О ВПОЛНЕ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

М. В. Новицкий

Вполне выпуклой функцией на $[a, b]$ называется бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$(-1)^n f^{(2n)}(x) \geqslant 0$$

на $[a, b]$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$

Класс вполне выпуклых функций на $[a, b]$ будем обозначать $W_{[a, b]}$. Уиддер [1] показал, что любая функция из этого класса является целой функцией первого порядка типа $\frac{\pi}{b-a}$.

В. Э. Кацнельсоном был поставлен вопрос о получении интегрального представления для вполне выпуклых функций.

В работе проводится дальнейшее исследование класса $W_{[a, b]}$ и дается ответ на этот вопрос. Без ограничения общности можно полагать $[a, b] = [0,1]$. Класс $W_{[a, b]}$ будем обозначать W.

Предложение 1. Пусть $f \in W$, тогда

$$1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(2n)}(0)}{\pi^{2n}} < \infty; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f^{(2n)}(1)}{\pi^{2n}} < \infty;$$

2) существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi^{2n}} \int_0^1 (-1)^n f^{(2n)}(x) \sin \pi x \, dx;$$

3) $f(x)$ удовлетворяет оценке

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant B\pi^k$$

на $[0, 1]$, где B — константа.

Доказательство. Для любой бесконечно дифференцируемой функции справедливо равенство

$$\int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi^{2k+1}} [(-1)^k f^{(2k)}(0) + (-1)^k f^{(2k)}(1)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi^{2n+1}} \int_0^1 (-)^{n+1} f^{2(n+1)}(x) \sin \pi x \, dx, \quad \text{(I)}$$

получаемое интегрированием по частям.

Из того, что f принадлежит W следует 1), 2). Из (1) вытекает неравенство

$$\frac{1}{\pi^{2k}} \int_0^1 (-1)^k f^{(2k)}(x) \sin \pi x \, dx \leqslant \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx = A.$$

Зафиксируем δ, удовлетворяющее неравенству $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int_\delta^{1-\delta} (-1)^k f^{(2k)}(x) \, dx \leqslant \frac{A\pi^{2k}}{\sin \pi\delta}.$$

Известны [1. стр. 178] для f из класса W следующие оценки:

$$\max_{x\in[0,1]} |f^{(2k+1)}(x)| \leqslant \max_{x\in[0,1]} f^{(2k)}(x)| + \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f^{2(k+1)}(x)|, \quad \text{(II)}$$

$$(-1)^k f^{(2k)}(x) \leqslant 2 \int_0^1 (-1)^k f^{(2k)}(x) \, dx \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Используя их, получим неравенства

$$(-1)^k f^{(2k)}(x) \leqslant \frac{2A\pi^{2k}}{(1-2\delta)\sin \pi\delta},$$

$$f^{(2k+1)}(x) \leqslant \frac{2A\pi^{2k}}{(1-2\delta)\sin \pi\delta} + \frac{A\pi^{2(k+1)}}{(1+2\delta)\sin \pi\delta}, \quad x \in [\delta, 1-\delta].$$

Следовательно, на сегменте $[\delta, 1-\delta]$ справедлива оценка

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant B(\delta)\pi^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Разложим $f^{(k)}(x)$ в ряд Тейлора

$$f^{(k)}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{f^{(l+k)}(x_0)}{l!}(x-x_0)^l,\ x_0\in(\delta,\ 1-\delta).$$

Далее,

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant\sum_{l=0}^{\infty}\frac{|f^{(l+k)}(x_0)|}{l!}|x-x_0|^l\leqslant$$

$$\leqslant B(\delta)\pi^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\pi^l}{l!}|x-x_0|^l=\pi^k e^{\pi|x-x_0|}B(\delta).$$

Полагая $B=B(\delta)e^{\pi}$, получаем 3). Предложение 1 доказано. Для f из класса $W_{[a,\,b]}$ оценка 3) имеет вид

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^k\cdot B.$$

Следовательно, на бесконечном отрезке класс $W_{[a,\,b]}$ состоит из констант.

Определение. *Множеством граничных значений f из класса W назовем множество*

$$\Omega(f)=\Big\{(-1)^n f^{(2n)}(0),\ (-1)^n f^{(2n)}(1)\ n=$$
$$=0,\ 1,2\ \ldots\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi^{2n}}\int_0^1(-1)^n f^{(2n)}(x)\sin\pi x\,dx\Big\}.$$

Предложение 2. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вполне выпуклых полиномов и множеством их граничных значений.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$A=\{(-1)^k\alpha_k\geqslant 0;\ (-1)^k\beta_k\geqslant 0;\ 0;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\},$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases}\alpha_k=\beta_k=0 & \text{при}\quad k>\left[\dfrac{n}{2}\right],\\ \alpha_n=\beta_n, & \text{если } n\text{ — четное число.}\end{cases}$$

Тогда существует единственный полином

$$P_n(x)=\sum_{l=0}^{n}a_l x^l\in W$$

такой, что $A=\Omega(P_n)$.

Рассмотрим систему линейных уравнений относительно

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$$

$$\begin{cases}P_n^{(2k)}(0)=\alpha_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\\ P_n^{(2k)}(1)=\beta_k.\end{cases}\tag{1}$$

Эта система имеет единственное решение.

Достаточно заметить, что $a_{2l}=\frac{a_l}{(2l)!}$, а для $\{a_{2l+1}\}$ получается однозначно разрешимая треугольная система линейных уравнений.

Докажем, что решение этой системы принадлежит классу W, т. е.

$$(-1)^k P_n^{(2k)}(x)\geqslant 0 \text{ при } k=0,\ 1,\ 2,\ \dots.$$

Доказательство проводится по индукции. Функция

$$(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} P_n^{\left(2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\right)}(x)$$

линейна и неотрицательна в точках $x=0,\ 1$. Поэтому

$$(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} P_n^{\left(2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\right)}(x)\geqslant 0,\quad x\in[0,\ 1].$$

Пусть

$$(-1)^{l+1}P_n^{(2(l+1))}(x)\geqslant 0,\quad x\in[0,\ 1].$$

Это означает, что $(-1)^l P_n^{(2l)}(x)$ вогнутая функция. Из условий (1) следует, что она положительна в точках $x=0,\ 1$. Следовательно,

$$(-1)^l P_n^{(2l)}(x)\geqslant 0,\quad x\in[0,\ 1],$$

что и доказывает предложение 2.

Следствие. *Пусть $G(x)$ — вполне выпуклый полином. Тогда справедливо равенство*

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^nG^{(2n)}(0)\,P_{2n+1}(1-x)+(-1)^nG^{(2n)}(1)\,P_{2n+1}(x)],\quad\text{(III)}$$

где $P_{2n+1}^{(x)}$ принадлежит классу W и

$$\begin{cases} P_{2n+1}^{(2l)}(0)=0 & l=0,\ 1,\ \dots,\ n,\\ P_{2n+1}^{(2l)}(1)=0 & l=0,\ 1,\ \dots,\ n-1,\\ (-1)^nP_{2n+1}^{(2n)}(1)=1. \end{cases}$$

Левая и правая часть (III) обладают одинаковыми граничными значениями и следовательно совпадают.

Предложение 3. Любая аналитическая функция на оси, удовлетворяющая на $[0,1]$ оценке $|f^{(k)}(x)|\leqslant C\pi^k$, где C — константа, и условиям

$$f^{(2k)}(0)=f^{(2k)}(1)=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\qquad(2)$$

имеет вид $f(x)=\lambda\sin\pi x$. Из условий (2) следует, что $f(x)$ есть нечетная периодическая функция с периодом 2.

Целая функция первого порядка типа π, периодическая с периодом 2, есть $\lambda\sin\pi x$.

Теорема. *Пусть $f(x)$ принадлежит W. Тогда она допускает представление*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n f^{(2n)}(0)P_{2n+1}(1-x)+(-1)^n f^{(2n)}(1)P_{2n+1}(x)]+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi^{2n}}\int_0^1(-1)^n f^{(2n)}(x)\sin\pi x dx\sin\pi x, \qquad \text{(IV)}$$

где $P_{2n+1}(x)$ — полиномы из класса W, описанные в следствии предложения 2.

Доказательство. Покажем, что

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n f^{(2n)}(0)P_{2n+1}(1-x)+(-1)^n f^{(2n)}(1)P_{2n+1}(x)]$$

принадлежит классу W. Положим в равенстве (1) $f(x)=P_{2n+1}(x)$. Тогда

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)\sin\pi x dx=\frac{1}{\pi^{2n+1}}.$$

Используя (II), получаем для $P_{2n+1}(x)$ оценку на $[0,1]$ $P_{2n+1}(x)\leqslant\frac{B}{\pi^{2n}}$.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{(2n)}(1)P_{2n+1}(x)$$

мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{(2n)}(1)\cdot\frac{B}{\pi^{2n}},$$

который в силу предложения 1 (пункт 1) сходится. Следовательно, сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{(2n)}(1)P_{2n+1}(x).$$

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{(2n)}(0)P_{2n+1}(1-x).$$

Из равенства

$$\frac{d^2P_{2n+1}(x)}{dx^2}=-P_{2n-1}(x),\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

следует, что $\varphi_1(x)$ принадлежит классу W. Рассмотрим $\varphi_2 = f - \varphi_1$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям предложения 3. Следовательно,

$$\varphi_2(x) = \lambda \sin \pi x,$$

где λ определяется из равенства

$$\int_0^1 f(x) \sin \pi x dx - \int_0^1 \varphi_1(x) \sin \pi x dx = \frac{\lambda}{2}.$$

Воспользуемся (1) и соотношением

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x) \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi^{2n+1}}.$$

Тогда получим

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi^{2n}} \int_0^1 (-1)^n f^{(2n)}(x) \sin \pi x dx,$$

что и доказывает теорему.

Пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $[0,1]$ с метрикой

$$\rho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\| f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) \|_{C[0,1]}}{1 + \| f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x) \|_{C[0,1]}}$$

есть локально выпуклое топологическое пространство. В этом пространстве компактами являются замкнутые и ограниченные множества [2, стр. 19].

Из предложения 1 (пункт 3) следует, что множество

$$K = \left\{ f : f \in W, \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi^{2n}} \int_0^1 (-1)^n f^{2n}(x) \sin \pi x \, dx = 1 \right\}$$

есть компакт. Рассмотрим множество

$$A = \{ P_{2n+1}(1-x)\pi^{2n+1}, \ P_{2n+1}(x)\pi^{2n+1} n = 0, \\ 1, 2, \ldots P_\infty(x) = \sin \pi x \}.$$

Сопоставим $f(x)$, принадлежащей компакту K, дискретную меру μ, определяемую следующим образом:

$$\mu [P_{2n+1}(1-x)\pi^{2n+1}] = \frac{(-1)^n f^{(2n)}(0)}{\pi^{2n+1}};$$

$$\mu [P_{2n+1}(x)\pi^{2n+1}] = \frac{(-1)^n f^{(2n)}(1)}{\pi^{2n+1}};$$

$$\mu [P_\infty(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi^{2n}} \int_0^1 (-1)^n f^{(2n)}(x) \sin \pi x \, dx, \ \mu (K \setminus A) = 0.$$

Из равенства (1) и определения K следует, что $\mu(K) = 1$. Из (IV) вытекает, что A совпадает с множеством крайних точек $\operatorname{ex} K$ компакта K и имеет место равенство $f = \int\limits_{\operatorname{ex} K} \omega\, d\mu$, где $\omega \in K$.

Автор выражает благодарность А. Ф. Гришину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Widder D. The Laplace Transform (Princeton, 1941).
2. Фелпс. Лекции о теоремах Шоке. М., «Мир», 1968.

Поступила 5 июня 1971 г.