ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. С. Сохин

Обозначим через $U(q;\ m,\ n;\ \lambda)$ дифференциальное уравнение

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

в котором функция $q(x)$ (потенциал) вещественная и удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^1 x\left|q(x) - \frac{m(m+1)}{x^2}\right|dx + \int\limits_1^\infty x\left|q(x) - \frac{n(n+1)}{x^2}\right|dx < \infty, \tag{2}$$

$$m = -1,\ 0,\ 1, \ldots . \quad n = 0,\ 1 \ldots$$

такой потенциал будем называть (m, n)-особенным (m — особенность в нуле, n — особенность на бесконечности). Уравнение $U(q;\ m,\ n;\ \lambda)$ и граничное условие

$$y(0) = 0, \quad m \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}(yh' - y'h) = 0, \quad m = -1, \tag{3'}$$

где

$$h'' - qh = 0, \quad h(0) \neq 0,$$

порождают самосопряженную граничную задачу, которую обозначим через $U(q;\ m,\ n)$.

Для граничной задачи $U(q;\ m,\ n)$ справедлива.

Теорема 1. *Граничная задача $U(q;\ m,\ n)$ имеет непрерывный спектр, заполняющий интервал $(0,\ \infty)$ и, возможно, конечное число собственных значений — μ_k^2. Все они отрицательные и, простые. При $n \geq 1$ собственный значением может быть нуль Существуют решения задачи, порождающие равенство Парсеваля*

$$(f,\ g) = \sum_{k=1}^{p} Uf(i\mu_k)\overline{Ug(i\mu_k)} + \frac{1}{2\pi}(Uf,\ Ug), \tag{4}$$

где

$$Uf(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} u(x,\ \lambda) f(x)\,dx,\ \ \lambda > 0,\quad \lambda = i\mu_k, \tag{4'}$$

$$(f,\ g) = \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

и удовлетворяющие при $x\to\infty$ асимптотически равенствам

$$\begin{gathered} u(x,\ \lambda) = e^{i\lambda x} - S(-\lambda)e^{-i\lambda x} + 0(1),\quad \lambda > 0 \\ u(x,\ i\mu_k) = m_k e^{-\mu_k x}[1 + o(1)],\quad \mu_k > o,\quad m_k > 0, \\ k = 2,\ \dots,\ p \\ u(x,\ i\mu_1) = m_1 x^{-n}[1 + o(1)],\quad \mu_1 = 0,\quad m_1 > 0\quad (n \geqslant 1). \end{gathered} \tag{5}$$

Величины μ_k, m_k, $S(\lambda)$ называются данными рассеяния, а $S(\lambda)$ — функцией рассеяния.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Для того, чтобы числа $\mu_1 \geqslant 0$, $m_1 > 0$, $\mu_k > 0$, $m_k > 0$ $k = 2, \dots, p$ и функция $S(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty)$ были данными рассеяния граничной задачи $U(q;\ m,\ n)$, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:*

1. $|S(\lambda)| = 1,\quad S(-\lambda) = \overline{S(\lambda)}$.
2. *Существует функция*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(-1)^m - S(\lambda)]\,e^{i\lambda x}\,d\lambda$$

и $f(x) \in L_1(-\infty,\ \infty)$; при $x \geqslant 0$ существует производная $f'(x)$ такая, что $x f'(x) \in L_1(0,\ \infty)$.

3. $$\frac{1}{2\pi}[\arg S(o) - \arg S(\infty)] = p + \frac{m-n}{2} + \frac{(-1)^n - S(o)}{4},$$
$$m = -1,\ 0,\ 1,\ \dots,\quad n = 0,\ 1,\ \dots \tag{6}$$

4. $(-1)^n - S(o) = 0,\ n \geqslant 1$.

Аналогичная теорема для краевой задачи вида $U(q;\ n,\ n)$ была ранее доказана В. Ф. Коропом [2]. Заметим, что в этом случае в равенстве (6) (теорема Левинсона) отсутствует слагаемое $\frac{m-n}{2}$. Формула (6) при $m \neq n$ обобщает теорему Левинсона и показывает, как влияют особенности потенциала в нуле и на бесконечности на изменение аргумента функции $S(\lambda)$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на применении преобразований специального вида [1—3], которые переводят решения задачи с особенностями в решения задачи, имеющей другие особенности. Существуют преобразования двух видов: изменяющие особенность только в нуле и изменяющие особенность в нуле и на бесконечности. Путь доказательства следующий: сначала уравниваются особенности при помощи преобразований первого вида. Затем, принимая во внимание справедливость теорем 1 и 2 для задачи $U(q; n, n)$ и изменение данных рассеяния при обратных преобразованиях [1, 2], получаем соответствующие утверждения о данных рассеяния задачи $U(q; m, n)$.

При доказательстве нам будут нужны некоторые частные решения уравнения $U(q; m, n; \lambda)$ и их свойства.

Лемма 1. *Если*

$$\int_a^\infty |q(x) - n(n+1)x^{-2}|\,dx < \infty, \quad a > 0,$$

то уравнение $U(q; m, n; \lambda)$ *при всяком* $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \neq 0$ $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$) *имеет решение* $e^{(1)}(x, \lambda) \equiv e(x, \lambda)\,(e^{(2)}(x, \lambda))$, *удовлетворяющее равенству*

$$\lim_{x\to\infty} e(x, \lambda)\,e^{-i\lambda x} = 1 \; (\lim_{x\to\infty} e^{(2)}(x, \lambda)\,e^{i\lambda x} = 1).$$

Решение $e(x, \lambda)$ *и* $e^{(2)}(x, \lambda)$ *при* $\operatorname{Im}\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ *линейно независимы.*

Лемма 2. *Если*

$$\int_0^a x\,|q(x) - m(m+1)\,x^{-2}|\,dx < \infty, \quad a > 0,$$

то уравнение $U(q; m, n; \lambda)$ *имеет при всяком* λ *линейно независимую систему решений* $g(x, \lambda)$ *и* $h(x, \lambda)$, *удовлетворяющую при* $x \to 0$ *равенствам*

$$g(x, \lambda) = x^{m+1}[1 + o(1)], \quad \frac{dg}{dx^{m+1}} = 1 + o(1),$$

$$h(x, \lambda) = x^{-m}[1 + o(1)], \quad \frac{d(x^m h)}{dx} = o(x^{-1}).$$

Лемма 3. *Если*

$$\int_a^\infty x\,|q(x) - n(n+1)\,x^{-2}|\,dx < \infty, \quad a > 0,$$

то уравнение $U(q; m, n; 0)$ имеет линейно независимую систему решений $g(x)$ и $h(x)$, удовлетворяющую при $x \to \infty$ равенствам

$$g(x) = x^{n+1}[1 + o(1)], \quad \frac{dg}{dx^{n+1}} = 1 + o(1),$$

$$h(x) = x^{-n}(1 + o(1)], \quad \frac{d(x^n h)}{dx} = o(x^{-1}).$$

Эти леммы, следуя [1], нетрудно доказать при помощи соответствующих интегральных уравнений.

Опишем теперь преобразования, изменяющие особенность только в нуле.

Пусть функция $e(x, i\mu)$ — решение уравнения $U(q; m, n; i\mu)$, $m \geqslant 1$, обладающее свойствами

$$e(x, i\mu) = \begin{cases} Ax^{-m}[1 + o(1)], & x \to 0, \\ e^{-\mu x}[1 + o(1)], & x \to \infty, \end{cases}$$

причем $\mu > 0$ настолько большое, что $e(x, i\mu) > 0$, $0 < x < \infty$. Преобразование вида

$$u_1(x, \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{e(x, i\mu)} \int_x^\infty e(t, i\mu)\, u(t, \lambda)\, dt \tag{7}$$

переводит решения $u(x, \lambda)$ уравнения $U(q; m, n; \lambda)$ в решения $u_1(x, \lambda)$ уравнения $U(q_1; m-1, n; \lambda)$, в котором потенциал $q_1(x) = q(x) + \Delta q(x)$, при этом $\Delta q(x) = -2[\ln e(x, i\mu)]''$, не имеет особенности при $x \to \infty$ и имеет особенность вида $-2mx^{-2}$ при $x \to 0$. Функция

$$g_1(x, i\mu) = [e(x, i\mu)]^{-1}$$

удовлетворяет уравнению $U(q_1; m-1, n; i\mu)$. Функция рассеяния $S_1(\lambda)$ преобразованной задачи выражается через функцию рассеяния исходной задачи по формуле

$$S_1(\lambda) = -\frac{\lambda - i\mu}{\lambda + i\mu} S(\lambda).$$

Назовем решение уравнения $U(q; m, n; \lambda)$, асимптотически равное x^{m+1} (x^{-m}) при $x \to 0$, регулярным (нерегулярным). Преобразование (7) переводит регулярное (нерегулярное) решение в регулярное (нерегулярное) решение.

Если семейство функций $u(x, \lambda)$ порождает равенство Парсеваля вида (4), то семейство функций $u_1(x, \lambda)$ также порождает равенство Парсеваля вида (4).

Пусть функция $g(x, i\mu)$ — решения уравнения $U(q; m, n; i\mu)$, $m \geqslant 0$, обладающее свойствами

$$g(x, i\mu) = \begin{cases} x^{m+1}[1 + o(1)], & x \to 0, \\ Ae^{\mu x}[1 + o(1)], & x \to \infty, \end{cases}$$

причем $\mu > 0$ настолько большое, что

$$g(\ , i\mu) > 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Преобразование вида

$$u_1(x, \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{g(x, i\mu)} \int_0^x g(t, i\mu) u(t, \lambda) dt \tag{8}$$

переводит решения $u(x, \lambda)$ уравнения $U(q;\ m, n;\ \lambda)$ в решения $u_1(x, \lambda)$ уравнения $U(q_1;\ m+1, n;\ \lambda)$, в котором потенциал $q_1(x) = q(x) + \Delta q(x)$, где $\Delta q(x) = -2[\ln g(x, i\mu)]''$ не имеет особенности при $x \to \infty$ и имеет особенность вида $(2m+2)x^{-2}$ при $x \to 0$.

Функция рассеяния $S_1(\lambda)$ преобразованной задачи выражается через функцию рассеяния $S(\lambda)$ исходной задачи по формуле

$$S_1(\lambda) = -\frac{\lambda + i\mu}{\lambda - i\mu} S(\lambda).$$

Функция

$$e_1(x, i\mu) = [g(x, i\mu)]^{-1}$$

удовлетворяет уравнению $U(q_1;\ m+1, n;\ i\mu)$.

При этом преобразовании сохраняется свойство регулярности решений.

Если семейство функций $u(x, \lambda)$ порождает равенство Парсеваля, то преобразованное семейство также порождает равенство Парсеваля.

Рассмотрим преобразование, изменяющее особенность в нуле и на бесконечности. Ограничимся нужным нам случаем $m = -1$, $n > 0$.

Пусть $h(x)$ — решение уравнения $U(q;\ -1, n;\ 0)$, удовлетворяющее вронскианному граничному условию (3′).

Преобразование

$$u_1(x, \lambda) = u(x, \lambda) + h_1(x) \int_0^x h(t) u(t, \lambda) dt, \tag{9}$$

$$\text{где } h_1(x) = -h(x) \left| \int_0^x h^2(t) dt \right|^{-1},$$

переводит решения $u(x, \lambda)$ уравнения $U(q;\ -1, n;\ \lambda)$ в решения уравнения $U(q_1;\ 1, r;\ \lambda)$, в котором потенциал

$$q_1(x) = q(x) + 2[h_1(x) h(x)]',$$

$$r = \begin{cases} n+2, & h(x) = Ax^{n+1}[1 + o(1)],\ x \to \infty, \\ n, & h(x) = m_0 x^{-n}[1 + o(1)],\ x \to \infty,\ m_0 > 0. \end{cases}$$

В случае $r = n$ функцию $h(x)$ считаем нормированной так, что $\int_0^\infty h^2(t) = 1$.

Функция $h_1(x)$ удовлетворяет уравнению $U(q_1;\ 1, r;\ 0)$ и обладает свойствами

$$h_1(x) = \begin{cases} Bx^{-1}[1+o(1), & x \to 0, \\ (2n+3)A^{-1}x^{-n-2}[1+o(1)], & x \to \infty,\ r = n+2, \\ -m_0 x^{-n}[1+o(1)], & x \to \infty,\ r = n. \end{cases}$$

Различные значения r означают: $r = n+2$ — отсутствие нулевого собственного значения, $r = n$ — наличие нулевого собственного значения.

Преобразование (9) не меняет асимптотику решений при $x \to \infty$.

Граничное условие (3′) переходит в нулевое граничное условие для решений уравнения $U(q;\ 1, r;\ \lambda)$.

Заметим, что преобразование (9) переводит собственные функции в собственные функции преобразованной задачи и не вводит новых собственных значений, а лишь исключает собственную функцию, отвечающую нулевому собственному значению.

Если семейство $u(x, \lambda)$ порождает равенство Парсеваля вида (4), то преобразованное семейство также порождает равенство Парсеваля вида (4), в котором не содержится слагаемого, отвечающего нулевому собственному значению.

Рассмотрим обратное преобразование. Пусть $h_1(x)$ — решение уравнения $U(q_1;\ 1, r;\ \lambda)\ (r = n, n+2)$, обладающее свойством

$$h_1(x) = Dx^{-r}[1+o(1)],\ x \to \infty; \quad D = \begin{cases} 1, & r = n+2, \\ -m_0, & r = n. \end{cases}$$

Так как нулевое собственное значение отсутствует, то

$$h_1(x) = Ax^{-1}[1+o(1)],\ x \to 0.$$

Преобразование, обратное преобразованию (9), имеет вид

$$u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + h(x)\int_x^\infty h_1(t)\, u_1(t, \lambda)\, dt, \tag{10}$$

где

$$h(x) = -h_1(x)\left[a + \int_x^\infty h_1^2(t)\, dt\right]^{-1}, \quad a = \begin{cases} 0, & r = n+2, \\ 1, & r = n. \end{cases}$$

Преобразование (10) переводит решения $u_1(x, \lambda)$ уравнения $U(q_1;\ 1, r;\ \lambda)$ в решения $u(x, \lambda)$ уравнения $U(q;\ -1, n;\ \lambda)$, в котором потенциал

$$q(x) = q_1(x) - 2[h_1(x)\, h(x)]'.$$

Функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению $U(q;\ -1, n;\ 0)$, граничному условию (3′) и обладает свойствами

$$h(x) = \begin{cases} -A^{-1}[1+o(1)], & x \to 0,\ \lim\limits_{x\to 0} x^{-1}h_1(x) = A, \\ m_0 x^{-n}[1+o(1)], & x \to \infty,\ r = n, \\ (2n+3)x^{n+1}[1+o(1)], & x \to \infty,\ r = n+2. \end{cases}$$

Преобразование (10) не меняет асимптотику решений при $x \to \infty$. Если $r = n$, то преобразование (10) вводит собственную функцию, отвечающую нулевому собственному значению.

Если семейство функций $u_1(x, \lambda)$ порождает равенство Парсеваля вида (4) без слагаемого с нулевым собственным значением, то преобразованное семейство также порождает равенство Парсеваля вида (4), содержащее при $r = n$ слагаемое, отвечающее нулевому собственному значению.

Доказательство теорем 1 и 2. *Необходимость*. Случай $m > n \geqslant 0$. Перейдем от задачи $U(q;\ m, n)$ к задаче $U(q_1;\ n, n)$, применив $m - n$ раз преобразование (7), понижающее особенность только в нуле.

Пусть p — количество собственных значений, $S_1(\lambda)$ — функция рассеяния задачи $U(q_1;\ n, n)$. Согласно [2] выполнены условия

1. $|S_1(\lambda)| = 1,\ S_1(-\lambda) = \overline{S_1(\lambda)}$. (11.1)

2. Существует функция

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(-1)^n - S_1(\lambda)]\, e^{i\lambda x}\, d\lambda \in L_1(-\infty, \infty), \qquad (11.2)$$

при $x > 0$ существует $f'(x)$ и $xf'(x) \in L_1(0, \infty)$.

3. $\frac{1}{2\pi}[\arg S(0) - \arg S(\infty)] = p + \frac{(-1)^n - S(0)}{4}$. (11.3)

4. $(-1)^n - S(o) = 0,\ n \geqslant 1$. (11.4)

Пусть семейство функций $u_1(x, \lambda)\,(\lambda > 0,\ \lambda = i\mu_k,\ \mu_1 = 0,\ \mu_k > 0,\ k = 2, \ldots, p)$ порождает равенство Парсеваля вида (4) и имеет асимптотику при $x \to \infty$

$$u_1(x, \lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda x} - S_1(-\lambda)\, e^{-i\lambda x} + o(1), & \lambda > 0, \\ m_k^1 e^{-\mu_k x}[1 + o(1)], & \lambda = i\mu_k,\ m_k^{(1)} > 0,\ k = 2, \ldots, p, \\ m_1^{(1)} x^{-n}[1 + o(1)], & \lambda = 0,\ m_1^{(1)} > 0,\ (n \geqslant 1). \end{cases}$$

Так как преобразование (8), обратное к (7), не вводит новых собственных функций, то семейство функций $u(x, \lambda)$, полученное преобразованием семейства $u_1(x, \lambda)$ по формуле (8), также порождает равенство Парсеваля (4) и, как нетрудно проверить, имеет асимптотику вида (5) (с точностью до комплексного множителя γ, $|\gamma| = 1$) при $x \to \infty$, в которой

$$S(\lambda) = \left(\frac{\lambda + i\mu}{\lambda - i\mu}\right)^{m-n} S_1(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

$$m_k = m_k^{(1)} \sqrt{\frac{\mu + \mu_k}{\mu - \mu_k}}, \quad k = 1, \ldots, p.$$

Числа μ_k, m_k и функция $S(\lambda)$ образуют данные рассеяния задачи $U(q;\ m, n)$.

Теорема 1 с очевидностью следует из свойств упомянутых преобразований и справедливости ее для задачи $U(q;\ n,\ n)$.

Объединив лемму 1 и следствие к ней [2], получим такое утверждение.

Лемма 4. *Если $S_1(\lambda)$ обладает свойством (11.2), то функция $S_1(\lambda)$, умноженная на $\frac{\lambda \pm i\mu}{\lambda \mp i\mu}$ $(\mu > 0)$, также обладает этим свойством.*

Из равенства $S_1(o) = S(o)$, равенств (11.1)—(11.4) и леммы (4) вытекает необходимость условий 1—4 теоремы 2. Случай $0 \leqslant m < n$ исследуется аналогично применением преобразований, повышающих особенность только в нуле. Случай $m = -1$, $n = 0$ исследован в [2]. Рассмотрим последний возможный случай, а именно, случай $(-1,\ n)$-особенности $(n > 0)$. Применив преобразование (9), повышающее особенность в нуле и на бесконечности, перейдем к рассмотренной выше задаче $U(q_1;\ 1,\ r)$, где $r = n + 2$, если нет нулевого собственного значения и $r = n$, если нуль является собственным значением. В задаче $U(q_1;\ 1,\ r)$ при $r = n$ нулевое собственное значение исключено, т. е. мы пришли к рассмотренному случаю.

Достаточность. Пусть числа $\mu_1 \geqslant 0$, $m_1 > 0$, $\mu_k > 0$, $m_k > 0$ $(k = 2, \ldots, p)$ и функция $S(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ удовлетворяют условиям 1—4 теоремы 2. Рассмотрим, например, случай $m > n \geqslant 0$. Положим

$$\mu_k^{(1)} = \mu_k,\ m_k^{(1)} = m_k \sqrt{\frac{\mu - \mu_k}{\mu + \mu_k}},\ k = 1, 2, \ \ldots, \ p,$$

$$S_1(\lambda) = \left(-\frac{\lambda - i\mu}{\lambda + i\mu}\right)^{m-n} S(\lambda),\ -\infty < \lambda < \infty,$$

где $\mu > 0$ достаточно большое число. Мы видим, что величины $\mu_k^{(1)}$, $m_k^{(1)}$, $S(\lambda)$ удовлетворяют условиям (11.1)—(11.4), необходимым и достаточным, чтобы они являлись данными рассеяния некоторой задачи $U(q_1;\ n,\ n)$. Восстановим потенциал $q_1(x)$ по $\mu_k^{(1)}$, $m_k^{(1)}$, $S_1(\lambda)$ согласно [2]. Затем, воспользовавшись $m - n$ раз преобразованием (), повышающим особенность только в нуле, получим $(m,\ n)$-особенный потенциал $q(x)$ задачи с данными рассеяния μ_k, m_k, $S(\lambda)$.

Случай $0 \leqslant m < n$ исследуется аналогично. Построив по совокупности величин

$$\mu_k^{(1)} = \mu_k,\ m_k^{(1)} = m_k \sqrt{\frac{\mu + \mu_k}{\mu - \mu_k}},\ S_1(\lambda) = \left(-\frac{\lambda + i\mu}{\lambda - i\mu}\right)^{n-m} S(\lambda)$$

$(n,\ n)$-особенный потенциал $q_1(x)$ согласно [2], затем, воспользовавшись $n - m$ раз преобразованием (7), понижающим особенность в нуле, получим $(m,\ n)$-особенный потенциал задачи с данными рассеяния μ_k, m_k, $S(\lambda)$.

Случай $m = -1$, $n = 0$ исследован в [2].

Наконец, обратимся к случаю $(-1, n)$-особенности $(n > 0)$. Положим

$$r = \begin{cases} n+2, & \mu_1 > 0, \\ n, & \mu_1 = 0. \end{cases}$$

Восстановим $(1, r)$-особенный потенциал $q_1(x)$ по совокупности величин μ_k, m_k $(k = 1, \ldots, p, r, r = n+2;\ k = 2, \ldots, p,\ r = n)$, $S(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty)$ (что возможно согласно изложенному выше) и перейдем к задаче $U(q; -1, n)$ с данными рассеяния μ_k, m_k $(k = 1, \ldots, p)$, $S(\lambda)\,(-\infty < \lambda < \infty)$ при помощи преобразования (10). Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность проф. В. А. Марченко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Харьков, Изд-во ХГУ, 1960.

2. В. Ф. Короп. Обратная задача рассеяния для уравнения с особенностью. «Сибирск. матем. журн.», т. 11, № 5, 1961.

3. Л. Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния. УМН, т. 14, в. 4(88), 1959.

Поступила 25 апреля 1972 г.