УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА

Ф. С. Рофе-Бекетов, А. М. Холькин

Введение

В работе приводятся достаточные условия существенной самосопряженности в $L_2(E_n)$ оператора, порожденного формально самосопряженным эллиптическим дифференциальным выражением

$$Lu = -\nabla(A(x)\nabla u) + i\{\nabla(b(x)u) + (\nabla u, b(x))\} + q(x)u. \quad (0.1)$$

Здесь $x \in E_n$, $b(x) \in E_n$ — вектор-функция, $b(x)$ и $q(x)$ — вещественны, $A(x) = A^*(x) > 0$ — эрмитова позитивная при $\forall x \in E_n$ матрица-функция порядка n*.

Предварительно рассматривается более общая задача — о совпадении минимального M_m и максимального $M_м$ операторов, порожденных в $L_2(E_n)$ несамосопряженным эллиптическим дифференциальным выражением

$$Mu = -\nabla(B(x)\nabla u) + (\nabla u, \bar{c}(x)) + p(x)u. \quad (0.2)$$

Здесь $\det B(x) \neq 0$, матрица $B(x)$ не предполагается эрмитовой, $p(x)$ и $c(x)$ не предполагаются вещественными, $c(x) = \{c_j(x)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\bar{c}(x) = \{\bar{c}_j(x)\}_{j=\overline{1,n}}$, $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в n-мерном унитарном пространстве: $(b, c) = \sum_{j=1}^{n} b_j\bar{c}_j$; $\langle u, v\rangle = \int u(x)\bar{v}(x)\,d\tau$ — скалярное произведение в $L_2(E_n)$. (Интегралы без указания области берутся по всему E_n, $d\tau$ — элемент объема в E_n).

Всюду ниже считаем выполненным **«условие А»**: локальные свойства коэффициентов** выражений (0.1), (0.2) и формально сопряженного к (0.2) выражения

$$M^+u = -\nabla(B^*(x)\nabla u) - \nabla(u\bar{c}(x)) + \bar{p}(x)u \quad (0.3)$$

* Матрицу $A(x)$ можно было бы заменить с сохранением позитивности на $\|\operatorname{Re} a_{jk}(x)\|$, соответственно изменяя коэффициенты $b_j(x)$ при первых производных. Иногда, однако, может оказаться удобным не предполагать $a_{jk}(x)$ вещественными (например, если при этом окажется $b(x) = 0$).

** Непрерывность $p(x)$, $q(x)$ и принадлежность к C^1 остальных коэффициентов предполагаются всегда.

достаточно правильны для того, чтобы максимальные операторы, отвечающие этим выражениям, являлись бы замыканием своих сужений на $C^2 \cap D$, где D — область определения соответствующего максимального оператора (значит, и замыканием с $C^\infty \cap D$).

Вопрос об условиях самосопряженности эллиптических операторов второго порядка, в том числе оператора Шредингера, рассматривался в ряде работ [1—10].

Признак J-самосопряженности оператора Шредингера с комплексным потенциалом содержится в [2, стр. 126]. Теорема об условиях совпадения минимального и максимального эллиптических операторов общего вида (высших порядков) в случае ограниченности их коэффициентов получена в [11]. Для эллиптических выражений специального вида условия равенства минимального и максимального операторов содержится в [12].

Следующая лемма касается вопроса об аппроксимации функций и, возможно, представляет некоторый самостоятельный интерес. Пусть

$$\omega(x) = \begin{cases} C \exp\left\{\dfrac{x^2}{x^2-1}\right\}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

причем $\int \omega(x)\, d\tau = 1$. Для $f(x) \in L_{1,\,\mathrm{loc}}$ положим

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} \int \omega\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right) f(\xi)\, d\tau_\xi \in C^\infty. \tag{0.4}$$

Обозначим через F и G взаимно-обратные функции:

$$F(t) = te^{-\frac{1}{t}},\quad G(F(t)) \equiv t,\quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{0.5}$$

Лемма 0.1. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ — непрерывная в E_n функция. Тогда для любой конечной области $\Omega \subset E_n$ при $\forall \delta > 0$ функция*

$$\hat{f}_{\delta,\,\Omega}(x) = F(\{G(f_\delta(x)) - h_f(\delta, \Omega)\}_+), \tag{0.6}$$

где

$$h_f(\delta, \Omega) = \sup_{x \in \Omega} \{G(f_\delta(x)) - G(f(x))\}_+, \tag{0.7}$$

обладает следующими свойствами:

$$1)\quad 0 \leqslant \hat{f}_{\delta,\,\Omega}(x) \in C^\infty,\quad x \in E_n; \tag{0.8}$$

$$2)\quad 0 \leqslant \hat{f}_{\delta,\,\Omega}(x) \leqslant f(x),\quad x \in \Omega; \tag{0.9}$$

$$3)\quad \lim_{\delta \to 0} \hat{f}_{\delta,\,\Omega}(x) = f(x) \tag{0.10}$$

(локально равномерно в E_n);

$$4)\quad \nabla \hat{f}_{\delta,\,\Omega}(x) = \alpha_f(x;\, \delta;\, \Omega)\, \nabla f_\delta(x),\quad x \in E_n, \tag{0.11}$$

где

$$0 \leqslant \alpha_f(x;\, \delta,\, \Omega) \leqslant 1, \tag{0.12}$$

$$\alpha_f(x;\,\delta,\,\Omega)=\begin{cases}F'(\{G(f_\delta(x))-h_f(\delta,\,\Omega)\}_+)\,G'(f_\delta(x)), & (f_\delta(x)>0),\\ 0, & (f_\delta(x)=0),\end{cases}\qquad(0.13)$$

причем

$$\lim_{\delta\to 0}\alpha_f(x;\,\delta,\,\Omega)=1,\ \textit{если}\ f(x)>0.\qquad(0.14)$$

В частности, если $f(x)\in C^1$, *то*

$$\lim_{\delta\to 0}\nabla\hat f_{\delta,\,\Omega}(x)=\nabla f(x),\quad x\in E_n.\qquad(0.15)$$

(Если $f(x)$ кусочно-гладкая, то (0.15) выполняется почти всюду).

5) *Если* $\hat f_{\delta,\,\Omega}(x_0)=0$, $x_0\in E_n$, *то и все производные* $D^p\hat f_{\delta,\,\Omega}(x_0)=0$, $|p|=1,\ 2,\ \ldots$ (p — мультииндекс).

Доказательство леммы осуществляется непосредственной проверкой всех ее утверждений.

1. Условия совпадения минимального эллиптического оператора с максимальным

Теорема 1. *Пусть для эллиптического выражения M (0.2) и формально сопряженного к нему M^+ (0.3) при некоторых $\varepsilon>0$, $K\geqslant 0$, и при некоторых функциях $\beta(x)$, $\gamma(x)$ выполняются для любых финитных функций $u(x)\in C_0^\infty$ неравенства*:*

$$|\langle e^{i\beta(x)}Mu,\,u\rangle|\geqslant\langle L_{\varepsilon K}u,\,u\rangle,\qquad(1.1)$$

$$|\langle e^{i\gamma(x)}M^+u,\,u\rangle|\geqslant\langle L_{\varepsilon K}u,\,u\rangle,\qquad(1.2)$$

где $\beta(x)$, $\gamma(x)$ могут различаться для разных $u(x)$,

$$L_{\varepsilon K}u=-\varepsilon\nabla(A(x)\nabla u)+i\{\nabla(b(x)u)+(\nabla u,\,b(x))\}-KQ(x)u,\qquad(1.3)$$

$$A(x)=\{B^*(x)B(x)+B(x)B^*(x)\}^{\frac{1}{2}}>0,\qquad(1.4)$$

$1\leqslant Q(x)\leqslant\infty$, *причем (см. (0.4)) почти всюду в* E_n

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\left|A^{\frac{1}{2}}(x)\nabla\left(Q^{-\frac{1}{2}}\right)_\delta(x)\right|\leqslant\mathrm{const},\qquad(1.5)$$

и для любой конечной области $\Omega\subset E_n$ существует $C(\Omega)>0$ такое, что

$$\left|Q^{-\frac{1}{2}}(x)-Q^{-\frac{1}{2}}(\xi)\right|\leqslant C(\Omega)\,|x-\xi|,\ (x,\,\xi\in\Omega).\qquad(1.6)$$

Вектор $b(x)$ имеет вещественные компоненты, и при $x\in E_n$

$$\left|A^{-\frac{1}{2}}(x)\,b(x)\right|+\left|A^{-\frac{1}{2}}c(x)\right|+\left|A^{-\frac{1}{2}}\bar c(x)\right|\leqslant KQ^{\frac{1}{2}}(x),\qquad(1.7)$$

$$|\mathrm{Im}\,\beta(x)|+|\mathrm{Im}\,\gamma(x)|\leqslant K,\ \left|A^{\frac{1}{2}}\nabla\bar\beta\right|+\left|A^{\frac{1}{2}}\nabla\bar\gamma\right|\leqslant KQ^{\frac{1}{2}}(x),\qquad(1.8)$$

---

* Достаточно, чтобы (1.1), (1.2) выполнялись лишь для функций $\in C_0^\infty$ с носителями вне произвольно фиксированной сферы $|x|=N$ (N — финитные функции).

Кроме того, пусть существует функция $P(x)$, $0 \leqslant P(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$, *и последовательность областей* Ω_m *с кусочно-гладкими границами* S_m *такие, что*

$$P(x)|_{S_m} = N_m \to \infty; \ P(x) \leqslant N_m, \ x \in \Omega_m. \tag{1.9}$$

Почти всюду

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla P_\delta(x) \right| \leqslant c_m Q^{-\frac{1}{2}}(x), \ c_m = o(N_m), \ x \in \Omega_m, \tag{1.10}$$

и при некоторых $C'_m > 0$

$$|P(x) - P(\xi)| \leqslant C'_m |x - \xi|; \quad x, \xi \in \Omega_m. \tag{1.11}$$

Тогда минимальный M_m *и максимальный* $M_M = (M_m^+)^*$ *операторы, отвечающие выражению (0.2) совпадают:* $M_m = M_M$. (Равенства $Q(x) = \infty$, $Q^{-1}(x) = 0$, $\nabla P(x) = 0$ на множестве положительной меры не исключаются. Полагаем всюду $0 \cdot \infty = 0$).

Замечания. 1). Если (1.8) заменить условием

$$|\operatorname{Im} \beta(x)| < K, \ \left| A^{\frac{1}{2}} \nabla \beta \right| \leqslant K Q^{-\frac{1}{2}}(x), \tag{1.12}$$

то достаточно потребовать в теореме выполнение лишь неравенства (1.1) без (1.2). В частности, если $\beta(x) \equiv 0$, это видно сразу из того, что на финитных функциях

$$\langle Mu, u \rangle = \overline{\langle M^+ u, u \rangle}.$$

2). Условия (1.5), (1.6) в случае кусочно-гладкой $Q^{-\frac{1}{2}}(x)$ можно заменить одним условием

$$\left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla Q^{-\frac{1}{2}}(x) \right| \leqslant \text{const (почти всюду)}. \tag{1.5'}$$

Аналогично условия (1.10), (1.11) в случае кусочно-гладкой $P(x)$ можно заменить одним:

$$\left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla P(x) \right| \leqslant c_m Q^{-\frac{1}{2}}(x), \ x \in \Omega_m, \ c_m = o(N_m). \tag{1.10'}$$

Лемма 1.1. *При условиях теоремы 1 для любых функций* $u(x)$, $v(x)$ *таких, что*

$$u, v \in C^\infty \cap L_2(E_n), \ Mu, \ M^+ v \in L_2(E_n), \tag{1.13}$$

будет

$$\int Q^{-1}(x) \left\{ \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla u \right|^2 + \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla v \right|^2 \right\} d\tau < \infty. \tag{1.14}$$

Доказательство леммы. Возьмем $u(x)$ вида (1.13) и положим

$$I^2_{m,\delta}[u] = \int \left| \varphi_{m,\delta}(x) A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla u \right|^2 d\tau, \tag{1.15}$$

где $\varphi_{m,\delta} \in C_0^\infty$, $\varphi_{m,\delta}(x) = 0$ при $x \overline{\in} \Omega_m$, и (см. (0.6))

$$\varphi_{m,\delta}(x) = (\widehat{\psi_m})_{\delta,\Omega_m}(x) \left(\widehat{Q^{-\frac{1}{2}}}\right)_{\delta,\Omega_m}(x), \; x \in \Omega_m, \tag{1.16}$$

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 - P(x) N_m^{-1}, & x \in \Omega_m, \\ 0 & , x \overline{\in} \Omega_m. \end{cases} \tag{1.17}$$

В силу леммы 0.1 и условий (1.9), (1,5), (1.6), (1.10), (1.11) имеем:

$$0 \leqslant \varphi_{m,\delta}(x) \leqslant Q^{-\frac{1}{2}}(x) \leqslant 1, \tag{1.18}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{\delta\to 0} \varphi_{m,\delta}(x) = Q^{-\frac{1}{2}}(x), \tag{1.19}$$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla \varphi_{m,\delta}(x) \right| < C, \text{ (п. вс. в } E_n), \tag{1.20}$$

где C от m не зависит, и для каждой Ω_m найдутся такие $\delta_m > 0$, $C''_m > 0$, что

$$\sup_{0<\delta<\delta_m} \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla \varphi_{m,\delta}(x) \right| < C''_m. \tag{1.21}$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно установить, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\; \overline{\lim_{\delta\to 0}} \{ I^2_{m,\delta}[u] + I^2_{m,\delta}[v] \} < \infty. \tag{1.22}$$

Положим

$$u_{m,\delta}(x) = \varphi_{m,\delta}(x) u(x) \in C_0^\infty. \tag{1.23}$$

Поскольку $\varphi_{m,\delta} \nabla u = \nabla u_{m,\delta} - u \nabla \varphi_{m,\delta}$, то в силу (1.20) и (1.21)

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} I^2_{m,\delta}[u] \leqslant 2 \overline{\lim_{\delta\to 0}} \int \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla u_{m,\delta} \right|^2 d\tau + C, \tag{1.24}$$

так как

$$\left| A^{\frac{1}{2}} \nabla u_{m,\delta} \right|^2 = \nabla (\bar{u}_{m,\delta} A \nabla u_{m,\delta}) - \bar{u}_{m,\delta} \nabla (A \nabla u_{m,\delta}),$$

где интеграл от первого слагаемого равен нулю, то

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} I^2_{m,\delta}[u] \leqslant -2 \overline{\lim_{\delta\to 0}} \langle \nabla (A \nabla u_{m,\delta}), u_{m,\delta} \rangle + C =$$

$$= \frac{2}{\varepsilon} \overline{\lim_{\delta\to 0}} \Big\{ \langle L_{\varepsilon K} u_{m,\delta}, u_{m,\delta} \rangle + \int (K Q \varphi^2_{m,\delta} |u|^2 -$$

$$-i\{\nabla(bu_{m,\delta})+(\nabla u_{m,\delta},b)]\bar{u}_{m,\delta})\,d\tau\Big\}+C\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\varlimsup_{\delta\to0}|\langle e^{i\beta}Mu_{m,\delta},u_{m,\delta}\rangle|+C_1\varlimsup_{\delta\to0}I_{m,\delta}[u]+C,\qquad(1.25)$$

поскольку $0\leqslant Q\varphi^2_{m,\delta}\leqslant 1$ и так как, в силу (1,18), (1.7),

$$\Big|\int[\nabla(bu_{m,\delta})+(\nabla u_{m,\delta},b)]\,\bar{u}_{m,\delta}\,d\tau\,|=$$
$$=2\Big|\int\operatorname{Im}[(\nabla u_{m,\delta},b)\,\bar{u}_{m,\delta}]\,d\tau\Big|=2\int\varphi^2_{m,\delta}|(\nabla u,b)\bar{u}|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant2\int\varphi_{m,\delta}\Big|\Big(A^{\frac{1}{2}}\nabla u,Q^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}b\Big)\bar{u}\Big|\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant C_1I_{m,\delta}[u].\qquad(1.26)$$

Вернемся к оценке (1.25). Заметим, что

$$e^{i\beta(x)}\bar{u}_{m,\delta}Mu_{m,\delta}=e^{i\beta(x)}\{\varphi^2_{m,\delta}\bar{u}Mu+$$
$$+|u|^2(B\nabla\varphi_{m,\delta},\nabla\varphi_{m,\delta})+\varphi_{m,\delta}u\,(B\nabla\varphi_{m,\delta},\nabla u)-$$
$$-\varphi_{m,\delta}\bar{u}\,(B\nabla u,\nabla\varphi_{m,\delta})+i\varphi_{m,\delta}|u|^2(B\nabla\varphi_{m,\delta},\nabla\beta)\}-$$
$$-\nabla(e^{i\beta}\varphi_{m,\delta}|u|^2B\nabla\varphi_{m,\delta}),\qquad(1.27)$$

причем интеграл от последнего слагаемого равен нулю.

Оценим остальные слагаемые. Положим

$$A_l(x)=(BB^*)^{\frac{1}{2}}<A(x),\;\;A_r(x)=(B^*B)^{\frac{1}{2}}<A(x)\qquad(1.28)$$

(неравенства справедливы в силу монотонности корня из матрицы, см. [13, стр. 370]). Из полярного представления матрицы $B(x)$ следует *, что для любых векторов a, c

$$|(Ba,c)|\leqslant\Big|A_r^{\frac{1}{2}}a\Big|\cdot\Big|A_l^{\frac{1}{2}}c\Big|\leqslant\Big|A^{\frac{1}{2}}a\Big|\cdot\Big|A^{\frac{1}{2}}c\Big|.\qquad(1.29)$$

Учитывая это, имеем в силу (1.20) (1.18), (1.8), почти всюду

$$\varlimsup_{\delta\to0}|(B\nabla\varphi_{m,\delta},\nabla\varphi_{m,\delta})|\leqslant\varlimsup_{\delta\to0}\Big|A^{\frac{1}{2}}\nabla\varphi_{m,\delta}\Big|^2\leqslant C,\qquad(1.30)$$

$$\varlimsup_{\delta\to0}|\varphi_{m,\delta}(B\nabla\varphi_{m,\delta},\nabla u)|\leqslant CQ^{-\frac{1}{2}}(x)\Big|A^{\frac{1}{2}}\nabla u\Big|,\qquad(1.31)$$

$$\varlimsup_{\delta\to0}|\varphi_{m,\delta}(B\nabla\varphi_{m,\delta},\nabla\beta)|\leqslant CQ^{-\frac{1}{2}}(x)\Big|A^{\frac{1}{2}}\nabla\beta\Big|\leqslant C'.\qquad(1.32)$$

Эти оценки входящих в (1.27) слагаемых вместе с (1.8) и (1.25) дают в силу (1.21)

$$\varlimsup_{\delta\to0}I^2_{m,\delta}[u]\leqslant C_1\varlimsup_{\delta\to0}I_{m,\delta}[u]+C,\qquad(1.33)$$

---

* Так как $\Big|A_l^{-\frac{1}{2}}Ba\Big|^2=(B^*A_l^{-1}Ba,a)=(A_ra,a)$.

где C и C_1 от m не зависят. Неравенство вида (1.33) для $I_{m,\delta}\{v\}$ (v см. (1.13)) устанавливается совершенно аналогично. Из этих двух неравенств следует (1.22).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Нужно установить, что для функций u, v вида (1.13)

$$\langle Mu, v\rangle = \langle u, M^{+}v\rangle. \tag{1.34}$$

В силу абсолютной сходимости интегралов, для этого достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\lim_{\delta\to 0}}\, I_{m,\delta} = 0, \tag{1.35}$$

где

$$I_{m,\delta} = \left| \int (\widehat{\psi_m})_{\delta, \varrho_m}(x) \{\bar{v}Mu - u\overline{M^{+}v}\}\, d\tau \right|, \tag{1.36}$$

$(\widehat{\psi_m})_{\delta, \varrho_m}(x)$ определено (1.17) и (0.6). Имеем

$$I_{m,\delta} = \Big| \int \Big\{ (B\nabla u, \nabla (\widehat{\psi_m})_{\delta, \varrho_m})\, \bar{v} - u\,(B\nabla (\widehat{\psi_m})_{\delta, \varrho_m}, \nabla v) -$$
$$- u\bar{v}\,(c, \nabla (\widehat{\psi_m})_{\delta, \varrho_m}) \Big\}\, d\tau \Big|,$$

откуда в силу (1.29), (1.10), (1.11) находим

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\, I_{m,\delta} \leqslant \frac{c_m}{N_m} \int\limits_{\varrho_m} Q^{-\frac{1}{2}}(x) \left\{ \left| vA^{\frac{1}{2}} \nabla u \right| + \left| uA^{\frac{1}{2}} \nabla v \right| + |uv| \right\} d\tau.$$

В силу леммы 1.1 интеграл в правой части сходится во всем E_n, и так как $c_m = o(N_m)$, то (1.35) и теорема доказаны. Из этой теоремы можно вывести ряд достаточных условий равенства $M_m = M_M$, формулируемых более просто. Для большей краткости мы продемонстрируем это ниже на примере самосопряженного выражения (0.1).

2. Условия самосопряженности оператора L (0.1)

Следующая теорема есть прямое следствие теоремы 1.

Теорема 2. *Замкнутый оператор, порожденный в $L_2(E_n)$ эллиптическим выражением L (0.1) самосопряжен без краевых условий на бесконечности, если при некоторых $\varepsilon > 0$, $K \geqslant 0$, $N > 0$ для N-финитных функций $u(x) \in C_0^\infty$*

$$\langle Lu, u\rangle \geqslant \langle L_{\varepsilon K}u, u\rangle, \tag{2.1}$$

где $L_{\varepsilon K}$ определен (1.3), $A(x)$ в (0.1) и (1.3) — одно и то же, вектор-функции $b(x)$ в (0.1) и (1.3) могут различаться, но удовлетворяют каждая (1.7), $P(x)$ и $Q(x)$ — такие же, как и в теореме 1, т. е. удовлетворяют (1.5), (1.6), (1.9), (1.10), (1.11).

Теорема 3. *Пусть $A(x)$, $b(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ подчинены тем же условиям, что и в теореме 2. Тогда оператор L (0.1) сущест-*

венно самосопряжен, если $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$, *где* $q_1(x)$, $q_2(x)$ — *непрерывны,*

$$q_1(x) \geqslant -K_1 Q(x), \quad K_1 > 0, \tag{2.2}$$

и при некотором $C > 0$

$$R(x) \left| A^{-\frac{1}{2}}(x) x^0 \right| < C, \quad (\forall x \in E_n). \tag{2.3}$$

Здесь x^0 — *орт вектора* x,

$$R(x) = \int\limits_{|x|}^{\infty} Q^{-\frac{1}{2}}(rx^0) \, | q_2(rx^0) | \, dr. \tag{2.4}$$

Доказательство. Оценим при $u(x) \in C_0^\infty$ величину

$$I = \left| \int q_2(x) \, | u(x) |^2 \, d\tau \right|,$$

полагая $\operatorname{supp} u(x) \subset \Omega_u = \{x : 1 \leqslant |x| \leqslant N_u\}$. Обозначим $Q_u^{-1/2}(x) = \widehat{= (Q^{-1/2})_{\delta, \Omega_u}}(x) + \eta(\delta)$, где $\eta(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ выбрано так, что

$$Q_u(x) \leqslant Q(x), \quad (x \in \Omega_u); \quad Q_u(x) \in C^\infty. \tag{2.5}$$

Возьмем $\delta_u > 0$ такое, что при $0 < \delta < \delta_u$, $|x| < N_u$ будет

$$R_u(x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{|x|}^{N_u} Q_u^{-\frac{1}{2}}(rx^0) \, | q_2(rx^0) | \, dr \leqslant \inf_{z \in \Omega_u} \left\| A^{-\frac{1}{2}}(z) \right\|^{-1} + R(x) \leqslant \text{const}.$$

Пусть ω — единичная сфера. Имеем, учитывая (2.3),

$$I \leqslant \int\limits_{\omega} d\omega \int\limits_{1}^{N_u} R_u(x) \Big\{ |u|^2 \left| A^{\frac{1}{2}} \nabla Q_u^{\frac{1}{2}} \right| \cdot \left| A^{-\frac{1}{2}}(x) x^0 \right| +$$

$$+ 2 Q_u^{\frac{1}{2}} |u| \cdot \left| A^{\frac{1}{2}} \nabla u \right| \cdot \left| A^{-\frac{1}{2}}(x) x^0 \right| + \frac{n-1}{r} Q_u^{\frac{1}{2}} |u|^2 \Big\} r^{n-1} \, dr \leqslant$$

$$\leqslant C \int \Big\{ Q_u |u|^2 \Big(\left| A^{\frac{1}{2}} \nabla Q_u^{-\frac{1}{2}} \right| + R_u(x) \Big) + 2 Q_u^{\frac{1}{2}} |u| \cdot \left| A^{\frac{1}{2}} \nabla u \right| \Big\} \, d\tau.$$

Отсюда при $\delta \to 0$ в силу (1.5), (1.6), (2.5) находим:

$$I \leqslant C_1 \left\| Q^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L_2}^2 + C_2 \left\| Q^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L_2} \cdot \left\| A^{\frac{1}{2}} \nabla u \right\|_{L_2}. \tag{2.6}$$

Взявши $L_{\varepsilon K}$ (1.3) с тем же $b(x)$, что и L (0.1), получаем

$$\langle Lu, u \rangle - \langle L_{\varepsilon K} u, u \rangle \geqslant (1 - \varepsilon) \left\| A^{\frac{1}{2}} \nabla u \right\|_{L_2}^2 + (K - C) \left\| u Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2}^2 -$$

$$- C_2 \left\| A^{\frac{1}{2}} \nabla u \right\| \cdot \left\| u Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2} \geqslant 0, \tag{2.7}$$

стоит лишь взять достаточно большое K при данном $\varepsilon \in (0,1)$.

следовательно, оператор L (0.1) самосопряжен по теореме 2. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть в выражении L (0.1) матрица $A(x)$ — вещественная, а векторное поле $A^{-1}(x)\,b(x)=\nabla\Phi(x)$, т. е. потенциально. Тогда оператор L унитарно эквивалентен оператору

$$L_1v=e^{-i\Phi(x)}L\left(e^{i\Phi(x)}v\right)=-\nabla(A\nabla v)+ \\ +\{q(x)-(A^{-1}(x)\,b(x),\ b(x))\}\,v \qquad (2.8)$$

и, следовательно, одновременно с ним самосопряжен или нет.

Следствие 1. *Пусть в выражении* L (0.1) $q(x)\geqslant -Q(r)$,

$$\left|A^{-\frac{1}{2}}(x)\,b(x)\right|\leqslant KQ^{\frac{1}{2}}(r),\ 1\leqslant Q(r)\leqslant\infty,\ r=|x|.$$

Обозначим $\max\limits_{|x^0|=1}\left|A^{\frac{1}{2}}(rx^0)\,x^0\right|=a(r)$, *и пусть*

$$a(r)\left|\frac{d}{dr}Q^{-\frac{1}{2}}(r)\right|\leqslant K, \qquad (2.9)$$

$$\int^{\infty}a^{-1}(r)\,Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr=\infty. \qquad (2.10)$$

Тогда оператор L (0.1) *существенно самосопряжен.*

Доказательство вытекает из теоремы 3, если положить

$$P(x)=\int_0^{|x|}a^{-1}(r)\,Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr.$$

Введем обобщенное расстояние $\rho(x,\ y)$ между точками $x,\ y\in E_n$:

$$\rho(x,\ y)=\inf_L\int_L M^{-\frac{1}{2}}(\xi)\,|d\xi|,\ M(x)=\|A(x)\|, \qquad (2.11)$$

где инфимум берется в классе кусочно-гладких кривых с концами в точках x и y. Для $\rho(x,\ y)$ справедливо неравенство треугольника.

Теорема 4. *Пусть дана последовательность слоев* $T_k=\Omega_{2k+1}\setminus\Omega_{2k}$, *где* $\Omega_k\subset E_n$ — *односвязные конечные области,* $\overline{\Omega}_k\subset\Omega_{k+1}$, $\bigcup\Omega_k=E_n$. *И пусть для коэффициентов* L (0.1) *выполнены условия* $(k=0,\ 1,\ \ldots)$:

$$q(x)\geqslant -C\gamma_k,\ \left|A^{-\frac{1}{2}}(x)\,b(x)\right|\leqslant C\gamma_k^{\frac{1}{2}},\ x\in T_k. \qquad (2.12)$$

где $\gamma_k\geqslant 1$, $C>0$ *и от* k *не зависит. Тогда, если*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\min\left\{h_k^2,\ h_k\gamma_k^{-\frac{1}{2}}\right\}=\infty, \qquad (2.13)$$

где h_k — *обобщенное расстояние между* Ω_{2k} *и* $E_n\setminus\Omega_{2k+1}$ (*т. е. минимальная обобщенная толщина слоя* T_k), *то оператор* L (0.1) *существенно самосопряжен в* $L_2(E_n)$ (*независимо от поведения коэффициентов между слоями при условии* A).

Замечание 2. Если $M_k = \sup_{x \in T_k} \| A(x) \|$, а δ_k — минимальная толщина слоя T_k в евклидовой метрике, то условие (2.13) будет выполнено наверняка, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \min \left\{ \delta_k^2 M_k^{-1},\ \delta_k M_k^{-\frac{1}{2}} \gamma_k^{-\frac{1}{2}} \right\} = \infty. \qquad (2.13')$$

Доказательство. Обозначим $\rho_k(x)$ — обобщенное расстояние от точки x до Ω_{2k} и положим

$$P_k(x) = \min \{1;\ 3h_k^{-1} (\rho_k(x) - 3^{-1} h_k)_+\}, \qquad (2.14)$$

$$Q_k^{-\frac{1}{2}}(x) = \min \{1;\ 3h_k^{-1} \rho_k(x);\ 3(1 - \rho_k(x) h_k^{-1})_+\}. \qquad (2.15)$$

После этого, полагая $a_k = \min \left\{ h_k^2,\ h_k \gamma_k^{-\frac{1}{2}} \right\}$, в силу условий (2.12), (2.13) можно непосредственно проверить, что функции

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x);\ Q^{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k^{-1} Q_k^{-\frac{1}{2}}(x) \qquad (2.16)$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 2. Например, неравенства (1.10), (1.11) следуют из того, что

$$| P_k(x) - P_k(\xi) | \leqslant 3h_k^{-1} \cdot |x - \xi| \cdot M^{-\frac{1}{2}} (x + \theta(\xi - x)),$$

где $0 < \theta < 1$, и поэтому

$$\overline{\lim_{\delta \to 0}} \left| A^{\frac{1}{2}}(x) \nabla (P_k)_\delta (x) \right| \leqslant \left\| A^{\frac{1}{2}}(x) \right\| \overline{\lim_{\delta \to 0}} | \nabla (P_k)_\delta (x) | \leqslant 3h_k^{-1} Q_k^{-\frac{1}{2}}(x),$$

а суммы (2.16) при каждом x — конечные. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям. К., 1965.
2. И. М. Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа. М., 1963.
3. А. Я. Повзнер. О разложении по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$. «Матем. сб.», 32, № 1, 1953, 109—156.
4. Э. Ч. Титчмарш. Разложения по собственным функциям, т. II, М., 1961.
5. Б. М. Левитан. Об одной теореме Титчмарша и Сиерса, «Усп. матем. наук», 16, № 4, 1961, 175—178.
6. T. Ikebe. T. Kato. Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, Arch. Rat. Mech. and Analysis, **9**, 1962, 77—92.
7. B. Hellwig. Ein Kriterium für die Selbstadjungiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren im Gebiet G, Math. Zeitschr., **89**, № 4, 1965, 333—344.
8. Ф. С. Рофе-Бекетов. О неполуограниченных дифференциальных операторах. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 2. (1966), 178 — 184.

9. J. Walter. Symmetrie elliptischer Differentialoperatoren, Math. Zeitschr., **106**, № 2 (1968), 149—152.

10. Ф. С. Рофе-Бекетов. Условия самосопряженности оператора Шредингера. Матем. заметки, т. 8, № 6, 1970, 741—751.

11. P. Hess. Über die wesentliche Maximalität gleichmaßig stark elliptischer Operatoren in $L^2(R^n)$, Math. Zeitschr., **107**, № 1 (1968), 67—70.

12. М. Г. Гимадисламов. Достаточные условия совпадения минимального и максимального операторов в частных производных и дискретности их спектра. Матем. заметки, 4, № 3, 1968, 301—313.

13. И. М. Глазман, Ю. И. Любич. Конечномерный линейный анализ. М., Физматгиз, 1969.

Поступила 9 марта 1971 г.