О ЗАМЫКАНИИ МНОЖЕСТВА НЕРАЗЛОЖИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С ФИКСИРОВАННЫМ СПЕКТРОМ

Л. С. Кудина

§ 1. Формулировка основного результата

Настоящая статья является продолжением нашей работы [1], в ней сохранена принятая терминология.

Постановка вопроса, рассматриваемого ниже, возникла в связи со следующей теоремой, принадлежащей Партасаратхи, Рао и Варадгену [2].

Теорема. *Множество неразложимых законов является плотным в смысле слабой сходимости во множестве всех вероятностных законов.*

Пусть A — любое наперед замкнутое множество в R^n. Рассмотрим множество всех неразложимых законов, спектр которых равен A. Это множество, как было показано в [1], непусто. Возникает вопрос, является ли оно плотным в классе всех законов со спектром A.

Если A — ограниченное неразложимое множество, то любой закон со спектром A — неразложимый [2]; в этом случае утвердительный ответ на вопрос тривиален. Оказывается не для любого разложимого множества A ответ на наш вопрос утвердителен.

Пример. Рассмотрим одномерный закон $P = c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2$ ($c_0,\ c_1,\ c_2 > 0$; $\sum c_j = 1$); для него $S(P) = \{0,\ 1,\ 2\}$. Так как $\varphi(t;\ P) = c_0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it}$, то для разложимости закона P необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $c_0 + c_1 z + c_2 z^2$ имел вещественные корни, т. е. чтобы $c_1^2 \geqslant 4c_0c_2$. В случае $c_1^2 > 4c_0c_2$ закон P невозможно аппроксимировать неразложимыми законами P_m с $S(P_m) = \{0, 1, 2\}$, поскольку из $P_m \to P$, $\varphi(t;\ P_m) = c_{0m} + c_{1m}e^{it} + c_{2m}e^{2it}$ следует, что $c_{jm} \to c_j$ ($j = 0,\ 1,\ 2$), и для достаточно больших m выполняется $c_{1m}^2 > 4c_{0m}c_{2m}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть A — непустое замкнутое множество в R^n, если A ограничено, дополнительно предположим, что оно несчетно. Тогда множество неразложимых законов, спектр которых совпадает с A, является плотным в смысле слабой сходимости во множестве всех законов, спектр которых совпадает с A.*

При доказательстве будем отдельно рассматривать случаи ограниченного и неограниченного множества A. Будем всюду считать, это, конечно, не уменьшает общности, что $0 \in A$.

§ 2. Случай ограниченного несчетного множества A

Лемма 1. *Пусть D — не более чем счетное множество. Существует такая точка a, что множество $B = D \cup \{a\}$ будет неразложимым.*

Доказательство. Пусть $D = \{x_k\}$, $0 \in D$. Возьмем точку a такую, что $a \neq x_k + x_l$, $a \neq x_k - x_l$, $a \neq x_l/2$, где x_k и x_l — произвольные точки множества D.

Предположим, что $B = D \cup \{a\}$ — разложимое множество, т. е. $B = B_1 + B_2$, где B_1 и B_2 содержат не менее двух точек каждое. Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \in B_1$, $0 \in B_2$. Из того, что $0 \in B_1$, $0 \in B_2$, получаем $B_1 \subset B$ и $B_2 \subset B$, но тогда из $B = B_1 + B_2$ следует, что имеет место одно из следующих равенств: $x_k + x_l = a$, $x_k + a = x_l$, $2a = x_l$, что невозможно в силу выбора точки a.

Прежде чем сформулировать следующую лемму, напомним, что дискретным спектром закона P называется множество

$$D(P) = \{x : P(\{x\}) > 0\}.$$

Лемма 2. *Пусть P — закон, для которого $S(P) = A$, где A — ограниченное замкнутое множество. Пусть k и l — точки, общие для множества A и опорных к нему гиперплоскостей, ортогональных диаметру. Тогда, если $k, l \in D(P)$ и множество $D(P)$ — неразложимое, то закон P — неразложимый.*

Доказательство. Предположим, что P — разложимый закон, т. е. $P = P_1 * P_2$, где $P_1 \neq \varepsilon_a$, $P_2 \neq \varepsilon_a$ ни для какого a. Известно [3], что имеют место соотношения

$$S(P) = S(P_1) + S(P_2), \tag{1}$$

$$D(P) = D(P_1) + D(P_2). \tag{2}$$

В работе [1] доказано, что точки k и l единственным образом представляются в виде $k = k_1 + k_2$, $l = l_1 + l_2$, где k_j и l_j ($j = 1, 2$) — точки, общие для множества $S(P_j)$ и опорных к нему гиперплоскостей, ортогональных диаметру множества A. В силу доказанных в [1] соотношений

$$P(\{k\}) = P_1(\{k_1\}) P_2(\{k_2\}),$$

$$P(\{l\}) = P_1(\{l_1\}) P_2(\{l_2\})$$

получаем, что $k_1, l_1 \in D(P_1)$; $k_2, l_2 \in D(P_2)$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $k = k_1 = k_2 = 0$. Из неразложимости множества $D(P)$ следует, что одно из множеств $D(P_1)$, $D(P_2)$ состоит из одной точки 0. Для определенности будем считать, что $D(P_2) = \{0\}$. Следовательно, проекция множества $S(P_2)$ на диаметр множества A состоит из одной точки, а это означает (см. [1, следствие 1]), что $S(P_2) = \{0\}$. Тем самым доказана неразложимость закона P.

Переходим к доказательству теоремы 1 для случая ограниченного множества.

Если $D(P) = \varnothing$, то искомая последовательность неразложимых законов задается так:

$$P_m(E) = \left(1 - \frac{2}{m}\right) P(E) + \frac{1}{m}\varepsilon_k(E) + \frac{1}{m}\varepsilon_l(E), \tag{3}$$

где k и l определены в лемме 2. Так как $D(P_m) = \{k, l\}$ — неразложимое множество, то согласно лемме 2 законы P_m — неразложимые.

Пусть теперь $D(P) \neq \varnothing$. Аппроксимируя закон P законами (3), видим, что, не уменьшая общности, можно считать $k, l \in D(P)$. Из несчетности множества $S(P)$ и леммы 1 вытекает, что можно найти точку $a \in S(P)$ такую, чтобы множество $\{a\} \cup D(P)$ было неразложимым. Тогда искомая последовательность законов $\{P_m\}$ задается следующим образом:

$$P_m(E) = \left(1 - \frac{1}{m}\right) P(E) + \frac{1}{m}\varepsilon_a(E).$$

Так как $D(P_m) = \{a\} \cup D(P)$ — неразложимое множество, то, согласно лемме 2, законы P_m — неразложимые.

§ 3. Случай неограниченного множества A

Не уменьшая общности, можно считать, что $P(\{0\}) > 0$. Это следует из того, что всякий закон P, для которого $0 \in S(P)$, является пределом при $k \to \infty$ последовательности законов $P_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) P + \frac{1}{k}\varepsilon_0$, а $P_k(\{0\}) > 0$.

Далее будем пользоваться методом, примененным в нашей работе [1]. Выберем последовательность $\{x_j\}_{j=0}^{\infty} \subset A$ такую, что $x_0 = 0$, $|x_j| > 2|x_{j-1}|$, и обозначим через E_m множества

$$E_m = \{x : |x| < |x_m|\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Положим

$$b_m = 1 - P(E_m), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$c_{km} = \frac{b_m}{(2+k)!}, \quad k = m+1, m+2, \ldots,$$

$$\delta_{km} = \frac{c_{k+1, m}}{3+k}, \quad k = m, m+1, \ldots$$

Обозначим через S_k множества

$$S_k = \{x : |x_k| < |x| \leqslant |x_{k+1}|\},$$

а через Q_k — произвольные законы, для которых $S(Q_k) = \bar{S} \cap A$. Положим

$$F_k = Q_k - Q_k(\{x_k\})\, \varepsilon_{x_k} - Q_k(\{x_{k+1}\})\, \varepsilon_{x_{k+1}},$$

$$g_m = \sum_{k=m}^{\infty} \left\{\frac{1}{2}\, \delta_{km} F_k + c_{km} \varepsilon_{x_k}\right\},$$

где постоянная c_{mm} выбирается таким образом, чтобы $g_m(R^n) = b_m$. Последовательность законов $\{P_m\}$ зададим так:

$$P_m(E) = P(E \cap E_m) + g_m(E).$$

Для законов P_m имеем:

1) $S(P_m) = A$;

2) $P_m(\{x_k\}) = c_{km}, \quad (k \geqslant m)$;

3) $P_m(S_k \setminus \{x_{k+1}\}) \leqslant \delta_{km}, \quad (k \geqslant m)$;

4) $P_m(\{0\}) > 0$.

Аналогично тому, как это делалось в работе [1], доказывается, что законы P_m — неразложимые. Для любого борелевского множества $E \subset R^n$ имеем

$$|P(E) - P_m(E)| = |P(E) - P(E \cap E_m) - g_m(E)| \leqslant$$
$$\leqslant P(R^n) - P(E_m) \to 0, \quad (m \to \infty),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Легко видеть, что последовательности неразложимых законов $\{P_m\}$, которые мы построили в §§ 2, 3 при доказательстве теоремы 1, равномерно сходятся к закону P на классе борелевских множеств в R^n.

§ 4. Некоторые замечания для случая, когда A ограничено и не более чем счетно

Случай, когда A ограничено и не более чем счетно, нам не удалось исследовать до конца. Если рассматривать неразложимые законы со спектром, лежащим в A, но не обязательно совпадающим с A, то в предположении, что A бесконечно, можно показать что они образуют плотное множество в классе всех законов, спектр которых равен A.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутое бесконечное множество, P — закон, для которого $S(P) = A$. Существует последовательность $\{P_m\}$ неразложимых законов, $S(P_m) \subset A$, которая слабо сходится к P.*

При доказательстве используем следующую очевидную лемму.

Лемма 3. *Если множество A ограничено и имеет лишь одну предельную точку, то оно неразложимо.*

Докажем теорему 2. В силу теоремы 1 можно рассматривать лишь случай, когда A ограничено и счетно.

Пусть a_0 — изолированная предельная точка множества A (очевидно, такие предельные точки существуют). Покроем множество всех остальных предельных точек $\{a_k\}$, $k \geqslant 1$, счетной системой открытых шаров $U_{km} = \{x : |x - a_k| < \delta_{km}\}$, так чтобы $\sum_k \delta_{km} < 1/m$. Из этого покрытия выделим конечное

$$\{U_{k_j m}\}, \ \sum_{j=1}^{p} \delta_{k_j m} < 1/m.$$

Положим

$$V_1 = U_{k_1 m}, \ V_j = U_{k_j m} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} U_{k_i m}, \ (2 \leqslant j \leqslant p);$$

очевидно, $V_i \cap V_k = \varnothing \ (i \neq k)$. Последовательность неразложимых законов $\{P_m\}$ зададим следующим образом:

$$P_m(E) = P(E \setminus \bigcup_{j=1}^{p} V_j) + \sum_{j=1}^{p} P(V_j)\, \varepsilon_{x_j}(E),$$

где x_j — произвольная точка из $V_j \cap A$. Очевидно, P_m — законы и

$$S(P_m) = [A \setminus \bigcup_{j=1}^{p} V_j] \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}.$$

Множество $S(P_m)$ — неразложимое, потому что (для достаточно больших m) имеет лишь одну предельную точку a_0, откуда и следует неразложимость законов P_m. Нетрудно убедиться, что последовательность законов $\{P_m\}$ слабо сходится к закону P.

В случае конечного множества A имеет место такое утверждение.

Теорема 3. *Пусть A — любое конечное множество, P — закон равномерного распределения на A. Существует последовательность неразложимых законов $\{P_m\}$ таких, что*

$$S(P_m) = A, \ \lim_{m \to \infty} P_m(E) = P(E).$$

Для доказательства используем следующую лемму [1].

Лемма. *Пусть имеем разложимый закон P с ограниченным спектром A. Пусть k и l — точки спектра, общие с опорными к нему гиперплоскостями, ортогональными диаметру множества A. Тогда существуют точки d и $f \in A$ (возможно $d = f$) такие, что $d \neq k$, l; $f \neq k$, l, а*

$$P(\{d\})\, P(\{f\}) \geqslant P(\{k\})\, P(\{l\}).$$

Пусть теперь $A = \{x_j\}_{j=1}^{q}$, причем x_1, x_q — точки, общие для выпуклой оболочки множества A и опорных к ней гиперплоскостей, ортогональных диаметру. Последовательность законов $\{P_m\}$ зададим формулой

$$P_m = \frac{m}{mq+2}\left\{\sum_{j=2}^{q-1} \varepsilon_{x_j} + \left(1+\frac{1}{m}\right)(\varepsilon_{x_1}+\varepsilon_{x_q})\right\}.$$

Согласно лемме законы P_m — неразложимы.

Выражаю признательность И. В. Островскому за постановку вопроса и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Кудина. Неразложимые законы с наперед заданным спектром. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 16. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.

2. K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao, S. R. S. Varadhan. Indecomposable distributions on topological groups. Trans. Amer. Math. Soc., **102**, 1962, 200—217.

3. A. Wintner. On the addition of independent distributions. Amer. J. of Math., **56**, 1934, 8—16.

Поступила 4 апреля 1972 г.