О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. И. Горбайчук, Р. Н. Ковальчук

1°. Пусть G — односвязная область плоскости z, ограниченная спрямляемой кривой Жордана Γ. Через $\vartheta = \vartheta(s)$ обозначим угол, образуемый вещественной осью с касательной к кривой Γ в точке с дуговой координатой s. Функцию, однолистно отображающую единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$ на область G, обозначим через $z = \Psi(w)$, а функцию, ей обратную, — через $w = \Phi(z)$. Натуральный параметр s кривой Γ является функцией соответствующей точки $e^{i\theta}$ единичной окружности $\gamma = \{w : |w| = 1\}$, т. е. $s = s(\theta)$. О. Д. Келлог [1] доказал теорему*, которая устанавливает связь между дифференциально-разностными свойствами функции $\vartheta(s)$ и дифференциально-разностными свойствами на γ производной $\Psi'(w)$. Обозначая через $H^\alpha[x]$, $0 < \alpha < 1$, класс функций $f(x)$, которые по x удовлетворяют условию Гельдера порядка α, теорему Келлога можно сформулировать так: если

$$\vartheta(s) \in H^\alpha[s],\ 0 < \alpha < 1, \text{ то } \psi' \in H^\alpha[\theta],\ 0 < \alpha < 1.$$

В ряде работ [4—8] были получены обобщения этой теоремы, наиболее общими из которых являются результаты, полученные Я. Л. Геронимусом и У Сюэ-моу.

В работах [9, 10] теорема Келлога обобщена на второй модуль непрерывности частного вида, а в [11] она получила распространение на произвольные вторые модули непрерывности, но при дополнительном предположении, что мажоранта $\omega(t)$ второго модуля непрерывности, кроме обычных свойств (см. [12]):

---

* Позже другими методами эта теорема была доказана Г. М. Голузиным [2] и С. Е. Варшавским [3, 4].

1) $\omega(t)$ непрерывна на $[0, l]$, $\omega(0)=0$, $\omega(t)>0$ при $t \neq 0$;

2) $\omega(t)$ неубывает вместе с t;

3) для произвольного $\lambda > 0$ $\omega(\lambda t) \leqslant A_0(1+\lambda)^2 \omega(t)$, где A_0 — некоторая положительная постоянная, не зависящая от t и λ;

$$4) \int_0^l \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

удовлетворяет еще требованию:

5) для произвольного $C > 1$ существует $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\omega(Ct)}{\omega(t)}$.

Л. И. Колесник [13] изучала обращение результата Р. Н. Ковальчука и установила, что если $\Psi'(w)$ непрерывна на $\overline{D}$, а на γ отлична от нуля и $\omega_2(\Psi'; \delta) \leqslant A\delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$, то второй модуль непрерывности функции $\vartheta(s)$ удовлетворяет условию $\omega_2(\vartheta; \delta) \leqslant \leqslant A_1\delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Обозначим через $H_2^\omega[x]$ класс всех непрерывных функций $f(x)$, второй модуль непрерывности которых по x имеет мажоранту $\omega(t)$, обладающую свойствами 1) —5).

В этом сообщении мы распространяем результат Л. И. Колесник на функции класса H_2^ω и рассматриваем некоторые другие дифференциально-разностные свойства конформных отображений односвязных областей.

2°. Имеет место такая

Теорема 1. *Если $\Psi'(w)$ непрерывна в $\overline{D}$, а на γ отлична от нуля и $\Psi'(e^{i\theta}) \in H_2^\omega[\theta]$,* то $\vartheta(s) \in H_2^\omega[s]$.

Следствие. *При $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 2$, получаем результат Л. И. Колесник* [13].

Для доказательства этой теоремы потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Докажем сначала лемму, обобщающую на произвольные первые модули непрерывности одно предложение Ф. Хартмана [14].

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция $f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, удовлетворяет неравенству*

$$\omega_2(f; h) \leqslant |h| \lambda(|h|), \tag{1}$$

где $\lambda(\delta)$, $\delta \geqslant 0$, — функция типа первого модуля непрерывности, удовлетворяющая условию

$$\int_0^l \frac{\lambda(t)}{t} dt < \infty. \tag{2}$$

Тогда $f(s)$ имеет непрерывную производную $f'(s)$, модуль непрерывности $\omega_1(f'; h)$ которой удовлетворяет неравенству

$$\omega_1(f'; h) \leqslant 2\Omega(|h|), \tag{3}$$

где

$$\Omega(t) = \int_0^t \frac{\lambda(u)}{u}\,du. \tag{4}$$

Доказательство леммы 1. Как и в [14], рассмотрим ряд

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left\{ f\left(s + \frac{h}{2^k}\right) - 2f\left(s + \frac{h}{2^{k+1}}\right) + f(s) \right\} \tag{5}$$

и оценим, учитывая (1), его k-й член:

$$\left| 2^k \left\{ f\left(s + \frac{h}{2^k}\right) - 2f\left(s + \frac{h}{2^{k+1}}\right) + f(s) \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|h|}{2}\lambda\left(\frac{|h|}{2^{k+1}}\right) \leqslant |h| \int_{\frac{|h|}{2^{k+1}}}^{\frac{|h|}{2^k}} \frac{\lambda(t)}{t}\,dt.$$

Поэтому из (5), с учетом обозначения (4), имеем

$$|S| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |h| \int_{\frac{|h|}{2^{k+1}}}^{\frac{|h|}{2^k}} \frac{\lambda(t)}{t}\,dt = |h| \int_0^{|h|} \frac{\lambda(t)}{t}\,dt = |h|\,\Omega(|h|). \tag{6}$$

Из (6) и (2) следует, что ряд (5) сходится абсолютно и равномерно.

Легко проверить, что для частичной суммы S_k ряда (5) имеет место тождество

$$S_k = f(s + h) - f(s) - \frac{f\left(s + \frac{h}{2^{k+1}}\right) - f(s)}{\frac{h}{2^{k+1}}}\,h.$$

Факт непрерывной дифференцируемости функции $f(s)$ на $[0, l]$ можно установить на основании некоторых результатов теории приближения функций. Именно, по теореме Джексона [12, стр. 269] для каждой непрерывной функции $f(s)$, удовлетворяющей условию (1), ее наилучшее приближение $E_n(f)$ многочленами $P_n(s)$ степени $\leqslant n$ удовлетворяет неравенству

$$E_n(f) \leqslant A\frac{1}{n}\lambda\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но тогда условие (2) дает возможность воспользоваться обратными теоремами теории приближений [12, стр. 359—360, случай $r = 1$], в силу которых существует непрерывная производная $f'(s)$.

Следовательно, из равномерной сходимости ряда (5) вытекае справедливость равенства

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f\left(s+\frac{h}{2^{k+1}}\right)-f(s)}{\frac{h}{2^{k+1}}} = f'(s),$$

а потому

$$S = f(s+h) - f(s) - hf'(s). \tag{7}$$

Из (6) и (7) находим

$$|S| = |f(s+h) - f(s) - hf'(s)| \leqslant |h|\,\Omega(|h|). \tag{8}$$

Заменяя в правой части (8) s на $s+h$ и h на $-h$, получаем

$$|f(s) - f(s+h) + hf'(s+h)| \leqslant |h|\,\Omega(|h|). \tag{8'}$$

Из (8) и (8') вытекает неравенство

$$|f'(s+h) - f'(s)| \leqslant 2\Omega(|h|),$$

из которого получаем (3).

Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Функция $f(s)$, удовлетворяющая неравенству (1), гладкая [15, стр. 75]. Известно [15, стр. 83], что гладкая функция может быть недифференцируемой почти всюду. Условием (2) из класса гладких функций, удовлетворяющих условию (1), лемма 1 выделяет некоторый подкласс дифференцируемых функций.

Замечание 2. В дальнейшем (п. 3°) используем тот факт, что мажоранта модуля непрерывности $\omega_1(f'; t)$ в оценке (3) также является модулем непрерывности [см. 16, сноска, стр. 373].

Лемма 2. *Если функция $\Psi'(e^{i\theta})$ отлична от нуля* ($0 < m \leqslant |\Psi'(e^{i\theta})| \leqslant M < \infty$) *и* $\Psi'(e^{i\theta}) \in H_2^{\omega}[\theta]$, то на $\Gamma\Phi'[z(s)] \in H_2^{\omega}[s]$, где $z(s) = x(s) + iy(s)$ — параметрическое уравнение кривой Γ.

Доказательство леммы 2. Так как $\Psi'(w) \neq 0$ при $w \in \gamma$, то $\Phi'(z) = \frac{1}{\Psi'(w)}$ существует и непрерывна. Поэтому

$$\left|\Phi'[z(s_1)] - 2\Phi'\left[z\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)\right] + \Phi'[z(s_2)]\right| = \left|\frac{1}{\Psi'(e^{i\theta_1})} - \frac{2}{\Psi'(e^{i\theta_3})} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Psi'(e^{i\theta_2})}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\Psi'(e^{i\theta_1})} - \frac{2}{\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)} + \frac{1}{\Psi'(e^{i\theta_2})}\right| +$$

$$+ 2\left|\frac{1}{\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)} - \frac{1}{\Psi'(e^{i\theta_3})}\right| = P_1 + 2P_2. \tag{9}$$

Представляя P_1 в удобном для оценки виде и пользуясь известными оценками [17, леммы 1 и 2], получаем

$$P_1 = \left| \frac{1}{\Psi'(e^{i\theta_1})\,\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\Psi'(e^{i\theta_2})} \right| \cdot \Bigg| \Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\Psi'(e^{i\theta_2}) -$$

$$-2\Psi'(e^{i\theta_1})\,\Psi'(e^{i\theta_2}) + \Psi'(e^{i\theta_1})\,\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m^3}\Bigg|\left[\Psi'(e^{i\theta_1}) - 2\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \Psi'(e^{i\theta_2})\right]\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) +$$

$$+ 2\left[\Psi'^2\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) - \Psi'(e^{i\theta_1})\,\Psi'(e^{i\theta_2})\right]\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m^3}\Bigg\{M\left|\Psi'(e^{i\theta_1}) - 2\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \Psi'(e^{i\theta_2})\right| +$$

$$+ \left|\Psi'^2(e^{i\theta_1}) - 2\Psi'^2\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \Psi'^2(e^{i\theta_2})\right| +$$

$$+ \left|\Psi'(e^{i\theta_1}) - \Psi'(e^{i\theta_2})\right|^2\Bigg\} \leqslant A_1\omega(|\theta_2 - \theta_1|). \tag{10}$$

Известно [2, стр. 462], что длину дуги $s(\theta)$ можно представить в виде $s(\theta) = \int\limits_0^\theta |\Psi'(e^{it})|\,dt$, и так как $s(\theta)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция, то существует ей обратная функция $\theta = \theta(s)$. Из условия леммы 2 и того, что производная $\theta'(s) = \frac{1}{s'(\theta)} = \frac{1}{|\Psi'(e^{i\theta})|}$ существует и непрерывна на $[0, l]$, где l — длина дуги Г, следует что

$$\theta(s) \in H^1[s]. \tag{*}$$

Учитывая это, из (10) получаем

$$P_1 \leqslant A_1\omega(|\theta(s_2) - \theta(s_1)|) \leqslant A_1^*\omega(t), \tag{10'}$$

если $|s_2 - s_1| \leqslant t$.

Оценим P_2,

$$P_2 \leqslant \frac{1}{m^2}\left|\Psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) - \Psi'(e^{i\theta_2})\right| \leqslant \tilde{A}\omega_1\left(\Psi';\ \left|e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} - e^{i\theta_2}\right|\right).$$

Рассмотрим случаи:

1. Пусть существует такое $C > 1$, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\omega(Ct)}{\omega(t)} < C$.

Тогда [18, стр. 494]

$$t\int\limits_t^l \frac{\omega(u)}{u^2}\,du \leqslant A_2\omega(t),$$

поэтому (см. [12, стр. 119])

$$\omega_1(\Psi';\ t) \leqslant A_3\omega(t).$$

В таком случае для P_2 получаем

$$P_2 \leqslant A_4 \omega \left(\left| e^{i\theta_3} - e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \right| \right) \leqslant A_5 \omega \left(\left| e^{i2\theta_3} - e^{i(\theta_1+\theta_2)} \right| \right).$$

Но в силу гладкости Г, обозначений $e^{i\theta_1} = \Phi[z(s-h)]$, $e^{i\theta_2} = \Phi[z(s+h)]$, $e^{i\theta_3} = \Phi[z(s)]$ и того, что существует конечная производная Φ'_z, имеем

$$|(e^{i\theta_3})^2 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}| = |[\Phi[z(s)]]^2 - \Phi[z(s+h)] \cdot \Phi[z(s-h)]| \leqslant$$
$$\leqslant |[\Phi[z(s)]^2 - [\Phi[z(s+h)]]^2| + |\Phi[z(s+h)]| \times$$
$$\times |\Phi[z(s+h)] - \Phi[z(s-h)]| \leqslant A_7 |h|.$$

Следовательно,

$$P_2 \leqslant A_8 \omega(t), \quad 0 < |h| \leqslant t. \tag{11}$$

2. Пусть теперь не существует такого $C > 1$, чтобы $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\omega(Ct)}{\omega(t)} < C$, т. е. при каждом $C > 1$ имеем

$$\lim_{t\to 0} \frac{\omega(Ct)}{\omega(t)} \geqslant C. \tag{12}$$

Рассмотрим два случая:

a) Пусть существует такое $A > 0$, что $\omega(t) \geqslant At$. Тогда из (12) следует, что $\omega(t) \leqslant A_9 t^\alpha$, где α — любое, $0 < \alpha < 1$. Получаем $P_2 \leqslant A_{10} |\theta_1 - 2\theta_3 + \theta_2|^{\frac{1}{1+\beta}}$, $\beta > 0$ — любое. Обозначим $p(s) = \log \Phi[z(s)]$, тогда

$$|\theta_1 - 2\theta_3 + \theta_2| = |p(s+h) - 2p(s) + p(s-h)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_s^{s+h} |p'(\xi) - p'(\xi-h)|\, d\xi. \tag{13}$$

Но

$$p'(s) = \frac{\Phi'(z) \cdot z'_s}{\Phi(z)}. \tag{14}$$

Покажем, что $p'(s) \in H^\beta[s]$, $0 < \beta < 1$. Действительно, $|\Phi'(z_1) - \Phi'(z_2)| \leqslant \frac{1}{m^2} |\Psi'(w_2) - \Psi'(w_1)|$, а по неравенству Маршу

$$\omega_1(\Psi'; t) \leqslant A_{11} t \int_t^l \frac{\omega_2(\Psi'; u)}{u^2} du + O(t) \leqslant A_{12} t \int_t^l \frac{u^\beta}{u^2} du +$$
$$+ O(t) \leqslant A_{13} t^\beta,$$

и потому имеем $\omega_1(\Phi'; t) \leqslant A_{14} t^\beta$, $0 < \beta < 1$. Так как $\Phi(z) \in H^1$ и $z'_s(s) \in H^\beta[s]$ (см. [13, лемма 4]), то из (14) следует, что $p'(s) \in H^\beta[s]$, $0 < \beta < 1$. Вследствие этого из (13) имеем $|\theta_1 - 2\theta_3 + \theta_2| \leqslant A_{15} |h|^{1+\beta}$, следовательно, в случае а) для P_2 получаем оценку

$$P_2 \leqslant A_{16} |h| \leqslant \tilde{A}_{16} \omega(t), \quad 0 < |h| \leqslant t. \tag{15}$$

б) Пусть $\omega(t) = o(t)$. Положим $\lambda(t) = \frac{\omega(t)}{t}$. Легко проверить, что функция $\lambda(t)$ обладает свойствами:

1) $\lambda(t) \to 0$ при $t \to 0$; $\lambda(o) \overset{\text{def}}{=} 0$; 2) $\lambda(t_1 + t_2) \leqslant \lambda(t_1) + \lambda(t_2)$ для $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, а это означает, что $\lambda(t)$ является функцией типа модуля непрерывности.

Рассмотрим два случая:

α) существует такое $C > 1$, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} > 1$;

β) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\lambda(Ct)}{\lambda(t)} = 1$ для всех $C > 1$.

В случае α) имеем (см. [18])

$$\int_0^t \frac{\lambda(u)}{u} du < A_{17} \lambda(t),$$

поэтому $\int_0^t \frac{\lambda(u)}{u} du < \infty$, и мы находимся в условиях применимости леммы 1, согласно которой существует непрерывная производная $\Psi''(e^{i\theta})$ т. е $\Psi''(e^{i\theta}) \in H^1[\theta]$. Следовательно, $\Phi'(z) \in H^1[s[$ и так как $z'_s \in H^1[s]$, то из (14) получаем, что $p'(s) \in H^1[s]$. Таким образом, используя (13), для P_2 получаем оценку

$$P_2 \leqslant A_{18} |h|^2 \leqslant \tilde{A}_{18}\, \omega(t), \quad 0 < |h| \leqslant t \tag{16}$$

В случае β) существует такое $A_{19} > 0$, что $\lambda(t) \geqslant A_{19} t^{\alpha}$, α — произвольное, $0 < \alpha < 1$. Поэтому, учитывая, что если $\omega_2(\Psi'; t) = o(t)$, то по теореме Зигмунда (см. [12], стр. 119) $\omega_1(\Psi'; t) = o\left(t \log \frac{1}{t}\right)$, получаем $\Psi'(e^{i\theta}) \in H^{\alpha+\beta}[\theta]$ при любых положительных α и β, удовлетворяющих условию $\alpha + \beta < 1$. Но тогда $\Phi'[z(s)] \in H^{\alpha+\beta}[s]$, а потому из (14) получаем, что $p'(s) \in H^{\alpha+\beta}[s]$. В таком случае из (13) следует оценка $|\theta_1 - 2\theta_3 + \theta_2| \leqslant A_{20} |h|^{1+\alpha+\beta}$, $0 < \alpha + \beta < 1$, и так как $P_2 \leqslant A_{21} |\theta_1 - 2\theta_3 + \theta_2|^{\frac{1}{1+\beta}}$ при произвольном $\beta > 0$, то для P_2 получаем

$$P_2 \leqslant A_{22} |h|^{1 + \frac{\alpha}{1+\beta}} = A_{22} |h| \cdot |h|^{\gamma} \leqslant A_{23} |h| \lambda(|h|) = A_{23} \omega(|h|),$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{1+\beta}$, $0 < \gamma < 1$. Таким образом, и в этом случае

$$P_2 < A_{23} \omega(t), \quad 0 < |h| \leqslant t. \tag{17}$$

Учитывая оценки (9), (10′), (11), (15)—(17), получаем $\Phi'[z(s)] \in H_2^{\omega}[s]$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *В предположениях леммы 2 имеют место соотношения:*

а) $\frac{dz}{ds} = e^{i\vartheta(s)}$;

б) $e^{i\vartheta(s)} = i\Phi[z(s)]\, e^{i \arg \Psi'(e^{i\theta})}$

Доказательство леммы 3. а) пользуясь тем, что $\theta'(s) = \frac{1}{|\Psi'(e^{i\theta})|}$, одним результатом Линделёфа [2, стр. 409] и элементарными выкладками, получаем

$$\frac{dz}{ds} = \frac{d\Psi}{d\omega} i e^{i\theta} \frac{d\theta}{ds} = i \frac{d\Psi}{d\omega} e^{i\theta} \frac{1}{|\Psi'(e^{i\theta})|} = i e^{i\theta} e^{i \arg \Psi'(e^{i\theta})} =$$

$$= i e^{i\theta} e^{i\left[\vartheta(s) - \theta - \frac{\pi}{2}\right]} = e^{i\vartheta(s)};$$

б) дифференцируя по s тождество $\theta(s) = \frac{1}{i} \log \Phi[z(s)]$, получаем

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{i} \frac{\Phi_z'[z(s)] \cdot \frac{dz}{ds}}{\Phi[z(s)]}; \quad \frac{\Phi[z(s)]}{|\Psi'(e^{i\theta})|} = \frac{1}{i} \frac{\frac{dz}{ds}}{|\Psi'(e^{i\theta})|\, e^{i \arg \Psi'(e^{i\theta})}};$$

$$\Phi[z(s)] = \frac{1}{i} \frac{dz}{ds} e^{-i \arg \Psi'(e^{i\theta})}$$

Отсюда из а) получаем б).

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1. Так как

$$e^{i \arg \Psi'(e^{i\theta})} = \frac{\Psi'(e^{i\theta})}{|\Psi'(e^{i\theta})|},$$

то из условия теоремы легко получить, что

$$e^{i \arg \Psi'(e^{i\theta})} \in H_2^{\omega}(\theta),$$

а потому из соотношения (*) получаем

$$e^{i \arg \Psi'(e^{i\theta})} \in H_2^{\omega}[s], \quad \theta = \theta(s).$$

Это позволяет применить лемму 2 и часть б) леммы 3, вследствии чего получить, что $e^{i\vartheta(s)} \in H_2^{\omega}[s]$, и так как модули непрерывности второго порядка непрерывных на $[0, l]$ функций $e^{i\vartheta(s)}$ и $\vartheta(s)$ имеют один и тот же порядок (см. [13], лемма 5), то теорема 1 доказана.

3°. Пользуясь леммой 1, замечанием 2 к ней и результатами работ [11] и [8], легко убедиться в справедливости такого предложения.

Теорема 2. *Пусть второй модуль непрерывности производной n-го порядка $\vartheta^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию*

$$\omega_2(\vartheta^{(n)}; t) \leqslant t\lambda(t),$$

где $\lambda(t)$ — функция типа модуля непрерывности. Если $\lambda(t)$ удовлетворяет условию (2), то

$$\text{а) } \omega_2(\Psi^{(n+1)};\ t) \leqslant B_1 \left\{ t^2 \int_t^l \frac{\lambda(u)}{u^2}\, du + t\lambda(t) \right\};$$

$$\text{б) } \omega_2(\Phi^{(n+1)};\ t) \leqslant B_2 \left\{ t^2 \int_t^l \frac{\lambda(u)}{u^2}\, du + t\lambda(t) \right\};$$

и если $\lambda(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^l \frac{\lambda(u)}{u} \log \frac{l}{u}\, du < \infty, \tag{2'}$$

в) существует в $\overline{D}$ непрерывная производная $\Psi^{(n+2)}(w)$ и на γ ее модуль непрерывности $\omega_1(\Psi^{(n+2)};\ t)$ удовлетворяет условию

$$\omega_1(\Psi^{(n+2)};\ t) \leqslant B_3 \left\{ \int_0^t \frac{\lambda(u)}{u} \log \frac{t}{u}\, du + t \int_t^l \frac{\lambda(u)}{u^2}\, du \right\};$$

г) существует в $\overline{G}$ непрерывная производная $\Phi^{(n+2)}(z)$ и на Γ модуль непрерывности $\omega_1(\Phi^{(n+2)};\ t)$ удовлетворяет условию

$$\omega_1(\Phi^{(n+2)};\ t) \leqslant B_4 \left\{ \int_0^t \frac{\lambda(u)}{u} \log \frac{t}{u}\, du + t \int_t^l \frac{\lambda(u)}{u^2}\, du \right\};$$

где B_j, $j = 1, 2, 3, 4$, — положительные постоянные.

Аналогично из доказанной выше теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 3. *Если* $\Psi'(w)$ *непрерывна в* $\overline{D}$, а на γ *отлична от нуля и* $\omega_2(\Psi';\ t) \leqslant t\lambda(t)$, *то*

а) $\omega_2(\vartheta;\ t) \leqslant t\lambda(t)$,

б) существует непрерывная производная $\vartheta'(s)$ *и ее модуль непрерывности* $\omega_1(\vartheta';\ t)$ *удовлетворяет условию*

$$\omega_1(\vartheta';\ t) \leqslant K\Omega(t),$$

где $\lambda(t)$ *то же, что и в теореме 2,* $K > 0$ *— постоянная, а* $\Omega(t)$ *определено формулой (4).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Kellogg O. D. Harmonic functions and Greens integral. Trans. Amer. Math. Soc., V. 13, 1912, p. 109—132.
2. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966.
3. Warschawski S. E. Uber einen Satz von O. D. Kellogg, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Bd. 25, 1932, s. 73—86.
4. Warschawski S. E. On differentiability at the boundary in conformal mapping, Proc. Amer. Math. Soc., 12, 1961, p. 614—620.

5. С. Я. Альпер. О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области. ИАН СССР, серия матем., т. 19, № 6, 1955, 423—444.

6. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге. ДАН СССР, т. 98, № 6, 1954, 889—891.

7. Я. Л. Геронимус. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе. Матем. сб., т. 38 (80), № 3, 1956, 319—330.

8. Ou So-Mo. On some boundary properties of conformal mapping, Scientia Sinica, v. 7, № 2, 1958, p. 131—136.

9. Р. Н. Ковальчук. Об одном обобщении теоремы Келлога. УМЖ, т. 17, № 4, 1964, 104—108.

10. Р. Н. Ковальчук. Про модулі неперервності другого порядку похідних відображуючих функцій. Друга наукова конференція молодих математиків України, Київ, «Наукова думка», 1966, стор. 304—307.

11. Н. Н. Горбач, Р. Н. Ковальчук, В. И. Горбайчук. О некоторых граничных свойствах функций, осуществляющих конформные отображения. Изв. вузов. Математика. № 8, 1970, 39—47.

12. А. Ф. Тиман. Теория приближения функции действительного переменного. М. Физматгиз, 1960.

13. Л. И. Колесник. Обращение теоремы типа Келлога. УМЖ, т. 21, № 1, 1969, 104—108.

14. P. Hartman. Hölder continuity and non-linear eliptic partial differential eguations, Duke Math. I., v. 25, № 4, 1958, p. 57—65.

15. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1, М., «Мир», 1965.

16. В. К. Дзядык. Обратные теоремы теории приближения функций в комплексных областях. УМЖ, 15, № 4, 1963, с. 365—375.

17. Р. М. Тригуб. Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси. ДАН СССР, т. 132, № 2, 1960, стр. 303—306.

18. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 5, 1956, 488—522.

Поступила 6 июня 1971 г.