C \left\{\sum_{(D)} \left[\int_{K_3 \setminus \overline{K}_3} |\nabla v| |\nabla \eta| \sum_{p,k} |\psi_k^p| |u_{\delta p}|\, dx + \right.\right.$$
$$+ \int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla v| |\eta| \sum_{p,k} |\nabla \psi_k^p| |u_{\delta p}|\, dx + \int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla v| |\eta| \sum_{p,k} |\psi_k^p| |\nabla u_{\delta p}|\, dx +$$
$$\left.\left. + \int_{K_1} |\nabla v| |\nabla u_\delta|\, dx\right]\right\} = C\{J_1 + J_2 + J_3 + J_4\}.$$

Оценивая в J_1 подынтегральное выражение по модулю и используя оценки (2.11) и (3.7), находим

$$J_1 \leqslant C(v, u_\delta) \sum_{(D)} \overline{R}_j^{(n)} |\ln R_j^{(n)}|^{-1}.$$

Точно так же, применяя оценки (2.8) и (2.6), можно получить

$$J_2 \leqslant C(v,\ u_\delta) \sum_{(D)} \overline{R}_j^{(n)} |\ln R_j^{(n)}|^{-1},$$

$$J_3 \leqslant C(v,\ u_\delta) \sum_{(D)} \{[R_j^{(n)}]^2 + [\overline{R}_j^{(n)}]^2 |\ln R_j^{(n)}|^{-1}\},$$

$$J_4 \leqslant C(v,\ u_\delta) \sum_{(D)} [R_j^{(n)}]^2.$$

Условия 3) и 5) теоремы показывают, что

$$\lim_{n\to\infty} J_k = 0, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Мы получили, что вектор $f^{(n)}$ слабо в метрике $H(u)$ (и значит слабо в метрике $W_2^1(D)$) сходится к нулю. Но тогда, в силу равенства (3.3), вектор $h^{(n)}$ слабо сходится к вектору $u - u_\delta$. Это обстоятельство позволяет в выражении (3.5) оценить билинейную форму $H(f^{(n)},\ h^{(n)})$ сверху. Действительно, применяя формулу Бетти, получаем

$$H(f^{(n)},\ h^{(n)}) = \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_1} [h_1^{(n)} (Af^{(n)})_1 + h_2^{(n)} (Af^{(n)})_2]\, dx + \\ + \sum_{(D)} \int_{\partial K_3 \bigcup \partial K_1} t(f^{(n)}) \cdot h^{(n)}\, dS, \tag{3.13}$$

где $h_i^{(n)}$ — компоненты вектора $h^{(n)}$;

$$(Af^{(n)})_1 = \mu \Delta f_1^{(n)} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (f_1^{(n)}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (f_2^{(n)}) \right],$$

$$(Af^{(n)})_2 = \mu \Delta f_2^{(n)} + (\lambda + \mu) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (f_2^{(n)} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (f_1^{(n)}) \right],$$

$t(f^{(n)}) = \frac{1}{2} C_{iklm} \varepsilon_{lm} (f^{(n)}) \cos(\nu,\ x_i) x_k^0$ — вектор напряжений. *Поскольку* η *и* ψ^p *обращаются* в нуль на ∂K_3, а $h^{(n)}$ — на ∂K_1, поверхностные интегралы в (3.13) равны нулю. Значение оператора A на векторе $f^{(n)} = -\eta u_{\delta p} \psi^p$ будет содержать слагаемые, в которые войдут вторые производные от функций η. Соответствующие интегральные слагаемые проинтегрируем по частям для того, чтобы избавиться от вторых производных функции η, при этом поверхностные интегралы *снова окажутся равными* нулю за счет обращения в нуль ψ^p на ∂K_3 и $\frac{\partial}{\partial \nu}(\eta)$ на ∂K_1. Очевидно, что при этом интегрировании по частям появятся слагаемые, содержащие первые производные от $h_1^{(n)}$ и $h_2^{(n)}$. Наконец, учитывая, что ψ^p удовлетворяет уравнению (2.1), можем первое слагаемое в (3.13) оценить так:

$$\left| \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_1} h_1^{(n)} (Af^{(n)})_1\, dx \right| \leqslant C \left\{ \sum_{(D)} \left[\int_{K_3 \setminus \overline{K}_1} |\nabla \eta| \sum_{p,\ k} |\psi_k^p| |\nabla u_{\delta p}| |h_1^{(n)}|\, dx + \right.\right.$$

$$+\int\limits_{K_3\setminus\overline{K}_3}|\nabla\eta|\sum_{p,\,k}|\psi_k^p||u_{\delta p}||\nabla h_1^{(n)}|\,dx+\int\limits_{K_3\setminus\overline{K}_3}|\nabla\eta|\sum_{p,\,k}|\nabla\psi_k^p||u_{\delta p}|\times$$

$$\times|h_1^{(n)}|\,dx+\int\limits_{K_3\setminus K_1}|\eta|\sum_{i,\,m,\,p,\,k}\left|\frac{\partial^2 u_{\delta p}}{\partial x_i\partial x_m}\right||\psi_k^p||h_1^{(n)}|\,dx+$$

$$+\int\limits_{K_3\setminus K_1}|\eta|\sum_{p,\,k}|\nabla\psi_k^p||\nabla u_{\delta p}||h_1^{(n)}|\,dx\Big]\Big\}=$$

$$=C\{J_1+J_2+J_3+J_4+J_5\}. \tag{3.14}$$

Как известно [4], в случае плоской области имеет место вложения пространства $W_2^1(D)$ в пространство $L_4(D)$ (и тем более в $L_2(D)$), причем оператор вложения вполне непрерывен. Поэтому из слабой сходимости последовательности $h^{(n)}$ в метрике $W_2^1(D)$ к вектору $u-u_\delta$ вытекает сходимость $h^{(n)}$ к тому же вектору в метрике $L_4(D)$ и $L_2(D)$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\|h^{(n)}\|\leqslant\|u-u_\delta\|+\varepsilon(n), \tag{3.15}$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_4(D)$ либо в $L_2(D)$, а $\varepsilon(n)$ стремится к нулю при $n\to\infty$.

Применяя неравенство Шварца и пользуясь оценками (2.11), (3.7), (3.15) и условием 4) теоремы, находим, что величина J_1 допускает оценку

$$J_1\leqslant C\sum_{(D)}[\overline{R}_j^{(n)}|\ln R_j^{(n)}|]^{-1}\int\limits_{K_3}|\nabla u_\delta||h^{(n)}|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{M}\|u_\delta\|_1\|h^{(n)}\|_0\leqslant 2C\sqrt{M}\|u\|_1[\|u-u_\delta\|+$$

$$+\varepsilon(n)]=\varepsilon(n,\,\delta), \tag{3.16}$$

где в силу (3.1) и теоремы вложения

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n,\,\delta)=0.$$

При оценке величины J_2 воспользуемся равномерной ограниченностью последовательности норм $\|h^{(n)}\|_1$, которая вытекает из слабой сходимости $h^{(n)}$ к $u-u_\delta$. Тогда оценки (3.7), (2.11) и условия 4), 5) теоремы дадут

$$J_2\leqslant C(\delta)\sum_{(D)}[\overline{R}_j^{(n)}|\ln R_j^{(n)}|]^{-1}\int\limits_{K_3}|\nabla h_1^{(n)}|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)\sqrt{\sum_{(D)}|\ln R_j^{(n)}|^{-2}}\sqrt{\sum_{(D)}\int\limits_{K_3}|\nabla h_1^{(n)}|^2\,dx}\leqslant$$

$$\leqslant C(\delta)\|h^{(n)}\|_1\sqrt{M}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\overline{R}_j^{(n)}=\varepsilon(n), \tag{3.17}$$

где $\varepsilon(n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Применяя неравенство Гельдера, используя оценки (2.12), (3.7), (3.15), найдем, что J_3 допускает такую оценку:

$$J_3 \leqslant C \sqrt{\sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus \overline{K}_3} |\nabla \eta|^2 \sum_{p,\,k} |\nabla \psi_k^p|^2 \, dx} \; \sqrt[4]{\int_D |u_\delta|^4 \, dx} \; \times$$

$$\times \sqrt[4]{\int_D |h^{(n)}|^4 \, dx} \leqslant 2C\sqrt{M} \, \| u \|_4 \, \| h^{(n)} \|_4 \leqslant C \, [\| u - u_\delta \| +$$

$$+ \varepsilon(n)] = \varepsilon(n, \delta), \tag{3.18}$$

причем согласно (3.1) и теоремам вложения

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} \varepsilon(n, \delta) = 0.$$

С помощью оценок (2.5), (3.15) и условий 2)—5) теоремы легко получить

$$J_4 \leqslant C(\delta) \, \| h^{(n)} \|_0 \sqrt{\sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_1} \sum_{p,\,k} |\psi_k^p|^2 \, dx} \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta) \sqrt{\sum_{(D)} \{[R_j^{(n)}]^2 + [\overline{R}_j^{(n)}]^2 \, |\ln R_j^{(n)}|^{-2}\}} \leqslant$$

$$\leqslant C(\delta) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} \to 0, \quad \text{при } n \to \infty. \tag{3.19}$$

Применяя неравенство Шварца и теорему о среднем к величине J_5, можем записать

$$J_5 \leqslant C \, \| h^{(n)} \|_0 \sqrt{\sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_1} \sum_{p,\,k} |\nabla u_{\delta p}|^2 \, |\nabla \psi_k^p|^2 \, dx} =$$

$$= C \, \| h^{(n)} \|_0 \sqrt{\sum_{(D)} \sum_{p,\,k} |\nabla u_{\delta p}(\overline{x}_j)|^2 \int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla \psi_k^p|^2 \, dx},$$

где x_j — некоторая точка в кольце $K_{3j} \setminus K_{1j}$.
В силу (2.9) и условия 3) теоремы, имеем

$$\sum_{(D)} \sum_{p,\,k} |\nabla u_{\delta p}(\overline{x}_j)|^2 \int_{K_3 \setminus K_1} |\nabla \psi_k^p|^2 \, dx \leqslant \sum_{(D)} |\nabla u_\delta(\overline{x}_j)|^2 \int_{K_3} q(x) \, dx \; \times$$

$$\times [1 + \varepsilon(n)] \leqslant C \sum_{(D)} |\nabla u_\delta(\overline{x}_j)|^2 \, \mathrm{mes}\, K_{3j}^{(n)} \leqslant C \, \| \nabla u \|_0^2.$$

Следовательно, учитывая (3.15),

$$J_5 \leqslant C \, [\| u - u_\delta \|_0 + \varepsilon(n)] \, \| u \|_1 = \varepsilon(n, \delta), \tag{3.20}$$

причем согласно (3.1) и теоремам вложения

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} \varepsilon(n, \delta) = 0.$$

Таким образом, из неравенств (3.14), (3.16)—(3.20) вытекает

$$\left| \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_1} h_1^{(n)} (Af^{(n)})_1 \, dx \right| \leqslant \varepsilon(n, \delta),$$

где

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n,\ \delta)=0.$$

Совершенно аналогично оценивается второе слагаемое в (3.13):

$$\left|\sum_{(D)}\int_{K_3\setminus K_1} h_2^{(n)}(Af^{(n)})_2\,dx\right|\leqslant\varepsilon(n,\ \delta)$$

и

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n,\ \delta)=0.$$

Поэтому согласно (3.13) имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}H(f^{(n)},\ h^{(n)})=0. \qquad (3.21)$$

Наконец, поскольку $g^{(n)}$ слабо сходится к вектору $u-u_\delta$, легко получить такие соотношения:

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}H(u_\delta,\ g^{(n)})=0, \qquad (3.22)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}(K,\ g^{(n)})=0. \qquad (3.23)$$

Таким образом, оценки (3.5), (3.11), (3.21)—(3.23) дают

$$J(u^{(n)})\geqslant J_Q(u_\delta)-\varepsilon(n,\ \delta,\ d),$$

где

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\delta\to 0}\lim_{n\to\infty}\varepsilon(n,\ \delta,\ d)=0.$$

Отсюда, с учетом (3.1), легко следует левое неравенство (5).

2. Перейдем к доказательству правого неравенства (5). В силу условия 1) теоремы каждое множество можно погрузить в круг $K_2=K_{2j}^{(n)}$ радиуса $R_2=R_{2j}^{(n)}$ и, согласно условиям 2) и 4), можно построить непересекающиеся между собой круги $K_3=K_{3j}^{(n)}$ радиусами $R_3=R_{3j}^{(n)}$, концентрические с кругами $K_{2j}^{(n)}$. Для каждого кольца $K_{3j}\setminus K_{2j}$ построим вектор ψ_j^p, удовлетворяющий уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2), (2.3). Пусть вектор $v\in\dot{C}^1(D)$ — произвольный. Построим такой вектор:

$$\varphi^{(n)}=\begin{cases} v(x), & x\in D\setminus\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n}K_{3j}^{(n)}\right),\\ \varphi_j^{(n)}=v_p(x)\,[e_j^p-\psi_j^p(x)], & x\in\bigcup\limits_{j=1}^{n}(K_{3j}^{(n)}\setminus K_{2j}^{(n)}),\\ 0 & x\in\bigcup\limits_{j=1}^{n}K_{2j}^{(n)},\end{cases} \qquad (3.24)$$

где v_p — компоненты вектора v в местной системе координат, отнесенной к центру круга $K_{2j}^{(n)}$; векторы $e_j^1=(1,0), e_j^2=(0,\ 1)$ — постоянные.

Очевидно, вектор $\varphi^{(n)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D^{(n)})$, и потому

$$J(u^{(n)}) \leqslant J(\varphi^{(n)}) = H(\varphi^{(n)}) - (K,\ \varphi^{(n)}) = H(v) - (K,\ v) + \\ + H(\varphi^{(n)}) - H(v) + (K,\ v - \varphi^{(n)}) = J(v) + H(\varphi^{(n)}) - \\ - H(v) + (K,\ v - \varphi^{(n)}). \tag{3.25}$$

Для того, чтобы оценить разность $H(\varphi^{(n)}) - H(v)$, разобъем область D на куски S_α с кусочно-гладкой границей так, что $D = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} S_\alpha$, причем $d = \max d(S_\alpha)$ — максимальный диаметр множеств S_α достаточно мал. Тогда

$$H(\varphi^{(n)}) - H(v) = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{S_\alpha} [W(\varphi^{(n)}) - W(v)]\, dx =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \int_{K_3 \setminus K_2} [W(\varphi_j^{(n)}) - W(v)]\, dx - \sum_{(G)} \int_{K_2} W(v)\, dx +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)}{}' \int_{K_3 \bigcap S_\alpha} [W(\varphi_j^{(n)}) - W(v)]\, dx = J_1 + J_2 + J_3.$$

В силу неотрицательности формы $W(v)$ получим

$$H(\varphi^{(n)}) - H(v) \leqslant J_1 + J_3. \tag{3.26}$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$J_1 = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \int_{K_3 \setminus K_2} W(v_p(e^p - \psi^p)) - W(v)]\, dx =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(S_\alpha)} \Big\{ \int_{K_3 \setminus K_2} v_p v_r W(\psi^p,\ \psi^r)\, dx - \int_{K_3 \setminus K_2} v_p c_{iklm} \varepsilon_{ik}(\psi^p) \Delta_{lm}(v)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{K_3 \setminus K_2} c_{iklm} [\Delta_{ik}(v) \Delta_{lm}(v) - \varepsilon_{ik}(v) \varepsilon_{lm}(v)]\, dx \Big\} =$$

$$= J_1' + J_1'' + J_1''', \tag{3.27}$$

где

$$\Delta_{ik}(v) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_p}{\partial x_k} (\delta_{pi} - \psi_i^p) + \frac{\partial v_p}{\partial x_i} (\delta_{pk} - \psi_k^p) \right].$$

Оценку J_1' проведем аналогично (3.8). Воспользовавшись при этом формулой (2.4), условием 3) теоремы и оценив сверху, получим

$$J_1' \leqslant (Qv,\ v) + \varepsilon(n,\ d), \tag{3.28}$$

где

$$\lim_{d \to 0} \lim_{n \to \infty} \varepsilon(n,\ d) = 0.$$

Величина J_1'', с использованием (2.10) и условия 3) теоремы, оценивается так:

$$J_1'' \leqslant C(v) \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_2} \sum_{p,\, i,\, r,\, k} |\nabla \psi_i^p| \, |\delta_{rk} - \psi_k^r| \, dx \leqslant C(v) \sum_{(D)} \overline{R}_j^{(n)} \times$$

$$\times |\ln R_j^{(n)}|^{-1} \leqslant C(v) \int_D q(x) \, dx \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} = \varepsilon(n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.29}$$

Подставляя $\Delta_{lk}(v)$ в J_1''' и проводя ряд несложных оценок, получим

$$|J_1'''| \leqslant C(v) \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_2} \Big[\sum_{p,\, i,\, r,\, k} |\psi_i^p| \, |\psi_k^r| + \sum_{p,\, k} |\psi_k^p| \Big] dx.$$

Отсюда и из оценок (2.5), (2.6) вытекает

$$|J_1'''| \leqslant C(v) \sum_{(D)} \{ [R_j^{(n)}]^2 + [\overline{R}_j^{(n)}]^2 |\ln R_j^{(n)}|^{-2} \} = \varepsilon(n), \tag{3.30}$$

где в силу условий 3)—5) теоремы $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Объединяя оценки (3.27)—(3.30), заключаем

$$J_1 \leqslant (Qv, \ v) + \varepsilon(n, \ d), \tag{3.31}$$

причем $\lim\limits_{d \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon(n, \ d) = 0$.

Из полученной оценки для J_1 с учетом того, что в J_3 суммирование ведется лишь по тем кругам $K_{3j}^{(n)}$, которые лежат на границе кусков S_α, вытекает

$$J_3 \leqslant C(v) N \cdot d \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.32}$$

Таким образом, согласно (3.26), (3.31), (3.32), имеем

$$H(\varphi^{(n)}) - H(v) \leqslant (Qv, \ v) + \varepsilon(n, \ d), \tag{3.33}$$

где $\lim\limits_{d \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon(n, \ d) = 0$.

Для того чтобы оценить последнее слагаемое в (3.25), покажем, что

$$\| \varphi^{(n)} - v \|_0 = \varepsilon(n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.34}$$

Действительно, согласно (3.24)

$$\| \varphi^{(n)} - v \|_0^2 = \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_2} | \varphi^{(n)} - v |^2 \, dx + \sum_{(D)} \int_{K_2} | v |^2 \, dx = J_1 + J_2.$$

Используя оценки (2.5) и условия 3)—5) теоремы, получаем

$$J_1 \leqslant \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_2} | v_1 (\delta_{1l} - \psi_l^1) + v_2 (\delta_{2l} - \psi_l^2) - v_l |^2 \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C(v) \sum_{(D)} \int_{K_3 \setminus K_2} \sum_{p,\, i} | \psi_i^p |^2 \, dx \leqslant C(v) \sum_{(D)} \{ [R_j^{(n)}]^2 +$$

$$+ [\overline{R}_j^{(n)}]^2 | \ln R_j^{(n)} |^{-2} \} \leqslant C(v) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{R}_j^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Согласно условиям 2), 3), 5) теоремы имеем

$$J_2 \leqslant C(v) \sum_{(D)} [R_{2j}^{(n)}]^2 \leqslant C(v) \sum_{(D)} [R_j^{(n)}]^2 \leqslant C(v) \max_{1 \leqslant j \leqslant n} R_j^{(n)} \to 0, \ n \to \infty$$

Применяя неравенство Шварца и учитывая (3.34), находим

$$|(K, \varphi^{(n)} - v)| \leqslant \| K \|_0 \| \varphi^{(n)} - v \|_0 = \varepsilon(n) \to 0, \ n \to \infty \quad (3.3$$

Таким образом, из неравенств (3.25), (3.33) и (3.35) заключаем, что

$$J(u^{(n)}) \leqslant J_Q(v) + \varepsilon(n, d),$$

причем

$$\lim_{d \to 0} \lim_{n \to \infty} \varepsilon(n, d) = 0.$$

Тем самым доказано правое неравенство (5) для любого гладкого вектора v. Теперь нетрудно убедиться в справедливости этого неравенства и для любого вектора $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Лемма доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Е. Я. Хруслову за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Котляров. Первая краевая задача для уравнения теории упругости в области со сложной границей, I. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 15. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.

2. Е. Я. Хруслов. Метод ортогональных проекций и краевая задача Дирихле в областях с мелкозернистой границей. «Матем. сб.», т. 12, 1971.

3. С. Г. Михлин. Проблема минимума квадратичного функционала, М., Физматгиз, 1952.

4. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Ленинградск. ун-та, 1950.

Поступила 6 июля 1971 г.