ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ВИГНЕРА

Э. М. Жмудь

В связи с вопросами обоснования квантовой механики Е. Вигнером [1] было высказано, но не вполне корректно доказано следующее утверждение.

Пусть H — комплексное сепарабельное гильбертово пространство и φ — биективный оператор на H, сохраняющий модуль скалярного произведения. Тогда после умножения на соответствующим образом подобранную комплекснозначную функцию, заданную на H, оператор φ становится либо унитарным, либо антиунитарным*.

Строгие доказательства теоремы Вигнера были даны Ломонтом и Мендельсоном [2], Баргманом [3] и другими.

В настоящей статье предлагается новое, сравнительно простое, доказательство теоремы Вигнера. С целью упрощения техники доказательства рассматривается только конечномерный случай. Требование биективности оператора φ при этом, однако, снимается. Незначительные изменения в деталях указанного доказательства позволяют приспособить его к случаю гильбертова пространства (см. примечание 2 в конце п. 3). При этом требование биективности оператора в первоначальной формулировке теоремы Вигнера заменяется более слабым требованием сюръективности.

В двух дополнениях содержатся некоторые замечания по поводу теоремы Вигнера, представляющие, как кажется, и самостоятельный интерес. В первом из них показывается, что общий (правда, лишь конечномерный) случай этой теоремы может быть весьма просто редуцирован к трехмерному. Во втором дополнении устанавливается связь между теоремой Вигнера и основной теоремой проективной геометрии: в конечномерном случае первая из них является, как оказывается, простым следствием второй**. В частности, здесь дается

---

* Теорема верна также и в случае вещественного гильбертова пространства.

** Связь теоремы Вигнера с основной теоремой проективной геометрии отмечается также в [2]. Однако доказательство теоремы Вигнера, приведенное в [2], в явном виде этой связи не использует.

описание автоморфизмов решетки подпространств конечномерного унитарного пространства, согласованных с отношением ортогональности на нем*.

1. Основные обозначения и определения

В дальнейшем используются следующие обозначения:

C — поле комплексных чисел, $C^* = C \setminus \{0\}$;

V — конечномерное унитарное пространство, $V^* = V \setminus \{0\}$.

$n = \dim V$ — размерность V;

$\langle M \rangle$ — линейная оболочка подмножества $M \subset V$;

(x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in V$;

$\|x\|$ — норма вектора $x \in V$.

Определение 1.1. *Отображение φ пространства V в себя назовем квазиизометрией этого пространства, если* $(\forall x, y \in V)$ $|(\varphi(x), \varphi(y))| = |(x, y)|$.

Множество всех квазиизометрий пространства V обозначим через $Q(V)$; $Q(V)$, очевидно, является полугруппой относительно умножения. В полугруппе $Q(V)$ содержится группа $I(V)$ изометрий пространства V, представляющая собой объединение группы $I_1(V)$ унитарных операторов (изометрии I рода) и смежного класса $I_2(V)$ антиунитарных операторов (изометрии II рода).

Определение 1.2. *Векторы $x, y \in V$ назовем эквивалентными ($x \sim y$), если $y = \lambda x$, где $\lambda \in C$, $|\lambda| = 1$. Классы эквивалентных ненулевых векторов пространства V будем называть лучами.*

Определение 1.3. *Квазиизометрии $\varphi_1, \varphi_2 \in Q(V)$ назовем эквивалентными ($\varphi_1 \sim \varphi_2$), если $(\forall x \in V^*)$ $\varphi_1(x) \sim \varphi_2(x)$.*

Обозначим через $S(V)$ множество всех функций $\sigma: V \to C$, обладающих тем свойством, что $(\forall x \in V)$ $|\sigma(x)| = 1$, $\sigma(0) = 1$.

Если φ — произвольный оператор на V, σ — произвольная комплекснозначная функция на V, то

$$(\sigma \circ \varphi)(x) \overset{\text{def}}{=} \sigma(x)\varphi(x) \qquad (x \in V).$$

Введенная операция умножения функций на операторы, очевидно, ассоциативна: $(\sigma_1\sigma_2) \circ \varphi = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \cdot \varphi)$.

Если, в частности, $\sigma \in S(V)$, $\varphi \in Q(V)$, то $\sigma \circ \gamma \in Q(V)$. Отметим также следующее очевидное утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть φ — произвольный, ψ_1 — линейный, ψ_2 — антилинейный операторы на V, σ — произвольная комплекснозначная функция на V. Тогда*

$$\psi_1(\sigma \circ \varphi) = \sigma \circ (\psi_1\varphi), \quad \psi_2(\sigma \circ \varphi) = \bar{\sigma} \cdot (\psi_2\varphi).$$

Следствие. *Если $\varphi_1, \varphi_2 \in Q(V)$, $\psi \in I(V)$, то $\varphi_1 \sim \varphi_2$ влечет $\psi\varphi_1 \sim \psi\varphi_2$.*

---

* Решение той же задачи для гильбертовых пространств приведено в [4], где для этой цели использована одна глубокая теорема Глисона.

Упомянутая выше теорема Вигнера допускает следующую формулировку (дополненную «теоремой единственности»).

Теорема 1. *1°. Всякая квазиизометрия $\varphi \in Q(V)$ эквивалентна некоторой изометрии $\psi \in I(V)$; 2°. (Теорема единственности). Если $n > 1$, то оператор ψ определяется квазиизометрией φ однозначно, с точностью до постоянного комплексного множителя (модуль которого, очевидно, равен единице).*

2. Доказательство первого утверждения теоремы 1

В дальнейшем φ — заданная квазиизометрия пространства V.

Лемма 2.1. *Если $x, y \in V$, то $[x \sim y] \leftrightarrow [\varphi(x) \sim \varphi(y)]$.*

Доказательство. 1°. $[x \sim y] \Rightarrow [\,|(\varphi(x), \varphi(y))| = |(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\| = \|\varphi(x)\| \cdot \|\varphi(y)\|\,] \Rightarrow [\varphi(x) \sim \varphi(y)]$.

2°. $[\varphi(x) \sim \varphi(y)] \Rightarrow [\,|(x, y)| = |(\varphi(x), \varphi(y))| = \|\varphi(x)\| \cdot \|\varphi(y)\| = \|x\| \cdot \|y\|\,] \Rightarrow [x \sim y]$*.

Обозначим через $\{e_\nu\}_1^n$ фиксированный ортонормированный базис пространства V. Векторы $e_\nu^* = \varphi(e_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, очевидно, также образуют ортонормированный базис пространства V.

Лемма 2.2. *Если $\{\xi_\nu\}$ — координаты вектора $x \in V$ в базисе $\{e_\nu\}$, $\{\xi_\nu^*\}$ — координаты вектора $\varphi(x)$ в базисе $\{e_\nu^*\}$, то*

$$|\xi_\nu^*| = |\xi_\nu| \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Доказательство. Так как $x = \sum \xi_\nu e_\nu$, $\varphi(x) = \sum \xi_\nu^* e_\nu^*$, то $|\xi_\nu^*| = |(\varphi(x), e_\nu^*)| = |(\varphi(x), \varphi(e_\nu))| = |(x, e_\nu)| = |\xi_\nu|$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение биссектрису

$$u = e_1 + \cdots + e_n \tag{2.1}$$

и положим

$$\varphi(u) = \zeta_1 e_1^* + \cdots + \zeta_n e_n^* \quad (\zeta_\nu \in C, \ \nu = 1, \ldots, n).$$

В силу леммы 2.2 $|\zeta_\nu| = 1$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Полагая

$$\sigma(x) = \begin{cases} \zeta_\nu, & \text{если } x = e_\nu \\ 1, & \quad » \quad x \notin \{e_\nu\}, \end{cases}$$

образуем квазиизометрию $\varphi_1 = \sigma \circ \varphi$, эквивалентную φ. Так как $\varphi_1(e_\nu) = \zeta_\nu e_\nu^*$, $\varphi_1(u) = \varphi(u)$, то $\varphi_1(u) = \varphi_1(e_1) + \cdots + \varphi_1(e_n)$. Поскольку $\{\varphi_1(e_\nu)\}$ — ортонормированный базис, то $(\exists \omega \in I_1(V)) \times \omega(\varphi_1(e_\nu)) = e_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Полагая

$$\varphi_2 = \omega\varphi_1, \tag{2.2}$$

будем иметь $\varphi_2(e_\nu) = e_\nu$ $(n = 1, \ldots, n)$, $\varphi_2(u) = u$. Так как $\varphi_1 \sim \varphi$, то в силу (2.2) и леммы 1.1

$$\varphi_2 \sim \omega\varphi. \tag{2.3}$$

---

* Из леммы 2.1 легко вытекает, что отношение эквивалентности на $Q(V)$ является конгруэнтностью.

Обозначим через V^+ множество всех отличных от нуля векторов пространства V, первая отличная от нуля координата которых положительна. Очевидно, V^+ является полной системой представителей лучей пространства V. Если $x \in V^*$, то существует один и только один вектор $x^+ \in V^+$ такой, что $x \sim x^+$. В частности, если $x \in V^+$, то $x^+ = x$. Полагаем

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ \{\varphi_2(x)\}^+, & \text{если } x \neq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Так как $\psi(x) \sim \varphi_2(x)$ $(x \in V)$, то $\psi \sim \varphi_2$ и, следовательно, в силу (2.3)

$$\psi \sim \omega\varphi. \tag{2.5}$$

Поскольку $e_\nu \in V^+$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, $u \in V^+$, то

$$\begin{gathered} \psi(e_\nu) = e_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n), \\ \psi(u) = u. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Квазиизометрия ψ обладает следующим свойством: если $x \in V^+$, $x = \xi_\varkappa e_\varkappa + \ldots$, $\xi_\varkappa > 0$, то $\psi(x) = \xi_\varkappa e_\varkappa + \ldots$ (таким образом, в частности, $\psi(V^+) \subset V^+$).

Лемма 2.3. *Если* $x = \sum \xi_\nu e_\nu$, $\psi(x) = \sum \xi_\nu^* e_\nu$, *то*

$$|\xi_\nu^*| = |\xi_\nu| \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{2.7}$$

$$|\xi_1^* + \cdots + \xi_n^*| = |\xi_1 + \cdots + \xi_n|. \tag{2.8}$$

Доказательство. $|\xi_1^* + \cdots + \xi_n^*| = |(\psi(x), \ u)| = |(\psi(x), \psi(u))| = |(x, \ u)| = |\xi_1 + \cdots + \xi_n|$. По поводу (2.7) см. лемму 2.2. Полагаем

$$u_{\lambda\mu} = e_\lambda + e_\mu \quad (1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant n).$$

Лемма 2.4.

$$\psi(u_{\lambda\mu}) = u_{\lambda\mu} \quad (1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant n). \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как $u_{\lambda\mu} \in V^+$, то $\psi(u_{\lambda\mu}) = e_\lambda + \zeta_{\lambda\mu} e_\mu$, где $\zeta_{\lambda\mu} \in C$, $|\zeta_{\lambda\mu}| = 1$. На основании леммы 2.3 $|1 + \zeta_{\lambda\mu}| = |1 + 1| = 2$, откуда $\zeta_{\lambda\mu} = 1$, что и доказывает (2.9).

Лемма 2.5. *Если* $x = \sum \xi_\nu e_\nu$, $\psi(x) = \sum \xi_\nu^* e_\nu$, *то*

$$|\xi_\lambda^* + \xi_\mu^*| = |\xi_\lambda + \xi_\mu| \quad (1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant n).$$

Доказательство. $|\xi_\lambda^* + \xi_\mu^*| = |(\psi(x), \ u_{\lambda\mu})| = |(\Psi(x), \psi(u_{\lambda\mu}))| = |(x, \ u_{\lambda\mu})| = |\xi_\lambda + \xi_\mu|$.

Вектор $\bar{x} = \sum \bar{\xi}_\nu e_\nu$ будем называть сопряженным с $x = \sum \xi_\nu e_\nu$. Если $\bar{x} = x$, будем называть вектор x вещественным.

Лемма 2.6. *Если* $x \in V^+$, *то* $\psi(x) = x$, *либо* $\psi(x) = \bar{x}$.

Доказательство. Если $x = \xi_\varkappa e_\varkappa + \cdots + \xi_n e_n$, $\xi_\varkappa > 0$, то $\psi(x) = \sum_{\nu=\varkappa}^{n} \xi_\nu^* e_\nu$, где $\xi_\varkappa^* = \xi_\varkappa$. На основании леммы 2.5 $|\xi_\varkappa + \xi_\lambda^*| =$

$=|\xi_\varkappa+\xi_\lambda|\,(\lambda>\varkappa)$. Так как $|\xi_\lambda^*|=|\xi_\lambda|$ и $\xi_\varkappa$ — отличное от нуля вещественное число, отсюда вытекает, что $\xi_\lambda^*=\xi_\lambda$, или $\xi_\lambda^*=\bar{\xi}_\lambda$. Следовательно, $\psi(x)=x$, если вектор x вещественный, и $\psi(x)=x$, либо $\psi(x)=\bar{x}$, если x имеет лишь одну комплексную координату. Допустим, что $n\geqslant 3$ и вектор x имеет по крайней мере две комплексные координаты, например, ξ_λ и ξ_μ $(\lambda<\mu)$. Тогда в силу леммы 2.5 $|\xi_\lambda^*+\xi_\mu^*|=|\xi_\lambda+\xi_\mu|$ или $\left|1+\frac{\xi_\mu^*}{\xi_\lambda^*}\right|=\left|1+\frac{\xi_\mu}{\xi_\lambda}\right|$. Так как $\left|\frac{\xi_\mu^*}{\xi_\lambda^*}\right|=\left|\frac{\xi_\mu}{\xi_\lambda}\right|$, отсюда следует, что $\frac{\xi_\mu^*}{\xi_\lambda^*}=\frac{\xi_\mu}{\xi_\lambda}$, или $\frac{\xi_\mu^*}{\xi_\lambda^*}=\frac{\bar{\xi}_\mu}{\bar{\xi}_\lambda}$. Предположение, что $\xi_\lambda^*=\xi_\lambda$, $\xi_\mu^*=\bar{\xi}_\mu$, или $\xi_\lambda^*=\bar{\xi}_\lambda$, $\xi_\mu^*=\xi_\mu$ приводят к выводу, что $\bar{\xi}_\lambda=\xi_\lambda$, или $\bar{\xi}_\mu=\xi_\mu$. И то и другое противоречит невещественности координат ξ_λ, ξ_μ. Итак, $[\xi_\lambda^*=\xi_\lambda]\leftrightarrow[\xi_\mu^*=\xi_\mu]$. Это и означает, что $\psi(x)=x$, или $\psi(x)=\bar{x}$. Лемма доказана.

Будем называть комплексные векторы $x, y\in V^+$ когерентными (обозначение: $x\updownarrow y$), если $\psi(x)=x$, $\psi(y)=y$, или $\psi(x)=\bar{x}$, $\psi(y)=\bar{y}$.

Если $n\geqslant 2$, полагаем

$$u_{\lambda\mu}=e_\lambda+ie_\mu\quad(1\leqslant\lambda<\mu\leqslant n),\quad i=\sqrt{-1}. \tag{2.10}$$

Если $n\geqslant 3$, полагаем

$$w_{\lambda\mu\nu}=e_\lambda+ie_\mu+ie_\nu\ (1\leqslant\lambda<\mu<\nu\leqslant n), \tag{2.11}$$

$$z_{\lambda\mu\nu}=e_\lambda+e_\mu+ie_\nu. \tag{2.12}$$

Лемма 2.7. *Если $n\geqslant 3$, то*

$$v_{\lambda\mu}\updownarrow w_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\lambda\nu}\updownarrow z_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\mu\nu}.$$

Доказательство. Допущение, что одна из когерентностей $w_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\lambda\mu}$, $w_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\lambda\nu}$, $z_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\lambda\nu}$, $z_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\mu\nu}$ не имеет места всегда приводит к противоречию: $2=0$. Если, например, $w_{\lambda\mu\nu}\updownarrow v_{\lambda\mu}$, то $\psi(w_{\lambda\mu\nu})=w_{\lambda\mu\nu}$, $\psi(v_{\lambda\mu})=\bar{v}_{\lambda\mu}$, или $\psi(w_{\lambda\mu\nu})=\bar{w}_{\lambda\mu\nu}$, $\psi(v_{\lambda\mu})=v_{\lambda\mu}$. В первом случае $2=|(w_{\lambda\mu\nu},\ v_{\lambda\mu})|=|(\psi(w_{\lambda\mu\nu}),\ \psi(v_{\lambda\mu}))|=|(w_{\lambda\mu\nu},\ \bar{v}_{\lambda\mu})|=0$. Такое же противоречие получается и во втором случае.

Следствие. *Векторы $v_{\lambda\mu}$ $(1\leqslant\lambda,\ \mu\leqslant n)$ когерентны между собой.*

В случае $n=2$ это очевидно. Если же $n\geqslant 3$, то в силу леммы 2.7 для каждой тройки $\lambda<\mu<\nu$ имеет место $v_{\lambda\mu}\updownarrow v_{\mu\nu}\updownarrow v_{\lambda\nu}$, откуда легко вытекает утверждение.

Лемма 2.8. *Все комплексные векторы из V^+ когерентны друг другу. Другими словами ψ на V^+ является тождественным оператором,* или оператором *комплексного сопряжения.*

Доказательство. Достаточно доказать, что всякий комплексный вектор x из V^+ когерентен v_{12}. Пусть $x=\xi_\lambda e_\lambda+\cdots+\xi_\mu e_\mu+\ldots$, где $\xi_\lambda>0$ и ξ_μ невещественно. Допустим, что

$\psi(v_{12}) = v_{12}$, но $\psi(x) = \bar{x}$. Так как $\psi(v_{\lambda\mu}) = v_{\lambda\mu}$ (при $n = 2$ это очевидно, ибо $\lambda = 1$, $\mu = 2$; если же $n \geqslant 3$, это вытекает из следствия леммы 2.7), то $|\xi_\lambda - i\xi_\mu| = |(x, v_{\lambda\mu})| = |(\psi(x), \psi(v_{\lambda\mu}))| = |(\bar{x}, v_{\lambda\mu})| = |\bar{\xi}_\lambda - i\bar{\xi}_\mu| = |\xi_\lambda + i\xi_\mu|$, откуда $\left|1 + i\frac{\xi_\mu}{\xi_\lambda}\right| = \left|1 - i\frac{\xi_\mu}{\xi_\lambda}\right|$. Ввиду вещественности ξ_λ отсюда вытекает вещественность ξ_μ. Итак, $\psi(v_{12}) = v_{12}$ влечет $\psi(x) = x$. Аналогично доказывается, что $\psi(v_{12}) = \bar{v}_{12}$ влечет $\psi(x) = \bar{x}$. Следовательно, $x \updownarrow v_{12}$. Тем самым лемма доказана.

Через ε обозначим тождественный оператор на V, через θ — оператор комплексного сопряжения (относительно базиса $\{e_\nu\}$): $\theta(x) = \bar{x}$ $(x \in V)$.

Лемма 2.9. *Квазиизометрия ψ эквивалентна одному из операторов ε, θ.*

Доказательство. Если $x \in V^*$, то $x \sim x^+$ и, следовательно, в силу леммы 2.1 $\psi(x) \sim \psi(x^+)$. Если $(\forall x \in V^+)\, \psi(x) = x$, то $(\forall x \in V^*)\, \psi(x) \sim \psi(x^+) = x^+ \sim x$. Следовательно, в этом случае $\psi \sim \varepsilon$. Если $(\forall x \in V^+)\, \psi(x) = \bar{x}$, то $(\forall x \in V^*)\, \psi(x) \sim \psi(x^+) = \overline{x^+} \sim \bar{x}$, и, следовательно $\psi \sim \theta$. Лемма доказана.

Полученный результат приводит к доказательству первого из утверждений теоремы 1. Действительно, в силу (2.5) $\varphi \sim \omega^{-1}\psi$. Если $\psi \sim \varepsilon$, то $\varphi \sim \omega^{-1}$; если $\psi \sim \theta$, то $\varphi \sim \omega^{-1}\theta$. Остается заметить, что ω^{-1} — унитарный, $\omega^{-1}\theta$ — антиунитарный оператор.

3. Доказательство второго утверждения теоремы 1

Утверждение 2⁰ теоремы 1 равносильно следующему:

Лемма 3.1. *Если ψ, $\psi' \in I(V)$, $\psi \sim \psi'$, то при $n > 1$ $\psi' = \lambda\psi$, где $\lambda \in C$, $|\lambda| = 1$.*

Доказательство. Из $\psi \sim \psi'$ следует $\psi' = \sigma \circ \psi$, где $\sigma \in S(V)$. Могут представиться три возможности.

1) $\psi, \psi' \in I_1(V)$. В этом случае $(\forall x, y \in V^*)$ $(x, y) = \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}(x, y)$. Следовательно, $(x, y) \neq 0$ влечет $\sigma(x) = \sigma(y)$. Если же $x, y \in V^*$, но $(x, y) = 0$, то $(x + y, x) = \|x\|^2 \neq 0$, $(x + y, y) = \|y\|^2 \neq 0$. На основании последнего замечания отсюда вытекает, что

$$\sigma(x) = \sigma(x + y) = \sigma(y).$$

Таким образом, $(\forall x, y \in V^*)$ $\sigma(x) = \sigma(y)$. Полагая $\sigma(x) = \lambda (x \in V^*)$, будем иметь $\psi' = \lambda\psi$.

2) ψ, $\psi' \in I_2(V)$. Как и в первом случае докажем, что $\psi' = \lambda\psi$, где $\lambda = \overline{\sigma(x)}$ $(x \in V^*)$.

3) ψ и ψ' — изометрии различных типов. Пусть, например, $\psi \in I_1(V)$, $\psi' \in I_2(V)$. Тогда $(y, x) = (\psi'(x), \psi'(y)) = \sigma(x)\overline{\sigma(y)}(\psi(x), \psi(y)) = \frac{\sigma(x)}{\sigma(y)}(x, y)$ $(x, y \in V^*)$. Поэтому при $(x, y) \neq 0$

$$\frac{\sigma(x)}{\sigma(y)} = \frac{(y, x)}{(x, y)}. \tag{3.1}$$

В частности, полагая в (3.1) $y = \lambda x$, где $\lambda \in C^*$, получим

$$\frac{\sigma(\lambda x)}{\sigma(x)} = \frac{\overline{\lambda}}{\lambda}. \qquad (3.2)$$

Далее, если $x, y \in V^*$, но $(x, y) = 0$, то, применяя (3.1) к парам $\{x + y, x\}$, $\{x + y, y\}$, получим $\sigma(x) = \sigma(y)$ $(= \sigma(x + y))$. Заменяя x на λx, где $\lambda \in C^*$, и замечая, что $(x, y) = 0$ влечет $(\lambda x, y) = 0$, получим $\sigma(\lambda x) = \sigma(y)$. Следовательно, $\sigma(\lambda x) = \sigma(x)$, что в силу (3.2) приводит к абсурдному результату: $(\forall \lambda \in C^*)\ \overline{\lambda} = \lambda$. Таким образом, пространство V не содержит пар взаимно-ортогональных ненулевых векторов, что противоречит допущению $n > 1$. Следовательно, случай 3) невозможен. Тем самым лемма, а вместе с тем и теорема единственности доказана.

Примечание 1. Оба утверждения теоремы 1 остаются справедливыми также в случае, если V — евклидово пространство. Доказательство при этом упрощается: утверждение 1° легко вытекает уже из леммы 2.6, утверждение 2° сводится к рассмотрению случая 1) в доказательстве леммы 3.1.

Примечание 2. Приведенное выше доказательство теоремы 1 может быть легко приспособлено к случаю гильбертова пространства. Пусть H — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и α — сюръективный оператор на H, сохраняющий модуль скалярного произведения. Если $\{e_\nu\}_1^\infty$ — ортонормированный базис пространства H, то в силу сюръективности φ, $\{e_\nu^*\}_1^\infty$, где $e_\nu^* = \varphi(e_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, также является ортонормированным базисом H.

После этого дословно повторяется вся аргументация, содержащаяся в 2, с той лишь разницей, что биссектриса $u = e_1 + \ldots + e_n$ заменяется теперь вектором $u = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} p_\nu e_\nu$, где $\{p_\nu\}_1^\infty$ — любая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^2 < \infty$.

Дополнение А.

Доказанная выше теорема единственности позволяет легко редуцировать доказательство теоремы Вигнера к случаю $n \leqslant 3$*. Для осуществления этой редукции необходимо несколько обобщить введенное выше понятие квазиизометрии.

Пусть V и W — унитарные пространства, имеющие одну и ту же размерность n.

Определение А. *Отображение $\varphi: V \to W$ назовем квазиизометрией пространства V в W, если $(\forall x, y \in V)$ $|(\varphi(x), \varphi(y))| = |(x, y)|$. Множество всех квазиизометрий пространства V в W обозначим через $Q(V, W)$.*

Отображение $\varphi \in Q(V, W)$ будем называть изометрией I рода, если $(\forall x, y \in V)$ $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ и изометрией II рода, если $(\forall x,$

* Изложенная ниже редукция применима и к основной теореме проективной геометрии, сводя ее к трехмерному случаю.

$y \in V)$ $(\varphi(x), \varphi(y)) = (y, x)$. Изометрии I рода линейны и биективны, изометрии II рода антилинейны и биективны. Множество всех изометрий I (II) рода пространства V на W обозначим через $I_1(V, W)$ (соответственно — через $I_2(V, W)$. Отображения из $I(V, W) = I_1(V, W) \cup I_2(V, W)$ будем называть изометриями V на W.

На отображения из $Q(V, W)$ автоматически переносятся введенное в первом параграфе понятие эквивалентности квазиизометрий. Теорема 1, как легко видеть, равносильна следующему утверждению, лишь на первый взгляд более общему.

Теорема 1 а. *1^0. Каждая квазиизометрия $\varphi \in Q(V, W)$ эквивалентна некоторой изометрии $\psi \in I(V, W)$. 2^0. Если $n > 1$, то ψ определяется отображением φ однозначно, с точностью до постоянного комплексного множителя (модуль которого равен 1).*

В дальнейшем понадобится

Лемма А 1. *Пусть L — подпространство унитарного пространства V; $\varphi \in Q(V)$; $\tilde{L} = \langle \varphi(L) \rangle$, где $\varphi(L) = \{\varphi(x) | x \in L\}$. Тогда* $\dim \tilde{L} = \dim L$.

Доказательство. Выберем в L ортонормированный базис $\{e_\nu\}_1^r$ и дополним его до ортонормированного базиса $\{e_\nu\}_1^n$ пространства V. Полагая $e_\nu^* = \varphi(e_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, получим второй ортонормированный базис $\{e_\nu^*\}_1^n$.

Если $x = \sum \xi_\nu e_\nu$, $\varphi(x) = \sum \xi_\nu^* e_\nu^*$ $(\xi_\nu, \xi_\nu^* \in C, \nu = 1, \ldots, n)$, то $|\xi_\nu^*| = |(\varphi(x), e_\nu^*)| = |(\varphi(x), \varphi(e_\nu))| = |(x, e_\nu)| = |\xi_\nu|$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Если, в частности, $x \in L$, то $\xi_\nu^* = \xi_\nu = 0$ $(\nu > r)$, и следовательно, $\varphi(x) \in \langle e_1^*, \ldots, e_r^* \rangle$. Это показывает, что $\tilde{L} \subseteq \langle e_1^*, \ldots, e_r^* \rangle$. Так как, с другой стороны, $\langle e_1^*, \ldots, e_r^* \rangle \subseteq \tilde{L}$, то $\tilde{L} = \langle e_1^*, \ldots, e_r^* \rangle$ и, следовательно, $\dim \tilde{L} = \dim L$.

Следствие. *Ограничение $\varphi \downarrow L$ отображения φ на L является квазиизометрией L в $\tilde{L}$: $\varphi \downarrow L \in Q(L, \tilde{L})$.*

Допустим теперь, что $n > 3$ и что первое из утверждений теоремы 1 (а потому и теоремы 1 а) доказано для $(n-1)$-мерного случая, а второе — в полном объеме. Докажем справедливость первого утверждения в n-мерном случае.

Обозначим через $\boldsymbol{L}_{n-1}(V)$ множество всех $(n-1)$-мерных подпространств n-мерного унитарного пространства V. Если $L \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$, то на основании следствия леммы А 1 $\tilde{L} \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$ и $\varphi \downarrow L \in Q(L, \tilde{L})$. В силу индуктивного предположения $\varphi \downarrow L \sim \psi_L$, где $\psi_L \in I(L, \tilde{L})$.

Если $P, Q \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$, положим $D_{PQ} = P \cap Q$. Так как $(\psi_P \downarrow D_{PQ}) \sim (\varphi \downarrow D_{PQ}) \sim (\psi_Q \downarrow D_{PQ})$ и $\dim D_{PQ} \geqslant n - 2 > 1$, то в силу теоремы единственности

$$\psi_P \downarrow D_{PQ} = \lambda_{PQ} (\psi_Q \downarrow D_{PQ}), \tag{A$_1$}$$

где $\lambda_{PQ} \in C$, $|\lambda_{PQ}| = 1$. Очевидно

$$\lambda_{PQ} \cdot \lambda_{QP} = 1. \tag{A$_2$}$$

Соотношение (A_1) показывает, что

$$(\forall x \in D_{PQ})\, \psi_P(x) = \lambda_{PQ}\, \psi_Q(x). \qquad (A_3)$$

Из (A_3) вытекает, что $(\forall \mathbb{L} \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V))\, \psi_L \in I_1(\mathbb{L}, \tilde{\mathbb{L}})$ или $(\forall \mathbb{L} \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V))\, \psi_L \in I_2(\mathbb{L}, \tilde{\mathbb{L}})$. Пусть теперь $P, Q, R \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$. Полагая $D_{PQR} = P \cap Q \cap R$, будем иметь $\dim D_{PQR} \geqslant n-3 > 0$. Поэтому $(\exists x)\; x \in D_{PQR},\; x \neq 0$. Применяя ($A_3$) для выбранного вектора x к каждой из трех пар подпространств P, Q, R, получим

$$\lambda_{PQ} \cdot \lambda_{QR} \cdot \lambda_{RP} = 1. \qquad (A_4)$$

Зафиксировав подпространство R, положим $\lambda_{RL} = \lambda_L$ ($\lambda \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$). Соотношение ($A_4$) тогда в силу ($A_2$) примет вид: $\lambda_{PQ} = \frac{\lambda_Q}{\lambda_P}$. Соотношение ($A_3$) при этом перейдет в следующее:

$$(\forall x \in D_{PQ})\, \lambda_P\, \psi_P(x) = \lambda_Q\, \psi_Q(x). \qquad (A_5)$$

Определим теперь отображение $\psi: V \to V$, полагая $\psi(x) = \lambda_L\, \psi_L(x)$, если $x \in \mathbb{L}$, где $\mathbb{L} \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$. В силу ($A_5$) это определение корректно. Сделанное выше замечание об отображениях ψ_L ($\mathbb{L} \in \boldsymbol{L}_{n-1}(V)$) показывает, что ψ является унитарным или антиунитарным оператором на V. Очевидно, $\varphi \sim \psi$. Тем самым доказательство утверждения 1° теоремы 1 сведено к случаю, когда $n \leqslant 3$*.

Дополнение B

Теорема Вигнера в случае $n \geqslant 3$, как оказывается, является следствием так называемой основной теоремы проективной геометрии**. Пусть V и V' — n-мерные (например, левые) линейные пространства соответственно над телами K и K'. Основная теорема проективной геометрии утверждает, что при $n \geqslant 3$ всякий изоморфизм Φ решетки $\boldsymbol{L}(V)$ подпространств пространства V на решетку $\boldsymbol{L}(V')$ подпространств пространства V' порождается некоторым биективным полулинейным отображением φ пространства V на V'***. Всякое другое полулинейное отображение ψ, порождающее изоморфизм Φ, связано с φ соотношением $\psi(x) = \varphi(\lambda x)$ ($x \in V$), где λ — независящий от x ненулевой элемент тела K.

Пусть V — n-мерное унитарное пространство. Очевидно, изометрия $\varphi \in I(V)$ порождает автоморфизм $\tilde{\varphi}$ решетки $\boldsymbol{L}(V): \tilde{\varphi}(L) \overset{\text{def}}{=} \varphi(L) = \{\varphi(x) \mid x \in \mathbb{L}\}$. При этом $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \in \boldsymbol{L}(V)$, $\mathbb{L}_1 \perp \mathbb{L}_2$ влечет $\tilde{\varphi}(L_1) \perp \tilde{\varphi}(\mathbb{L}_2)$. Имеет место, как оказывается, обратное утверждение.

---

* Описанная выше редукция неприменима, если $n = 3$, ибо в одномерном случае теорема единственности не имеет места.

** Доказательство этой теоремы приведено, например, в [5].

*** Отображение $\varphi: V \to V'$ называется полулинейным, если являясь гомоморфизмом аддитивной группы пространства V в аддитивную группу пространства V', оно обладает тем свойством, что $(\forall x \in V)(\forall \lambda \in K)\, \varphi(\lambda x) = \lambda^{\alpha} \varphi(x)$, где α — зависящий только от φ изоморфизм тела K на тело K'.

Теорема 2. (Вигнер). *Пусть Φ — автоморфизм решетки $L(V)$, обладающий тем свойством, что $L_1, L_2 \in L(V)$, $L_1 \perp L_2$ влечет $\Phi(L_1) \perp \Phi(L_2)$. Тогда* $(\exists \varphi \in I(V))\ \Phi = \tilde{\varphi}$.

Доказательство. В силу основной теоремы проективной геометрии, автоморфизм Φ порождается некоторым биективным полулинейным оператором $\varphi: V \to V'$. Последний удовлетворяет следующим условиям:

$$(\forall x,\ y \in V)\, \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$(\forall \lambda \in C)(\forall x \in V)\, \varphi(\lambda x) = \lambda^{\alpha} \varphi(x) \ (\alpha \text{ — автоморфизм поля } C),$$

$$[x,\ y \in V, x \perp y] \Rightarrow [\varphi(x) \perp \varphi(y)].$$

Пусть $\{e_\nu\}_1^n$ — ортонормированный базис пространства V. В силу биективности φ и третьего из перечисленных свойств оператора φ, $\{\varphi(e_\nu)\}_1^n$ — ортогональный базис пространства V. Если $x = \sum\limits_\nu \xi_\nu e_\nu$, $y = \sum\limits_\nu \eta_\nu e_\nu$ ($\xi_\nu, \eta_\nu \in C$, $\nu = 1, \ldots, n$), то $(x,\ y) = \sum\limits_\nu \xi_\nu \bar{\eta}_\nu$, $(\varphi(x), \varphi(y)) = \sum\limits_\nu \rho_\nu \xi_\nu^\alpha \bar{\eta}_\nu^\alpha$, где $\rho_\nu = \|\varphi(e_\nu)\|^2 > 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$). Так как $(x,\ y) = 0$ влечет $(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$, то $\sum\limits_\nu \xi_\nu \bar{\eta}_\nu = 0$ влечет $\sum\limits_\nu \rho_\nu \xi_\nu^\alpha \bar{\eta}_\nu^\alpha = 0$. Полагая $x = e_\nu - e_\mu$ $(\lambda < \mu)$, $y = \sum\limits_\nu e_\nu$, получаем: $\rho_\nu = \rho_\mu$ $(\lambda < \mu)$. Таким образом, $\rho_1 = \ldots = \rho_n = \rho > 0$. Следовательно, $(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho \sum\limits_\nu \xi_\nu^\alpha \bar{\eta}_\nu^\alpha = \rho(x^\alpha,\ y^\alpha)$, где $x^\alpha = \sum\limits_\nu \xi_\nu^\alpha e_\nu$, $y^\alpha = \sum\limits_\nu \eta_\nu^\alpha e_\nu$. Полагая $\psi = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\varphi$, получаем

$$(\psi(x),\ \psi(y)) = (x^\alpha,\ y^\alpha). \tag{B$_1$}$$

Из условия $[(x,\ y) = 0] \Rightarrow [(x^\alpha,\ y^\alpha) = 0]$ при $x = e_1 - \tau e_2$, $y = \tau e_1 + e_2$ (τ — произвольное вещественное число) вытекает $\bar{\tau}^\alpha = \tau^\alpha$. Следовательно, τ^α — вещественное число. Это показывает, что α индуцирует некоторый изоморфизм поля R вещественных чисел в себя. Легко показать, что $\alpha \downarrow R$ — тождественный автоморфизм поля R. Следовательно, α является тождественным автоморфизмом поля C или комплексным сопряжением. В первом случае ψ — унитарный, во втором — антиунитарный оператор. Очевидно, автоморфизм Φ решетки $L(V)$ порождается оператором ψ. Из второго утверждения основной теоремы проективной геометрии легко вытекает, что оператор $\psi \in I(V)$, обладающий последним свойством, определяется автоморфизмом Φ однозначно с точностью до постоянного комплексного множителя (модуль которого, очевидно, равен 1).

Из теоремы 2 вытекает теорема 1 следующим образом. Пусть $\varphi \in Q(V)$. На основании леммы 1 А отображение $\Phi : L \to \tilde{L} = \langle \varphi(L) \rangle$ является изоморфизмом решетки $\boldsymbol{L}(V)$ в себя. Можно показать, что это отображение биективно и, следовательно, является автоморфизмом решетки $\boldsymbol{L}(V)$. Так как $[L_1 \perp L_2] \Rightarrow [\Phi(L_1) \perp \Phi(L_2)]$, то в силу теоремы 2 автоморфизм Φ порождается некоторой изометрией $\psi \in I(V) : \Phi(L) = \psi(L) (L \in \boldsymbol{L}(V))$. В частности, если $L = \langle x \rangle$, где $x \in V^*$, будем иметь $\Phi(L) = \langle \varphi(x) \rangle$, $\psi(L) = \langle \psi(x) \rangle$. Поэтому $\varphi(x) = \sigma(x)\psi(x)$, где $\sigma(x) \in C$, $|\sigma(x)| = 1$. Это означает, что $\varphi \sim \psi$. Тем самым теорема 1 доказана в случае $n \geqslant 3$. Заметим, что ее доказательство при $n = 2$ совсем просто, а при $n = 1$ — тривиально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Вигнер. Теория групп и ее приложения к квантовой механике и атомным спектрам. М., Изд-во 1961.

2. J. S. Lomont, P. Mendelson. The Wigner unitarity-antiunitarity theorem. Ann. of Math. Vol. 73, № 3, 1963, 548—559.

3. V. Bargman. Note on Wigner's theorem on symmetry operators. J. Math. Phys., 5, 1964, 862—868.

4. К. Р. Партасарати. Теория вероятностей на замкнутых подпространствах гильбертова пространства. «Математика», 14 : 5, 1950.

5. Э. Артин. Геометрическая алгебра, М., Изд-во 1970.

Поступила 5 мая 1971 г.