О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ С НУЛЯМИ НА ПОЛУПРЯМОЙ, II

В. Н. Логвиненко

Эта работа является продолжением работы [9]. В ней мы докажем теоремы 1, 2, 3, 6 и 7, сформированные в [9] без доказательства.

§ 1. В этом параграфе докажем теоремы 6 и 7 (мы сохраняем нумерацию [9]). Эти теоремы близки, с одной стороны, теоремам теории сингулярных интегралов, развитой Зигмундом и Кальдероном [1], с другой стороны, одной теореме о максимуме Харди — Литтлвуда [2]. Эта теорема Харди — Литтлвуда формулируется так.

Теорема (Харди — Литтлвуд). *Для любого* $p \in (1, \infty]$ *существует такая постоянная* $C_p < \infty$, *что для любой функции* $f \in L^p(-\infty, \infty)$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \sup_{y \geqslant 0} \left| \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\, dt}{(t-x)^2 + y^2} \right| \right\|_p \leqslant C_p \| f \|_p.$$

Теоремы 6 и 7 заменят нам теорему об оценке модуля голоморфной функции снизу [3, стр. 33]. В следующем параграфе мы объясним, почему эта теорема не применима к рассматриваемому кругу вопросов.

Напомним некоторые определения из [9].

Пусть функция $f(t) \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$. Определим функции

$$f^*(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt; \quad \hat{f}(x) = \sup_{y \geqslant 0} |f^*(x+iy)|, \tag{1.1}$$

понимая под $f^*(x)$ угловые предельные значения $f^*(z)$. Следующая теорема является непосредственным аналогом теоремы Харди—Литтлвуда,

Теорема 6. *Для любого $p \in (1, \infty)$ найдется такая постоянная $C_p < \infty$, что для любой функции $f \in L^p(-\infty, \infty)$ справедливо неравенство*

$$\|\hat{f}\|_p \leqslant C_p \|f\|_p. \tag{1.2}$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy$. Имеем

$$f^*(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t-x)}{(t-x)^2+y^2}\, dt + i\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\, dt =$$
$$= u_f(z) + iv_f(z).$$

Так как $\hat{f}(x) \leqslant \hat{u}_f(x) + \hat{v}_f(x)$, то для доказательства неравенства (1.2) достаточно установить справедливость таких неравенств:

$$\|\hat{u}_f\|_p \leqslant C'_p \|f\|_p, \tag{1.3}$$
$$\|\hat{v}_f\|_p \leqslant C''_p \|f\|_p, \tag{1.4}$$

где постоянные $C'_p < \infty$ и $C''_p < \infty$ зависят лишь от p.

Второе из этих неравенств составляет содержание теоремы Харди — Литтлвуда. Для доказательства неравенства (1.3) заметим, что функции $\frac{y}{(t-x)^2+y^2}$ и $\frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}$ при фиксированных x, y $(y>0)$ являются парой взаимных трансформаций Гильберта в пространстве $L^r(-\infty, \infty)$, где r — любое число из интервала $(1, \infty)$, в частности, в пространстве, сопряженном пространству $L^p(-\infty, \infty)$. По известной теореме М. Рисса [4, стр. 183] имеем равенство

$$u_f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t-x)}{(t-x)^2+y^2}\, dt = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t)\, dt}{(t-x)^2+y^2} = v_{\tilde{f}}(z),$$

где через $\tilde{f}$ обозначено преобразование Гильберта функции f. Согласно другой теореме М. Рисса [4, стр. 176] L^p-норма функции $\tilde{f}$ оценивается через L^p-норму функции f следующим образом:

$$\|\tilde{f}\|_p \leqslant C_p \|f\|_p,$$

где постоянная $C_p < \infty$ зависит только от p. Для завершения доказательства неравенства (1.3) осталось лишь сослаться на теорему Харди — Литтлвуда. Теорема 6 доказана.

Из теоремы 6 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Для любого* $p \in (1, \infty)$ *найдется такая постоянная* $C_p < \infty$, *что каковы бы ни были функция* $f \in L^p(-\infty, \infty)$ *и число* $h > 0$, *выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x : \hat{f}(x) > h\} \leqslant C_p \frac{\|f\|_p^p}{h^p}.$$

Утверждение теоремы 6 и утверждение теоремы Харди — Литтлвуда не выполняются при $p = 1$, что легко проверяется в том частном случае, когда функция $f(t)$ есть характеристическая функция любого конечного интервала. Однако более слабое утверждение следствия 1 справедливо и для пространства $L^1(-\infty, \infty)$ в следующей форме.

Теорема 7. *Если функция* $f \in L^1(-\infty, \infty)$, *то для любого* $h > 0$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x : \hat{f}(x) > h\} \leqslant C \frac{\|f\|_1}{h}, \tag{1.5}$$

где $C < \infty$ *— абсолютная постоянная.*

Доказательство теоремы следует, в основном, доказательству теоремы А. Н. Колмогорова о преобразованиях Гильберта функций из пространства $L^1(-\pi, \pi)$, приведенному в книге Зигмунда [5, т. 1, стр. 218].

Очевидно, достаточно доказать теорему в предположении неотрицательности функции $f(t)$. Полагая $z = x + iy$, имеем

$$f^*(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)(t-x)\,dt}{(t-x)^2 + y^2} + i\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^2 + y^2} = u_f(z) + iv_f(z).$$

Так как $\hat{f}(x) \leqslant \hat{u}_f(x) + \hat{v}_f(x)$, то достаточно доказать теорему для функций $u_f(z)$ и $v_f(z)$, т. е. достаточно установить существование абсолютной постоянной $C < \infty$, такой, что для любого $h > 0$ выполняются неравенства

$$\operatorname{mes}\{x : \hat{u}_f(x) > h\} \leqslant C \frac{\|f\|_1}{h}, \tag{1.6}$$

$$\operatorname{mes}\{x : \hat{v}_f(x) > h\} \leqslant C \frac{\|f\|_1}{h}. \tag{1.7}$$

Начнем с доказательства более простого неравенства (1.7). Согласно одной лемме Зигмунда — Кальдерона [1] для любой неотрицательной функции $f(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная или счетная последовательность непересекающихся интервалов $\{a_k, b_k\}$, обладающих следующими свойствами:

а) для почти всех $t \in \overline{Q} = \bigcup_k (a_k, b_k)$ справедливо неравенство $f(t) \leqslant \varepsilon$;

б) $\operatorname{mes} Q \leqslant C\varepsilon^{-1} \|f\|_1$, где величина $C < \infty$ не зависит от f и ε;

в) для среднего от функции $f(t)$ по любому интервалу (a_k, b_k) выполняется оценка

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{b_k - a_k} \int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt < 2\varepsilon.$$

Положим $f(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, определив функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} f(t); & t \in R^1 \setminus Q \\ \dfrac{1}{b_k - a_k} \displaystyle\int_{a_k}^{b_k} f(\tau)\,d\tau; & t \in (a_k, b_k), \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Справедливо равенство $v_f(z) = v_\varphi(z) + v_\psi(z)$. Таким образом, имеем $\hat{v}_f(x) \leqslant \hat{v}_\varphi(x) + \hat{v}_\psi(x)$. Замечая, что в силу условий а) и в) леммы Зигмунда — Кальдерона функция $\varphi(t)$ на всей оси удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \varphi(t) < 2\varepsilon$, получаем оценку

$$v_\varphi(x) = \sup_{y \geqslant 0} \{v_\varphi(x + iy)\} =$$

$$= \sup_{y \geqslant 0} \left\{ \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(t - x)^2 + y^2}\,dt \right\} < 2\varepsilon. \tag{1.8}$$

Функция $v_\psi(z)$ посредством интегрирования по частям может быть выражена так:

$$v_\psi(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t + x)}{t^2 + y^2}\,dt = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t \psi(\tau + x)\,d\tau \right) \frac{2t}{(t^2 + y^2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_x^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau \right) \frac{2t^2}{(t^2 + y^2)^2}\,dt.$$

Из этого выражения для функции $v_\psi(z)$ вытекает такая оценка для функции $\hat{v}_\psi(x)$:

$$\hat{v}_\psi(x) = \sup_{y > 0} \left| \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_x^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau \right) \frac{2t^2\,dt}{(t^2 + y^2)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{y > 0} \left\{ \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sup_{|t| < \infty} \left| \frac{1}{t} \int_x^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau \right| \right) \frac{dt}{t^2 + y^2} \right\}.$$

Обозначим через P дополнение к объединению последовательности интервалов, которые получаются из интервалов (a_k, b_k), $k =$

$= 1, 2, \ldots$, концентрическим расширением в три раза. Если $x \in P$ то при $t + x \overline{\in} Q$ имеет место равенство

$$\frac{1}{t} \int_{x}^{t+x} \psi(\tau)\, d\tau = 0.$$

Если же $t + x$ принадлежит какому-либо интервалу (a_k, b_k), то во-первых, $|t| \geqslant (b_k - a_k)$, а во-вторых, справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{t} \int_{x}^{t+x} \psi(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \frac{1}{b_k - a_k} \int_{a_k}^{b_k} (f(\tau) + \varphi(\tau))\, d\tau < 4\varepsilon.$$

Следовательно, при $x \in P$ выполняется неравенство

$$\sup_{|t| < \infty} \left| \frac{1}{t} \int_{x}^{t+x} \psi(\tau)\, d\tau \right| \leqslant 4\varepsilon,$$

а значит, и неравенство

$$\hat{v}_{\psi}(x) \leqslant 4\varepsilon. \qquad (1.9)$$

Учитывая (1.8) и (1.9), получаем, что для $x \in P'$ имеет место неравенство

$$\hat{v}_f(x) < 6\varepsilon.$$

Для окончания доказательства неравенства (1.7) осталось лишь заметить, что из условия в) леммы Зигмунда—Кальдерона вытекает следующая оценка меры множества $R^1 \setminus P$:

$$\operatorname{mes}\{\setminus R^1 P\} \leqslant 3 \sum_k (b_k - a_k) = 3 \operatorname{mes} Q \leqslant C \frac{\|f\|_1}{\varepsilon},$$

и положить $\varepsilon = h/6$.

Доказательство неравенства (1.6) основано, по существу, на той же идее, что и доказательство неравенства (1,7), однако более сложно технически.

Пусть число $\varepsilon > 0$. Обозначим через $F(t)$ функцию $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$. Ясно, что $F(t)$ — непрерывная, монотонно неубывающая функция и полная ее вариация по всей оси $V_{-\infty}^{\infty}\{F\}$ равна $\|f\|_1$. Пусть $Q = Q(\varepsilon)$ — это множество всех вещественных чисел t, для которых найдется число $\xi = \xi(t) > t$ такое, что справедливо неравенство

$$F(\xi) - F(t) > \varepsilon(\xi - t).$$

По известной лемме Ф. Рисса о «тени» множества Q открыто, т. е. представимо в виде конечного или счетного объединения непересекающихся интервалов (a_k, b_k). Кроме того, $F(b_k) - F(a_k) = \varepsilon(b_k - a_k)$. Отсюда легко вытекает следующая оценка для меры множества Q:

$$\operatorname{mes} Q = \frac{1}{\varepsilon}\sum_k \{F(b_k) - F(a_k)\} \leqslant \frac{V_{-\infty}^{\infty}\{F\}}{\varepsilon} = \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}. \qquad (1.10)$$

Обозначив через CQ дополнение к множеству Q в R^1, разложим функцию $F(t)$ в сумму двух слагаемых

$$F(t) = \Phi(t) + \Psi(t),$$

где непрерывная функция $\Phi(t)$ совпадает с $F(t)$ на множестве CQ, а на каждом из интервалов (a_k, b_k), компонент связности открытого множества Q, линейна.

Справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{\Phi(t+\delta) - \Phi(t)}{\delta} \leqslant \varepsilon. \qquad (1.11)$$

Действительно, левая часть этого неравенства очевидна, так как функция $\Phi(t)$ монотонно не убывает. Для доказательства правой части неравенства заметим, что это неравенство выполняется, во-первых, при t, $t+\delta \in CQ$ по определению множества Q, во-вторых, при t, $t+\delta \in (a_k, b_k) \subset Q$, так как функция $\Phi(t)$ линейна на интервале (a_k, b_k). В общем случае, пусть t_1 — ближайшая справа к t точка множества CQ, а t_2 — ближайшая слева к $t+\delta$ точка CQ (для определенности, мы считаем, что $\delta > 0$). Имеем неравенства

$$\Phi(t_1) - \Phi(t) \leqslant \varepsilon(t_1 - t);\ \ \Phi(t_2) - \Phi(t_1) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(t_2 - t_1);\ \ \Phi(t+\delta) - \Phi(t_2) \leqslant \varepsilon(t + \delta - t_2),$$

складывая которые мы и получаем (1.11).

Производная функции $\Phi(t)$, функция $\varphi(t) = \Phi'(t)$, которая существует почти всюду, а на множестве CQ почти всюду совпадает с $f(t)$, удовлетворяет, таким образом, неравенству

$$0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varepsilon. \qquad (1.12)$$

Так как $\Psi(t) = F(t) - \Phi(t)$, то почти всюду существует производная $\psi(t) = \Psi'(t)$ и выполняется равенство $f(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, а значит, и неравенство $\hat{u}_f(x) \leqslant \hat{u}_\varphi(x) + \hat{u}_\psi(x)$.

Оценим меру того множества, на котором функция $\hat{u}_\varphi(x) > \varepsilon$. Имеем, учитывая (1.10),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(t)\}^2 dt = \int_Q \{\varphi(t)\}^2 dt + \int_{CQ} \{f(t)\}^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \operatorname{mes} Q + \varepsilon \|f\|_1 \leqslant 2\varepsilon \|f\|_1, \qquad (1.13)$$

т. е. функция $\varphi \in L^2(-\infty, \infty)$. Согласно следствию 1 из выполнения неравенства (1.13) вытекает справедливость следующей оценки:

$$\operatorname{mes}\{x : \hat{u}_\varphi(x) > \varepsilon\} \leqslant C \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}, \tag{1.14}$$

где величина $C < \infty$ не зависит от f и ε.

Теперь займемся функцией $u_\psi(z)$. Интегрированием по частям для нее можно получить такое выражение:

$$u_\psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t)(t-x)}{(t-x)^2+y^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{\psi(x+t) - \psi(x-t)\} \frac{t}{t^2+y^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{\Psi(x+t) + \Psi(x-t) - 2\Psi(x)\} \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}\, dt. \tag{1.15}$$

Для функции $\Psi(t)$ выполняется неравенство

$$|\Psi(t)| \leqslant \varepsilon M_Q(t), \tag{1.16}$$

где функция $M_Q(t)$ определяется следующим образом: $M_Q(t) = 0$ при $t \in CQ$, а при $t \in (a_k, b_k)$ функция $M_Q(t)$ равна $(b_k - a_k)$. Неравенство (1.16) очевидно при $t \in CQ$. Если же $t \in (a_k, b_k)$, то имеем

$$0 \leqslant F(t) - F(a_k) \leqslant \varepsilon(t - a_k),$$
$$\Phi(t) - \Phi(a^k) = \varepsilon(t - a_k).$$

Так как $\Psi(a_k) = 0$, то из этих неравенств выводим оценку (1.16) и в этом случае.

Пусть P означает дополнение к объединению интервалов, получающихся из интервалов (a_k, b_k) концентрическим расширением в три раза. Если $x \in P$, то учитывая формулу (1.15) и неравенство (1.16), получаем следующую оценку для функции $\hat{u}_\psi(x)$:

$$\hat{u}_\psi(x) = \sup_{y>0} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{\Psi(x+t) + \Psi(x-t)\} \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y>0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_Q(x+t) \frac{|t^2-y^2|}{(t^2+y^2)^2}\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_Q(t)}{(x-t)^2}\, dt. \tag{1.17}$$

Обозначим через $I(x)$ интеграл $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_Q(t) \frac{dt}{(x-t)^2}$ и оценим меру той части множества P, на которой выполняется неравенство $I(x) > 1$. Имеем соотношение

$$\int_P I(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_Q M_Q(t) \left(\int_P \frac{dx}{(x-t)^2} \right) dt \leqslant \frac{2}{\pi} \int_Q dt \leqslant C \frac{\|f\|_1}{\varepsilon},$$

где величина $C < \infty$ не зависит от f и ε. Следовательно, выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x: x \in P;\ I(x) > 1\} \leqslant C\frac{\|f\|_1}{\varepsilon}.$$

В тех точках $x \in P$, где $I(x) \leqslant 1$, согласно (1.17) имеем оценку $\acute{u}_\psi(x) \leqslant \varepsilon$. Учитывая (1.10), получаем, что неравенство $\hat{u}_\psi(x) \leqslant \varepsilon$ может не выполняться лишь на множестве, мера которого не превосходит $C\varepsilon^{-1}\|f\|_1$, где $C < \infty$ — абсолютная постоянная. Вспоминая (1.14) и полагая $\varepsilon = h/2$, получаем неравенство (1.6). Теорема 7 доказана.

§ 2. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая функция нецелого порядка, все корни которой лежат на положительном луче вещественной оси, и пусть для функции $n(t)$, считающей нули $f(z)$, выполняется условие*

$$n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t). \tag{2.1}$$

Здесь ρ — нецелое число, $\rho > \rho_1 > [\rho]$, $\Delta > 0$, а для функции $\varphi(t)$ при некотором конечном $q \geqslant 1$ выполняется асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q\, dt = o(T^{\rho_1 q+1}),\ T \to \infty. \tag{2.2}$$

Тогда порядок целой функции $f(z)$ равен ρ и имеет место асимптотическое соотношение

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^\rho + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} e^{i\rho_1(\theta-\pi)} r^{\rho_1} + \psi(re^{i\theta}), \tag{2.3}$$

причем остаточный член $\psi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_1})$ при $r \to \infty$ вне исключительного множества $E = E_f$. Это исключительное множество состоит из конечного или счетного объединения прямоугольников вида

$$x_n < \operatorname{Re} z < x_n';\ |\operatorname{Im} z| < y_n\ (n = 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющих условиям: $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{x_n < R}(x_n' - x_n) = o(R)$ при $R \to \infty$ и $\sup_{x_n < R} y_n = o(R)$ при $r \to \infty$.

Если в (2.2) число $q > 1$, то величина

$$T^{-(\rho_1 q+1)}\int_T^{2T} |\psi(re^{i\theta})|^q\, dr$$

стремится к нулю при $T \to \infty$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$.

При доказательстве нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть монотонно неубывающая функция $n(t)$ удовлетворяет условию (2.1), причем для функции $\varphi(t)$ справедлива асимптотическая оценка

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q\, dt = o(T^{\alpha q+1}),\ T \to \infty, \tag{2.4}$$

где $\rho > \rho_1 \geqslant \alpha > [\rho]$. Тогда для функции $\varphi(t)$ выполняется оценка

$$\varphi(t) = o(t^{(\alpha q+\rho)/(q+1)}),\ t \to \infty.$$

Эта оценка точна в следующем смысле. Для любой функции $g(t) \searrow 0$ при $t \to \infty$ найдется функция $n(t)$, считающая нули некоторого канонического произведения, которая удовлетворяет условиям (2.1), (2.4) и условию

$$\limsup_{t\to\infty} (n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1})(g(t)\, t^{(\alpha q+\rho)/(q+1)})^{-1} = \infty.$$

Лемма 2. Пусть для функции $\varphi(t)$ выполняется условие (2.2) и пусть $\int_0 |\varphi(t)|\, t^{-p-1}\, dt < \infty$, причем $p < \rho_1 < p+1$. Положим $z = ze^{i\theta}$. Тогда, каковы бы ни были положительные числа $k_1 < 1$ и $k_2 > 1$, имеют место асимптотические оценки

$$\sup_{A\in[0,\, k_1 r]} \left\{ \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \left| \int_0^A \frac{\varphi(t)\, dt}{t^{p+1}(t - re^{i\theta})} \right| \right\} = o(r^{\rho_1 - p - 1}),\ r \to \infty;$$

$$\sup_{B\in[k_2 r,\, \infty)} \left\{ \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \left| \int_B^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{t^{p+1}(t - re^{i\theta})} \right| \right\} = o(r^{(\rho_1 - p - 1)}),\ r \to \infty.$$

Доказательство этих лемм мы не приводим, так как они доказываются элементарно, но довольно громоздко.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z)$ — целая функция нецелого порядка, все нули которой лежат на положительном луче вещественной оси, и пусть для функции $n(t)$, считающей эти нули, выполняются условия (2.1) и (2.2). Согласно лемме 1 из этих условий вытекает, что $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho)$ при $t \to \infty$. Следовательно, порядок целой функции $f(z)$ равен ρ и по классической теореме Адамара справедливо представление функции $f(z)$ в виде

$$f(z) = \exp\{P(z)\} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j} \left(\frac{z}{a_k}\right)^j \right\}, \tag{2.5}$$

где $p = [\rho]$, а $P(z)$ — полином степени не выше p. Рассмотрим вначале частный случай, когда $P(z) \equiv 0$, т. е. $f(z)$ — каноническое произведение.

Пусть $z = re^{i\theta}$. Имеем

$$\ln f(z) = \int_0^\infty \left\{ \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j}\left(\frac{z}{t}\right)^j \right\} dn(t) =$$

$$= -z^{p+1} \int_0^\infty \frac{n(t)}{t^{p+1}(t-z)}\, dt,$$

откуда, учитывая условие (2.1) и вычисляя соответствующие контурные интегралы, легко выводим соотношение

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^{\rho} +$$

$$+ \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} e^{i\rho_1(\theta-\pi)} r^{\rho_1} - z^{p+1} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{t^{p+1}(t-z)}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, задача сведена к оценке последнего слагаемого в правой части соотношения (2.5). Это слагаемое мы в дальнейшем будем называть остаточным членом и обозначать через $\psi(z)$. Вдали от положительного луча вещественной оси для наших целей оказывается достаточной следующая грубая оценка:

$$\left| z^{p+1} \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{t^{p+1}(t-z)} \right| = r^{p+1} \left| \int_0^{r/2} + \int_{r/2}^{2r} + \int_{2p}^{\infty} \right| =$$

$$= r^{p+1} | J_1 + J_2 + J_3 | \leqslant r^{p+1} (| J_1 | + | J_2 | + | J_3 |),$$

Согласно лемме $2r^{p+1}(| J_1 | + | J_3 |) = o(r^{\rho_1})$ при $r \to \infty$ равномерно по $\theta \in [0, 2\pi]$. Несложно оценивается и J_2.

$$| J_2 | \leqslant \int_{r/2}^{2r} \frac{| \varphi(t) |\, dt}{t^{p+1} | t - re^{i\theta} |} \leqslant \left(\frac{2}{r}\right)^{p+1} \int_{r/2}^{2r} \frac{| \varphi(t) |\, dt}{| t - re^{i\theta} |} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{r}\right)^{p+1} \| \varphi \|_{q, r} \cdot \| (t - re^{i\theta})^{-1} \|_{q', r}.$$

Здесь числа q и q' сопряжены по Гельдеру, а под $\| \cdot \|_{q, r}$ мы понимаем норму в пространстве $L^q(r/2, 2r)$. Легко проверить выполнение для величины $\|(t - re^{i\theta})^{-1}\|_{q', r}$ следующей асимптотической оценки:

$$\|(t - re^{i\theta})^{-1}\|_{q', r} = \{\sin\theta/2)\}^{-1/q} O(r^{-1/q}), \quad r \to \infty.$$

Учитывая (2.2), получаем для величины $r^{p+1} | J_2 |$ такую асимптотическую оценку:

$$r^{p+1} | J_2 | = \{\sin(\theta/2)\}^{-1/q} o(r^{\rho_1}), \quad r \to \infty.$$

Можно, таким образом, подобрать монотонно стремящуюся к нулю при $r \to \infty$ положительную функцию $\theta = \Theta(r)$, такую, что на множестве $\{z : z = re^{i\theta};\ \Theta(r) \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \Theta(r)\}$ величина $r^{-\rho_1} \times \psi(re^{i\theta})$ стремится к нулю при $r \to \infty$ равномерно по θ.

Оценим теперь остаточный член соотношения (2.5) вблизи положительной полуоси. С этой целью разобьем луч $[1, +\infty)$ на полуинтервалы вида $[2^k, 2^{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $x = \operatorname{Re} z \in [2^k, 2^{k+1})$, а $\theta = \arg z \in [0, \pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi]$. Имеем следующее соотношение:

$$\psi(z) = -z^{p+1}\left(\int_0^{2^{k-1}} + \int_{2^{k-1}}^{2^{k+2}} + \int_{2^{k+2}}^{\infty}\right)\frac{\varphi(t)\,dt}{t^{p+1}(t-z)} =$$

$$= -z^{p+1}\left(J_1^{(k)} + J_2^{(k)} + J_3^{(k)}\right).$$

По лемме 2 величина $r^{-\rho_1}|z^{p+1}(J_1^{(k)} + J_3^{(k)})|$ стремится к нулю при $r \to \infty$ равномерно по $\theta \in [0,2\pi]$. Для оценки $J_2^{(k)}$ введем в рассмотрение вспомогательную функцию вещественного переменного t

$$g_k(t) = \chi_k(t)\,\varphi(t)\,t^{-p-1},$$

где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция полуинтервала $[2^{k-1}, 2^{k+2})$. Из (2.2) следует, что $g_k \in L^q(-\infty, \infty)$ и $\|g_k\|_q = o(2^{k(\rho_1 - p - 1 + 1/q)})$ при $k \to \infty$. Учитывая это и используя следствие 1 (при $q > 1$) или теорему 7 (при $q = 1$) имеем следующую асимптотическую оценку для меры множества $E_k = \{x : x \in [2^k, 2^{k+1});\ \sup\limits_{|y|<\infty} |J_2^{(k)}(x + iy)| > \varepsilon_k 2^{k(\rho_1 - p - 1)}\}$ $(\varepsilon_k > 0)$:

$$\operatorname{mes} E_k = \varepsilon_k^{-q} o(2^k),\quad k \to \infty. \tag{2.7}$$

Если монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ убывает не слишком быстро, то множество $E_x = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_k$ имеет относительную меру нуль. Незначительно расширяя, если это нужно, множество E_x, можно считать, что оно открыто.

Итак, нами показано, что при $x = \operatorname{Re} z \,\overline{\in}\, E_x$ величина $r^{-\rho_1}\psi \times (re^{i\theta})$ стремится к нулю равномерно по $\theta \in [0, \pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi)$. Объединяя этот результат с результатами оценки остаточного члена вдали от положительного луча вещественной оси, получим в качестве исключительного множества E то объединение прямоугольников, о котором шла речь в формулировке теоремы 1. Вне E остаточный член есть $o(r^{\rho_1})$ при $r \to \infty$. Тем самым для канонических произведений первая часть утверждения теоремы 1 доказана.

Доказательство второй части утверждения теоремы 1, относящейся к случаю $q > 1$, легко следует из теоремы 6.

Возвращаясь к общему случаю, когда в каноническом представлении (2.5) целой функции $f(z)$ полином $P(z) \not\equiv 0$, достаточно заметить, что степень полинома $P(z)$ не превосходит p, а значит, справедлива равномерная по $\theta \in [0,2\pi]$ асимптотическая оценка

$I'(z) = o(r^{\rho_1})$ при $r \to \infty$. Таким образом, наличие сомножителя $\exp\{P(z)\}$ в представлении (2.5) не отражается на справедливости полученных нами оценок. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 5, сформулированной в [9], вытекает, что исключительное множество теоремы 1 состоит, вообще говоря, не только из точек «понижения». Это означает, что метод выделения исключительного множества, основанный, как в теории целых функций вполне регулярного роста, на теореме об оценке модуля голоморфной функции снизу, к нашей задаче не применим.

§ 3. Докажем теоремы 2 и 3.

М. М. Тян [6] доказал, что если целая функция $f(z)$ порядка ρ, $0 < \rho < 1$, все корни которой положительны, удовлетворяет условию

$$\ln|f(-r)| = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_1}),\ r \to \infty,$$

где $\rho > \rho_1 > 0$, то для функции $n(t)$, считающей нули $f(z)$, справедлива оценка

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + o\left(\frac{t^{\rho}}{\ln t}\right),\ t \to \infty. \tag{3.1}$$

В той же работе М. М. Тян и в работе Андерсона [7] показано, что оценка (3.1) *точна* в рассматриваемом классе целых функций.

Рассмотрим подкласс этого класса, определяемый условием: для любого $\delta > 0$ равномерно по $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$ выполняется асимптотическое соотношение

$$\ln f(re^{i\theta}) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi} e^{i\rho(\theta-\pi)} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1}{\sin\rho_1\pi} e^{i\rho_1(\theta-\pi)} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_1}),\ r \to \infty. \tag{3.2}$$

Мы утверждаем, что как бы медленно не стремилась к нулю при $t \to \infty$ монотонно убывающая функция $g(t)$, в этом подклассе найдется целая функция $h(z)$, для которой

$$\limsup_{t\to\infty} (n_h(t) - \Delta t^{\rho})(g(t)\, t^{(\rho+\rho_1)/2})^{-1} = \infty. \tag{3.3}$$

Существование такой целой функции $h(z)$ немедленно следует из леммы 1 и теоремы 1. Действительно, лемма 1 утверждает, что существует функция $n(t)$, считающая нули некоторого канонического произведения, для которой выполняются условия (2.1), (2.2) и (3.3). Если $h(z)$ — каноническое произведение с положительными корнями, соответствующее функции $n(t)$, то для него согласно теореме 1 выполняется (3.2).

Если остаточный член в асимптотическом соотношении (3.2) оценивать в среднем, то можно учитывать поведение функции $\ln|f(z)|$ и на луче с корнями. При этом удается доказать такие теоремы.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — целая функция, все корни которой положительны, а порядок — нецелое число, заключенное между целыми числами p и $p+1$, и пусть для функции $\ln|f(z)|$ имеет место асимптотическое соотношение*

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{\pi\Delta\cos\rho(\theta-\pi)}{\sin\rho\pi} r^{\rho} + \frac{\pi\Delta_1\cos\rho_1(\theta-\pi)}{\sin\rho_1\pi} r^{\rho_1} + \psi_1(re^{i\theta}), \quad (3.4)$$

где $p+1>\rho>\rho_1>p$, а функция $\psi(x)$ при вещественных x удовлетворяет следующему условию:

$$\int\limits_{T<|x|<2T} \psi_1(x)^q\,dx = o(T^{\rho_1 q+1}), \quad T\to\infty, \quad (3.5)$$

при некотором $q \geqslant 1$. Тогда функция $n(t)$ имеет вид (2.1), причем остаточный член в формуле (2.1), функция $\varphi(t)$, есть $o(t^{\rho_1})$ при $t\to\infty$ вне исключительного множества нулевой относительной меры.

Если число $q>1$, то для функции $\varphi(t)$ выполняется условие (2.2).

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 2 с заменой условия (3.5) на более сильное*

$$\int\limits_{T<|x|<2T} |\psi_1(x)|^q\,dx = o(T^{\alpha q+1}), \quad T\to\infty, \quad (3.6)$$

где $\rho_1>\alpha>p$ и число $q\geqslant\max\{1, (\rho-\rho_1)/(\rho_1-\alpha)\}$, то функция $n(t)$ имеет двучленную асимптотику

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_1}), \quad t\to\infty.$$

Доказательство теоремы 2. По условию теоремы порядок целой функции $f(z)$ — нецелое число, заключенное между целыми числами p и $p+1$. Значит, по теореме Адамара функция $f(z)$ допускает представление

$$f(z) = \exp\{P(z)\}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left\{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right\} = \exp\{P(z)\}\,\pi(z),$$

где $P(z)$ — полином степени не большей p. Следовательно, каноническое произведение $\pi(z)$ имеет тот же порядок, что и целая функция $f(z)$, и для него выполняются те же условия (3.4) и (3.5). Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что целая функция $f(z)$ сама является каноническим произведением, т. е. $P(z)\equiv 0$. При этом предположении для вещественных x имеем соотношение

$$x^{-p-1}\ln|f(x)| = -VP\int\limits_0^{\infty}\frac{n(t)}{t^{p+1}(t-x)}\,dt. \quad (3.7)$$

Соотношение (3.7) можно трактовать следующим образом: функция $x^{-p-1}\ln|f(x)|$ есть преобразование Гильберта функции, равной

$t^{-p-1} n(t)$ при $t>0$ и нулю при $t \leqslant 0$. Существует такое число >1, что $t^{-p-1} n(t) \in L^s(0, \infty)$, а значит, по теореме об обратном преобразовании Гильберта выполняется

$$t^{-p-1} n(t) = \frac{1}{\pi^2} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(x)|}{x^{p+1}(x-t)} dx, \quad t>0. \tag{3.8}$$

Учитывая (3.4) и вычисляя соответствующие контурные интегралы, из (3.8) выводим равенство

$$t^{-p-1} n(t) = \Delta t^{\rho-p-1} + \Delta_1 t^{\rho_1-p-1} + $$
$$+ \frac{1}{\pi^2} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^{p+1}(x-t)} dx, \quad t>0. \tag{3.9}$$

Задача сведена, таким образом, к оценке остаточного члена

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\pi^2} VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^{p+1}(x-t)} dx$$

венства (3.9). Имеем

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_{-\infty}^{0} + VP\int_{0}^{\infty}\right) \frac{\psi_1(x)\, dx}{x^{p+1}(x-t)} = \varphi_1^-(t) + \varphi_1^+(t).$$

Оценку $\varphi_1^+(t)$ можно провести несколько проще, чем проводилась оценка подобного интеграла в теореме 1, так как здесь нет необходимости использовать равномерные оценки интеграла типа Коши. Здесь их можно заменить стандартными теоремами теории преобразований Гильберта. Мы, однако, не будем приводить этих более простых рассуждений, а просто сошлемся на соответствующее место в доказательстве теоремы 1. Там было показано, что, во-первых, существует такое открытое подмножество положительного луча E нулевой относительной меры, что

$$\varphi_1^+(t) = o(t^{\rho_1-p-1}), \quad t \to \infty, \quad t \bar{\in} E, \tag{3.10}$$

во-вторых, если в (3.5) число $q>1$, то выполняется асимптотическая оценка

$$\int_{T}^{2T} |t^{p+1}\varphi_1^+(t)|^q\, dt = o(T^{\rho_1 q+1}), \quad T \to \infty. \tag{3.11}$$

Оценим $\varphi_1^-(t)$. Имеем

$$|\varphi_1^-(t)| = \left|\int_{-\infty}^{0} \frac{\psi_1(x)\, dx}{x^{p+1}(x-t)}\right| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \left|\frac{\psi_1(x)}{x^{p+1}(x-t)}\right| dx =$$

$$= \int\limits_{-2^{\log_2 t - [\log_2 t]}}^{0} + \sum_{k=-[\log_2 t]}^{\infty} \int\limits_{-2^{k+1}t}^{-2^k t} \leqslant O\left(\frac{1}{t}\right) +$$

$$+ \sum_{k=-[\log_2 t]}^{\infty} (2^k t)^{-p-1} \int\limits_{2^k t}^{2^{k+1}t} \frac{|\psi_1(-x)|}{x+t}\, dx \leqslant O\left(\frac{1}{t}\right) +$$

$$+ t^{-p-1} \left\{ \frac{1}{t} \sum_{k=-[\log_2 t]}^{-1} 2^{-k(p+1)} \| \psi_1(-x) \|_{q,k} \cdot \| 1 \|_{q',k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(p+1)} \| \psi_1(-x) \|_{q,k} \cdot \| x^{-1} \|_{q',k} \right\} = O\left(\frac{1}{t}\right) +$$

$$+ o(t^{\rho_1 - p - 1}) \left\{ \sum_{k=-[\log_2 t]}^{-1} 2^{k(\rho_1 - p)} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\rho_1 - p - 1)} \right\} =$$

$$= o(t^{\rho_1 - p - 1}), \quad t \to \infty; \tag{3.12}$$

(3.10) и (3.12) дают первую часть утверждения теоремы, (3.11) и (3.12) — вторую. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Мы приведем доказательство лишь для случая, когда в условии (3.6) число $q > 1$. Этот случай, в отличие от случая $q = 1$, не требует никаких выкладок.

Легко видеть, что замена условия (3.5) более сильным условием (3.6) влечет замену оценки (2.2) более сильной

$$\int\limits_T^{2T} |\varphi(t)|^q\, dt = o(T^{\alpha q + 1}), \quad T \to \infty. \tag{3.13}$$

Вспоминая лемму 1, из (3.13) выводим оценку

$$\varphi(t) = o(t^{(\alpha q + \rho)/(q+1)}), \quad t \to \infty.$$

Осталось заметить, что функция $(\alpha q + \rho)/(q + 1)$ монотонно убывает на луче $\{q : q > -1\}$. Следовательно, имеем

$$\frac{\alpha q + \rho}{q + 1} \leqslant \frac{\alpha(\rho - \rho_1)/(\rho_1 - \alpha) + \rho}{(\rho - \rho_1)/(\rho_1 - \alpha) + 1} = \rho_1.$$

Теорема 3 доказана.

Теоремы § 2 и 3 могут быть обобщены на более широкий класс функций, чем рассмотренный выше класс целых функций нецелого порядка с положительными корнями. Этот более широкий класс состоит из функций $f(z)$, голоморфных в плоскости z, разрезанной по лучу $[0, +\infty]$, и допускающих там специальное представление

$$f(z) = \exp\left\{ -z^{p+1} \int\limits_0^{\infty} \frac{n(t)\, dt}{t^{p+1}(t - z)} \right\}.$$

Функции такого вида возникают при решении краевой задачи Римана для неограниченных областей [8].

Автор глубоко благодарен В. Э. Кацнельсону и Б. Я. Левину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. P. Calderon, A. Zygmund. On existence of certain singular integrals. Acta Math. 88 : 1 — 2, 1952.
2. G. H. Hardy, I. E. Littlewood. A maximal theorem with function — theoretic applications. Acta Math., 54 : 3 — 4, 1930.
3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.
4. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. Физматгиз, 1965.
6. М. М. Тян. Об одном приложении тауберовой теоремы Карлемана — Субханкулова. Изв. АН УзССР, серия физ.-матем., № 3, 1963, 18—20.
7. J. M. Anderson. Integral functions and tauberian theorems. Duke Math. I. 32 № 4, 1965.
8. Н. В. Говоров. Краевая задача Римана с бесконечным индексом... Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». вып. 6. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.
9. В. Н. Логвиненко. О целых функциях с нулями на полупрямой. I. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 16, Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.

Поступила 5 июня 1971 г.