ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Ю. И. Любич, А. П. Шапиро

В настоящей заметке рассматривается уравнение

$$\varphi(x) = x\varphi(\alpha + (1-\alpha)x) + (1-x)\varphi((1-\beta)x), \tag{1}$$

где α, β — заданные константы, $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$, $\varphi(x)$ — искомая функция на замкнутом интервале $[0, 1]$.

Уравнение (1) возникает в биологической задаче о поведении хищника, питающегося двумя видами жертв. Это поведение описывается марковским процессом обучения с пространством состояний $[0, 1]$ и вероятностями перехода

$$p(x \to \alpha + (1-\alpha)x) = x, \quad p(x \to (1-\beta)x) = 1 - x$$

[1, 2, гл. 1]. Решение $\varphi(x)$ есть финальная вероятность перехода хищника на один определенный вид питания при условии, что начальная вероятность употребления этого вида питания равна x. При этом

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \tag{2}$$

или

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(1) = 0 \tag{3}$$

в зависимости от выбора вида питания. Существование финальных вероятностей (а тем самым решений уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям (2) или (3)) следует из общей теории марковских процессов [3, гл. V]. Обозначим эти вероятности через $r(x)$ для условия (2) и $l(x)$ — для условия (3). Можно показать, что они непрерывны в точках $x = 0, 1$.

В данной заметке вопрос о существовании решений уравнения (1) исследуется средствами функционального анализа (принцип неподвижной точки), что вместе с теоремой единственности позволяет получить информацию об аналитических свойствах функций $r(x)$ и $l(x)$.

Теорема существования. *Уравнение (1) при граничном условии (2) обладает решением вида*

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \tag{4}$$

где $a_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Доказательство. Применим принцип Шаудера [4, гл. XVI]. С этой целью рассмотрим в банаховом пространстве A функций $f(z)$, голоморфных в круге $|z| < 1$ и непрерывных вплоть до границы, непрерывный оператор

$$(Tf)(z) = zf(\alpha + (1-\alpha)z) + (1-z)f((1-\beta)z).$$

Рассмотрим далее множество $Q \subset A$ функций, имеющих неотрицательные тейлоровские коэффициенты и удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(1) \leqslant \frac{1}{\alpha}. \tag{5}$$

Очевидно, Q — выпуклое множество. Оно компактно, так как при $f \in Q$

$$\max_{|z| \leqslant 1} |f(z)| = 1, \quad \max_{|z| \leqslant 1} |f'(z)| \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Теорема будет доказана, если мы проверим инвариантность множества Q относительно оператора T.

Пусть $f \in Q$. Очевидно, $(Tf)(0) = 0$, $(Tf)(1) = 1$ и

$$(Tf)'(1) = f(1) + (1-\alpha)f'(1) - f(1-\beta),$$

откуда, в силу (5) и неотрицательности $f(z)$ на $[0, 1]$,

$$(Tf)'(1) \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Далее,

$$(Tf)(z) = z\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\alpha + (1-\alpha)z)^k + (1-z)\sum_{k=1}^{\infty} f_k(1-\beta)^k z^k.$$

Коэффициент при z, очевидно, неотрицателен. Коэффициент при z^{k+1} $(k \geqslant 1)$ не меньше, чем

$$f_k\left((1-\alpha)^k-(1-\beta^k)\right)\geqslant 0,$$

ибо $\alpha\leqslant\beta$. Таким образом, $Tf\in Q$, что и требовалось доказать.

Теорема единственности. *Если ограниченное решение уравнения (1) непрерывно в точках* $x=0,\ 1$ *и*

$$\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=0,$$

$\varphi(x)\equiv 0.$

Доказательство. Положим

$$\psi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|y-x|<\varepsilon}\varphi(y).$$

Функция $\psi(x)$ удовлетворяет функциональному неравенству

$$\psi(x)\leqslant x\psi(\alpha+(1-\alpha)x)+(1-x)\psi((1-\beta)x) \tag{6}$$

и граничным условиям

$$\psi(0)=0,\ \psi(1)=0. \tag{7}$$

Верхняя грань μ функции $\varphi(x)$ на всем отрезке $[0,\ 1]$ для $\psi(x)$ является максимумом (т. е. достигающейся верхней гранью). Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\mu=0$. Множество точек $M=\{x\mid\psi(x)=\mu\}$ замкнуто. Если $\mu\neq 0$, то M не содержит точек 0, 1. В этом случае, в силу (6), M инвариантно относительно преобразований

$$x\to(1-\beta)x,\ x\to\alpha+(1-\alpha)x.$$

По итерации этих преобразований сходятся соответственно к $x=0$ и $x=1$. Следовательно, $0\in M$, $1\in M$ вопреки предположению.

Из теорем существования и единственности вытекает

Следствие. *Пространство решений уравнения (1), ограниченных на* $[0,\ 1]$ *и непрерывных в точках* 0, 1, *двумерно. Его базисом служат функции* 1 *и* $\varphi_0(x)$.

Действительно, 1 и $\varphi_0(x)$ линейно независимы, так как $\varphi_0(0)=0$, $\varphi_0(1)=1$. Если $\varphi(x)$ — любое решение указанного класса, то комбинация

$$\varphi(x)-\varphi(0)-(\varphi(1)-\varphi(0))\varphi_0(x)$$

будет решением того же класса и обращается в нуль на концах. Следовательно, она тождественный нуль, т. е.

$$\varphi(x)=\varphi(0)+(\varphi(1)-\varphi(0))\varphi_0(x).$$

В частности, финальные вероятности $r(x)$ и $l(x)$, о которых шла речь в начале, равны соответственно

$$r(x)=\varphi_0(x),\ l(x)=1-\varphi_0(x). \tag{8}$$

Отсюда видно, что они аналитически продолжаются в единичный круг с непрерывностью вплоть до границы, причем все тейлоровские коэффициенты функции $r(x)$ неотрицательны.

Из (8) видно, что

$$r(x) + l(x) = 1. \tag{9}$$

(это следует и непосредственно из теоремы единственности в силу граничных условий для r и l). Биологически (9) означает, что если популяция хищников велика, то после достаточно продолжительного обучения она разбивается на две части, одна из которых использует один вид пищи, другая — другой. Размеры этих частей пропорциональны $r(x)$ и $l(x)$.

Принятое нами ограничение $\alpha \leqslant \beta$ несущественно. Подстановка $x \to 1 - x$ меняет ролями α и β. При $\alpha = \beta$ решение $\varphi_0(x)$ обнаруживается непосредственно: $\varphi_0(x) \equiv x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. Estes. Toward a statistical theory of learning, Psichol. Rev. 57, 1950.
2. Р. Буш, Ф. Мостеллер. Стохастические модели обучаемости. М., Физматгиз, 1962.
3. Дж. Дуб. Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.
4. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.

Поступила 8 мая 1971 г.