О КОЭФФИЦИЕНТАХ СТЕПЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, II

М. Н. Шеремета

1°. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

целая трансцендентная функция, а $M(r)$ — ее максимум модуля на $|z| = r$. Обозначим через $\Phi^*(x)$ функцию, обратную функции $\Phi(x) = \ln M(e^x)$. Такая функция существует и строго монотонно стремится к ∞ при $x \to \infty$, ибо $\Phi(x)$ — строго монотонно возрастающая функция, стремящаяся к ∞ при $x \to \infty$. Отметим, что из определения функции $\Phi^*(x)$ следует

$$\Phi^*(\ln M(r)) = \ln r. \tag{2}$$

Кроме того, через $\gamma(r)$ обозначим выражение

$$\gamma(r) = \frac{\ln\ln M(r)}{(\ln\ln r)^2}. \tag{3}$$

В [1] доказана теорема, утверждающая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\Phi^*(n)}{-\ln|a_n|} = 1, \tag{4}$$

если только

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\gamma(r)=\infty. \tag{5}$$

Целью настоящей заметки является исследование вопросов, когда в левой части равенства (4) существует предел, равный 1, и какими могут быть лакуны в разложении (1).

Мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $\gamma(r)$ монотонно стремится к ∞ при $r\to\infty$, и $|a_n/a_{n+1}|$ — возрастающая функция от n, то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\Phi^*(n)}{-\ln|a_n|}=1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть*

$$f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}a_{n_p}z^{n_p},\quad n_{p+1}>n_p,$$

—целая функция, для которой $\gamma(r)$ монотонно стремится к ∞ при $r\to\infty$. Тогда

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\Phi^*(n_p)}{\Phi^*(n_{p+1})}=1. \tag{7}$$

2°. Прежде всего докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mu(r)$ — максимальный член ряда (1). Тогда для функции, представленной рядом (1), выполняется равенство*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi^*(\ln\mu(r))}{\ln r}=1.$$

Доказательство. Так как $\frac{d\ln M(r)}{d\ln r}$ для целых трансцендентных функций монотонно стремится к ∞ при $r\to\infty$, то

$$\ln M\left(\frac{r}{2}\right)=\ln M\left(\frac{r}{e}\right)+\int_{\frac{r}{e}}^{\frac{r}{2}}\frac{d\ln M(t)}{d\ln t}\,d\ln t\geqslant\ln M\left(\frac{r}{e}\right)+$$
$$+\left.\frac{d\ln M(t)}{d\ln t}\right|_{t=\frac{r}{e}}(1-\ln 2),$$

откуда при $r\geqslant r_0$ имеем

$$\ln M\left(\frac{r}{2}\right)\geqslant\ln M\left(\frac{r}{e}\right)+\ln 2,$$

т. е.

$$M\left(\frac{r}{e}\right)\leqslant\frac{1}{2}M\left(\frac{r}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nr^n}{2^n}\leqslant\frac{\mu(r)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\mu(r).$$

Из последнего неравенства и неравенства Коши получаем

$$M\left(\frac{r}{e}\right) \leqslant \frac{1}{2} M\left(\frac{r}{2}\right) \leqslant \mu(r) < M(r), \tag{8}$$

откуда, ввиду (2), при $r \geqslant r_0$ имеем

$$\ln r - 1 \leqslant \Phi^*(\ln \mu(r)) \leqslant \ln r.$$

Из последних неравенств следует равенство, утверждаемое леммой 1.

Лемма 2. *Пусть $\nu(r)$ — центральный индекс ряда (1). Тогда, если для функции (1) выполняется условие (5), то*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\Phi^*(\nu(r))}{\ln r} = 1. \tag{9}$$

Если же $\gamma(r)$ монотонно стремится к ∞ при $r \to \infty$, то в левой части (9) *существует предел, равный 1, т. е.*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\Phi^*(\nu(r))}{\ln r} = 1. \tag{10}$$

Доказательство. Хорошо известно, что для целой функции выполняется

$$\ln \mu(r) = \ln \mu(1) + \int_1^r \frac{\nu(x)}{x}\, dx,$$

откуда

$$\ln \mu(r) \leqslant \ln \mu(1) + \nu(r) \ln r, \tag{11}$$

а при $r > e$

$$\ln \mu(r) \geqslant \ln \mu(1) + \int_{\frac{r}{e}}^{r} \frac{\nu(x)}{x}\, dx \geqslant \ln \mu(1) + \nu\left(\frac{r}{e}\right). \tag{12}$$

Из неравенств (8), (11) и (12) получаем

$$\frac{\ln M\left(\frac{r}{2}\right) - \ln 2 - \ln \mu(1)}{\ln r} \leqslant \nu(r) \leqslant \ln M(er) - \ln \mu(1),$$

откуда, как и при доказательстве леммы 1, получаем, что при $r \geqslant r_1 > e$ выполняется

$$\frac{\ln M\left(\frac{r}{e}\right)}{\ln r} \leqslant \nu(r) \leqslant \ln M(3r),$$

т. е. ввиду (2)

$$\Phi^*\left(\frac{\ln M\left(\frac{r}{e}\right)}{\ln r}\right) \leqslant \Phi^*(\nu(r)) \leqslant \ln 3r. \tag{13}$$

Из неравенств (13) видно, что для доказательства равенства (9) достаточно доказать, что при выполнении условия (5) имеет место равенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\Phi^*\left(\frac{\ln M\left(\frac{r}{e}\right)}{\ln r}\right)}{\ln r} = 1. \tag{14}$$

Допустим, что (14) не выполняется. Тогда существует число q, $0 \leqslant q < 1$, такое что для всех $r \geqslant R_1$ выполняется

$$\Phi^*\left(\frac{\ln M\left(\frac{r}{e}\right)}{\ln r}\right) \leqslant q \ln r$$

или ввиду определения функции $\Phi(x)$.

$$\Phi(\ln r - 1) \leqslant \Phi(q \ln r) \ln r.$$

В последнем неравенстве сделаем замену $q = \frac{1}{1+p}$, $p > 0$, и $\frac{1}{1+p} \ln r = x$. Тогда получим

$$\Phi((1+p)x - 1) \leqslant (1+p) x \Phi(x). \tag{15}$$

Пусть $x_0 = \max\left\{\frac{\ln R_1}{1+p},\ 1 + \frac{1}{p}\right\}$, а $x_n = (1+p)x_{n-1} - 1$ при $n \geqslant 1$. Тогда

$$x_n = (1+p)x_{n-1} - 1 = (1+p)\{(1+p)x_{n-2} - 1\} - 1 =$$
$$= (1+p)^2 x_{n-2} - \{1 + (1+p)\} = (1+p)^n x_0 - \{1 + (1+p) +$$
$$+ (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\} =$$
$$= (1+p)^n \left\{x_0 - \left(\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+p)^n}\right)\right\}.$$

Из последнего равенства получаем

$$(1+p)^n \left\{x_0 - \frac{1}{p}\right\} < x_n < (1+p)^n x_0,$$

откуда ввиду выбора x_0, имеем

$$(1+p)^n < x_n < (1+p)^n x_0. \tag{16}$$

Пусть $x_n \leqslant x < x_{n+1}$. Тогда из (15) получаем

$$\Phi(x) \leqslant \Phi(x_{n+1}) = \Phi((1+p)x_n - 1) \leqslant (1+p)x_n\Phi(x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (1+p)^n x_n x_{n-1} \cdots x_0 \Phi(x_0). \tag{17}$$

Из неравенств (16) и (17) получаем

$$\Phi(x) \leqslant (1+p)^{n+1}\Phi(x_0) \prod_{j=0}^{n} \{(1+p)^j x_0\} = (1+$$
$$+ p)^{1+2+\cdots+(n+1)} x_0^n \Phi(x_0) = (1+p)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} x_0^n \Phi(x_0),$$

откуда для $x_n \leqslant x < x_{n+1}$ при $n \to \infty$ выполняется

$$\ln \Phi(x) \leqslant \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ln(1+p) + n \ln x_0 + \\ + \ln \Phi(x_0) = \frac{n^2 \ln(1+p)}{2} (1 + o(1)). \tag{18}$$

Далее, при $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+1}$ из (16) имеем

$$n \ln(1+p) \leqslant \ln x_n \leqslant \ln x,$$

откуда

$$n \leqslant \frac{\ln x}{\ln(1+p)}. \tag{19}$$

Из неравенств (18) и (19) при $x \to \infty$ получаем

$$\ln \Phi(x) \leqslant \frac{\ln (x)^2}{2 \ln(1+p)} (1 + o(1),$$

т. е.

$$\frac{\ln \Phi(x)}{(\ln x)^2} \leqslant \frac{1 + o(1)}{2 \ln(1+p)}$$

или

$$\gamma(r) = \frac{\ln \ln M(r)}{(\ln \ln r)^2} \leqslant \frac{1 + o(1)}{2 \ln(1+p)},$$

что противоречит условию (5). Равенство (9) доказано.

Перейдем к доказательству равенства (10). Ввиду (13) достаточно доказать, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\Phi^*\left(\dfrac{\ln M\left(\frac{r}{e}\right)}{\ln r}\right)}{\ln r} = 1. \tag{20}$$

при условии, что $\gamma(r)$ монотонно стремится к ∞ при $r \to \infty$. Допустим, что (20) не выполняется. Тогда, как и при доказательстве равенства (9), получим

$$\Phi((1+p) x_k - 1) \leqslant (1+p) x_k \Phi(x_k), \tag{21}$$

где $p > 0$, а $\{x_k\}$ — некоторая последовательность, стремящаяся к ∞ при $k \to \infty$.

Из равенства (3) получаем

$$\ln M(r) = \exp\{\gamma(r) (\ln \ln r)^2\},$$

ткуда, определив функцию $\Phi(x)$, имеем

$$\Phi(x) = \exp\{\gamma(e^x) (\ln x)^2\}.$$

Поэтому неравенство (21) можно переписать следующим образом:

$$\gamma(\exp\{(1+p) x_k - 1\}) (\ln\{(1+p) x_k - 1\})^2 \leqslant \ln(1+p) + \\ + \ln x_k + \gamma(\exp\{x_k\}) (\ln x_k)^2,$$

$$\gamma(\exp\{(1+p)x_k-1\})\left\{1+\frac{\ln\left\{(1+p)-\frac{1}{x_k}\right\}}{\ln x_k}\right\}^2 \leqslant \frac{\ln(1+p)}{(\ln x_k)^2}+$$
$$+\frac{1}{\ln x_k}+\gamma(\exp\{x_k\}),$$

откуда при $k\to\infty$ получим

$$\gamma(\exp\{(1+p)x_k-1\})-\gamma(\exp\{x_k\})\leqslant-\gamma(\exp\{(1+p)\times$$
$$\times x_k-1\})\left\{2+\frac{\ln\left\{(1+p)-\frac{1}{x_k}\right\}}{\ln x_k}\right\}\frac{\ln\left\{(1+p)-\frac{1}{x_k}\right\}}{\ln x_k}+$$
$$+\frac{\ln(1+p)}{(\ln x_k)^2}+\frac{1}{\ln x_k}=-\gamma(\exp\{(1+p)x_k-1\})\times$$
$$\times\frac{2\ln(1+p)}{\ln x_k}(1+o(1))<0,$$

что невозможно из-за того, что $\gamma(r)$ монотонно стремится к ∞ при $r\to\infty$. Лемма 2 полностью доказана.

Отметим, что если не выполняются условия леммы 2, то утверждения (9) и (10), вообще говоря, не верны. Действительно, существует целая функция $f_1(z)$ (см. [1]), для которой

$$\ln M(r)=(1+o(1))\exp\{K(\ln\ln r)^2\},$$

где $K>0$ — некоторая постоянная величина. Для этой функции

$$\Phi^*(x)=\exp\left\{\left(\frac{\ln x+o(1)}{K}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Если a_n — коэффициенты степенного разложения функции $f_1(z)$, а p — некоторое число, удовлетворяющее условию

$$1<p<\exp\left\{\frac{1}{2K}\right\},$$

то, как доказано в [1], выполняется неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\Phi^*(n)}{-\ln|a_n|}\leqslant\frac{1}{p}.$$

Поэтому для функции $f_1(z)$ выполняется

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\Phi^*(\nu(r))}{\ln r}=\varlimsup_{r\to\infty}\left\{\frac{\nu(r)\Phi^*(\nu(r))}{-\ln|a_{\nu(r)}|}\cdot\frac{-\ln|a_{\nu(r)}|}{\nu(r)\ln r}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r)\ln r-\ln\mu(r)}{\nu(r)\ln r}\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\frac{n\Phi^*(n)}{-\ln|a_n|}\leqslant\frac{1}{p}<1.$$

3°. Докажем теорему 1. Обозначим $r_n=|a_{n-1}/a_n|$. Так как $f(z)$ — целая трасцендентная функция, то, исходя из условия теоремы, r_n монотонно стремится к ∞ при $n \to \infty$. Тогда (см. [2, стр. 191] при $r_n \leqslant r < r_{n+1}$ имеем

$$\mu(r) = |a_n| r^n, \quad \nu(r) = n,$$

откуда по лемме 1 при $n \geqslant n_1(\varepsilon)$ выполняется

$$\Phi^*(\ln \mu(r)) = \Phi^*(\ln|a_n| + n \ln r) \geqslant (1-\varepsilon) \ln r,$$

т. е.

$$-\ln|a_n| \leqslant n \ln r - \Phi((1-\varepsilon)\ln r), \tag{22}$$

а по лемме 2 при $n \geqslant n_2(\varepsilon)$ выполняется

$$(1-\varepsilon)\ln r < \Phi^*(n) < (1+\varepsilon)\ln r,$$

т. е.

$$\Phi((1-\varepsilon)\ln r) < n < \Phi((1+\varepsilon)\ln r). \tag{23}$$

Пусть $n = n(r)$ определяется неравенством $r_n \leqslant r < r_{n+1}$. Из неравенств (22) и (23) получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{n\Phi^*(n)}{-\ln|a_n|} \geqslant \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r)(1-\varepsilon)\ln r}{n(r)\ln r - \Phi((1-\varepsilon)\ln r)} =$$

$$= \varliminf_{r\to\infty} \frac{1-\varepsilon}{1 - \dfrac{\Phi((1-\varepsilon)\ln r)}{n(r)\ln r}} \geqslant (1-\varepsilon) \varliminf_{r\to\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{\Phi((1-\varepsilon)\ln r)}{\Phi((1+\varepsilon)\ln r)} \dfrac{1}{\ln r}} = 1-\varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа ε из последнего неравенства и равенства (4) получаем равенство (6).

4°. И наконец, докажем теорему 2. Так как $\Phi^*(n_p) < \Phi^*(n_{p+1})$, то достаточно доказать, что

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\Phi^*(n_p)}{\Phi^*(n_{p+1})} = 1. \tag{24}$$

Допустим, что (24) не выполняется, т. е. существует число σ, $0 \leqslant \sigma < 1$, и последовательность $p_k \to \infty$, такие, что

$$\Phi^*(n_{p_k}) \leqslant \sigma \Phi^*(n_{p_k+1}),$$

т. е.

$$n_{p_k} \leqslant \Phi(\sigma\Phi^*(n_{p_k+1})).$$

Пусть r_k — то значение r, для которого $\nu(r_k - 0) \leqslant n_{p_k} < n_{p_k+1} \leqslant \leqslant \nu(r_k+0)$. Тогда

$$\frac{\Phi^*(\nu(r_k-0))}{\ln r_k} \leqslant \frac{\Phi^*(n_{p_k})}{\ln r_k} \leqslant \sigma \frac{\Phi^*(n_{p_k+1})}{\ln r_k} \leqslant \sigma \frac{\Phi^*(\nu(r_k+0))}{\ln r_k}.$$

Переходя в последних неравенствах к пределу и используя лемму 2, получим $\sigma \geqslant 1$, что невозможно. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Н. Шеремета. О коэффициентах степенного разложения целых функций. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 17. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.

2. Г. Полиа, Г. Сёге. Задачи и теоремы из анализа, ч. II, 2-е изд., М., Гостехиздат, 1956.

Поступила 26 марта 1971 г.