О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Н. Болковой, Я. И. Житомирский

1. В 1952 г. Л. И. Камынин установил [1], что единственность решения задачи Коши для разностного (по x) аналога уравнения теплопроводности имеет место в более узком классе функций, чем для самого уравнения теплопроводности. В работе [2] Л. И. Камынин распространил этот результат на системы линейных уравнений как с постоянными коэффициентами, так и с коэффициентами, зависящими от пространственного переменного. Кроме того, в работе [3] Б. Л. Гуревич нашел классы функций, в которых решение задачи Коши единственного для дифференциально-разностных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Эти и некоторые другие близкие результаты изложены в монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [4, добавления 1 и 2 к гл. II].

В данной статье рассматриваются эволюционные системы линейных разностных уравнений вида

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) \bar{u}(x + h_k, t) \equiv L\bar{u}(x, t), \tag{1}$$

где $\bar{u}(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_N(x, t)\}$, $x \in R^m$, $t \in [0, T]$, $h_k \in R^m$, $k = 1, \ldots, n$

$A_k(x)$ — матрицы $N \times N$, элементами которых являются комплексно-значные функции $a_{k_{ij}}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant N$, удовлетворяющие условию

$$|a_{k_{ij}}(x)| \leqslant a(|x|), \tag{2}$$

$$k = 1, \ldots, n; \ i, j = 1, \ldots, N, \ x \in R^m, \ |x|^2 = \sum |x_i|^2,$$

$a(r)$, $r > 0$ — непрерывная неубывающая функция. Обозначим $H = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |h_j|$.

Мы исследуем вопрос о единственности решения задачи Коши для системы (1), т. е. вопрос об условиях, при которых всякое решение $\bar{u}(x, t)$ системы (1), удовлетворяющее нулевым начальным данным

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \tag{1'}$$

тождественно равно нулю. Ответ на этот вопрос дается в виде условий, ограничивающих рост $\bar{u}(x, t)$ при $|x| \to \infty$, в дополнительном предположении медленного роста функции $a(r)$:

$$\int^{\infty} \frac{dr}{a(r)} = \infty. \tag{3}$$

Эти условия более тонко, чем в цитированных выше работах других авторов, улавливают связь между ростом коэффициентов и единственностью решения задачи Коши для системы (1).

2. **Теорема.** *Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию (2). Тогда всякое решение $\bar{u}(x, t)$ задачи (1) — (1'), удовлетворяющее оценке*

$$\|\bar{u}(x, t)\| \leqslant C_1 \exp\{|x| \, \alpha(|x|)\}, \ t \in [0, T], \tag{4}$$

где $\alpha(r) > 0$ — неубывающая функция, для которой выполнены условия

$$\int^{\infty} \frac{dr}{a(r) \exp\{H\alpha(r)\}} = \infty, \ \alpha(r) \leqslant A_1(1 + r), \ A_1 > 0, \tag{5}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $\bar{u}(x, t)$ — непрерывное решение задачи (1) — (1'), удовлетворяющее условию (4). Фиксируем произвольно $x = x_0$ и рассмотрим вектор-функцию аргумента t: $\bar{f}(t) = \bar{u}(x_0, t)$. Из (1) ясно, что $\bar{f}(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем

$$\bar{f}^{(k)}(t) = L^k \bar{u}(x_0, t), \ k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Кроме того, из (6) и (1′) имеем

$$\bar{f}^{(k)}(0)=0,\quad k=0,1,\ \ldots \tag{7}$$

Оценим $\|\bar{f}^{(k)}(t)\|$, $t\in[0,T]$. Из определения оператора L в (1) ясно, что его степени имеют следующий вид:

$$L^k\bar{u}(x_0,t)=\sum_{j_1=1}^{n}\ldots\sum_{j_k=1}^{n}A_{j_1}(x_0)\ldots A_{j_k}\left(x_0+\sum_{l=1}^{k-1}h_{j_l}\right)\bar{u}\left(x_0+\sum_{l=1}^{k}h_{j_l},t\right). \tag{8}$$

Из условия (2) вытекает оценка

$$\|A_j(x)\|\leqslant Ca(|x|),\quad j=1,\ \ldots,\ n, \tag{9}$$

где под нормой матриц $A_j(x)$ понимается операторная норма в эвклидовом пространстве. Подставив (9) и (4) в (8), получим

$$\|\bar{f}^{(k)}(t)\|\leqslant C_1\sum_{j_1=1}^{n}\ldots\sum_{j_k=1}^{n}C^k a(|x_0|)\ \ldots\ a\left(\left|x_0+\sum_{l=1}^{k-1}h_{j_l}\right|\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\left|x_0+\sum_{l=1}^{k}h_{j_l}\right|\alpha\left(\left|x_0+\sum_{l=1}^{k}h_{j_l}\right|\right)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_1C^kn^ka^k(|x_0|+kH)\exp\{(|x_0|+kH)\,\alpha(|x_0|+kH)\}. \tag{10}$$

Но из условий (5) вытекает расходимость при любом x_0 ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a(|x_0|+kH)\exp\left\{\frac{|x_0|+kH}{k}\alpha(|x_0|+kH)\right\}\right]^{-1}.$$

Отсюда, используя оценки (10), условия (7) и известный критерий квазианалитичности, получаем $\bar{f}(t)\equiv 0$. Но тогда и $\bar{u}(x,t)\equiv\equiv 0$, что и требовалось *доказать*.

Замечание. Доказанная теорема, очевидно, применима лишь в случае, когда $\int^{\infty}[a(x)]^{-1}dx=\infty$.

Ограничение $\alpha(x)\leqslant A_1(1+|x|)$, очевидно, не существенно сужает класс рассматриваемых функций $\alpha(x)$.

Рассмотрим теперь в качестве примера случай, когда коэффициенты системы (1) удовлетворяют оценке (2), где $a(|x|)=A_2(1+|x|^{1-\delta})$, $\delta\geqslant 0$. Тогда в качестве $\alpha(|x|)$ можно выбрать, например, функцию

$$\alpha(|x|)=\frac{\delta}{H}\ln(|x|+1)+\frac{1}{H}\ln\ln(|x|+1).$$

Тем самым доказанная теорема гарантирует единственность решения задачи Коши в классе функций, удовлетворяющих оценке

$$\|\bar{u}(x,t)\|\leqslant C_1\exp\left\{\frac{\delta}{H}(1+|x|)\ln(1+|x|)+\frac{1+|x|}{H}\ln\ln(1+|x|)\right\}.$$

Этот результат при $\delta>0$ полностью согласуется с теоремой Камынина [2]. В случае $\delta=0$ получаем более широкий класс единственности, чем установленный в монографии И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [4].

Если же при $r > 1$ функция $a(r)$ ведет себя как $r(\ln r)^{\delta}$, то в качестве $\alpha(r)$ можно выбрать функцию $\frac{1-\delta}{H} \ln\ln r$ и теорема гарантирует единственность в классе функций, удовлетворяющих при достаточно больших $|x|$ оценке

$$\|\bar{u}(x, t)\| \leqslant C_1 \exp\left\{\frac{1-\delta}{H} |x| \ln\ln |x|\right\},$$

что дает пример более тонкого класса единственности.

3. Точность полученного в доказанной теореме класса единственности, описываемого оценками (4) и (5), подтверждается рассмотрением уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{n} a_k u(x + kh, t), \tag{11}$$

где $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, $h > 0$, a_k — постоянные. Для этого уравнения (с постоянными коэффициентами) оценка (2) имеет место с константой в качестве функции $a(x)$ и доказанная теорема дает следующий результат: всякое решение $u(x, t)$ уравнения (11), удовлетворяющее условию $u(x, 0) = 0$ и оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{|x| \alpha(|x|)\}, \tag{12}$$

где $t \in [0, T]$, $\alpha(r) > 0, r > 0$ — возрастающая функция, для которой

$$\int^{\infty} \exp\{-nh\alpha(x)\}\, dx = \infty, \tag{13}$$

тождественно равно нулю.

Покажем, что если условие (13) нарушается, то уравнение (11) имеет решение $u(x, t) \not\equiv 0$, удовлетворяющее условию $u(x, 0) = 0$ и оценке (12). Более того, построим это решение и докажем, что оно удовлетворяет оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{\beta t + |x| \alpha(|x|)\}$$

при всех x, t, $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$ и некотором $\beta > 0$.

Для этого достаточно построить нетривиальное аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ решение $y(x, \lambda)$ уравнения

$$\lambda y(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k y(x + kh, \lambda),$$

удовлетворяющее оценке

$$|y(x, \lambda)| \leqslant \frac{C}{1 + |\lambda|^2} \exp\{|x| \alpha(|x|)\} \tag{14}$$

при $\operatorname{Re} > \beta > 0$, $-\infty < x < \infty$. Искомое решение $u(x, t)$ получится как преобразование Лапласа функции $y(x, \lambda)$.

Нужную нам функцию $y(x, \lambda)$ построим в виде

$$y(x, \lambda) = C(\lambda)\,[s(\lambda)]^{\frac{x}{h}}, \tag{15}$$

где $s(\lambda)$ — корень уравнения $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k s^k = \lambda$, являющийся, как и коэффициент $C(\lambda) \not\equiv 0$, аналитической при $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ функцией. Разложение $s(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид

$$s(\lambda) = a\lambda^{\frac{1}{n}}(1 + o(1)), \tag{16}$$

где $a \neq 0$, $o(1) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Для получения (14) оценим функцию

$$\sup_{x \geqslant 0} |s(\lambda)|^{\frac{x}{h}} \exp\left\{-\int_0^x \alpha(\xi)\,d\xi\right\} \equiv g(\lambda). \tag{17}$$

Из (16) получим

$$g(\lambda) \leqslant \sup_{x \geqslant 0} \exp\left\{\int_0^x \left[\frac{1}{nh}\ln|\lambda| + C - \alpha(\xi)\right] d\xi\right\}.$$

Полагая, по определению,

$$x(|\lambda|) = \hat{\alpha}\left(\frac{1}{nh}\ln|\lambda| + C\right).$$

где $\hat{\alpha}(\xi)$ — функция, обратная $\alpha(\xi)$, и

$$F(|\lambda|) = \int_0^{x(|\lambda|)} \left[\frac{1}{nh}\ln|\lambda| + C - \alpha(\xi)\right] d\xi,$$

получим, подобно тому, как это сделано в [5, стр. 86—87], что $\int^{\infty} r^{-2} F(r)\,dr < \infty$.

Поэтому (см. [6]) существует аналитическая при $\operatorname{Re}\lambda > \beta$ функция $C(\lambda) \not\equiv 0$ и удовлетворяющая оценке

$$|C(\lambda)| \leqslant \frac{1}{1 + |\lambda|^2} \exp\{-F(|\lambda|)\}. \tag{18}$$

Тогда из (15), (17) и (18) получим

$$|y(x, \lambda)| \leqslant |C(\lambda)|\,|s(\lambda)|^{\frac{x}{h}} \leqslant \frac{1}{1+|\lambda|^2}\exp\{-F(|\lambda|)\} \times$$

$$\times\, g(\lambda) \exp\int_0^x g(\xi)\,d\xi \leqslant \frac{1}{1+|\lambda|^2}\exp\{|x|\,\alpha(|x|)\},\ x > 0.$$

При $x < 0$ имеем

$$|y(x, \lambda)| \leqslant |C(\lambda)| \leqslant \frac{\exp\{-F(|\lambda|)\}}{1+|\lambda|^2}.$$

Тем самым установлена справедливость оценки (14), что и требовалось.

Можно показать, кроме того, и существенность налагаемого на коэффициенты системы (1) условия (3), которое мы называем условием «медленного роста» коэффициентов. Дело в том, что доказанная теорема обеспечивает единственность решения задачи Коши в классах функций, удовлетворяющих оценкам (4)—(5), которые при выполнении условия (3) являются более широкими (в смысле допустимого роста при $|x| \to \infty$ входящих в них функций), чем класс функций, описываемый оценкой

$$\|\bar{u}(x, t)\| \leqslant C_1 \exp\{A_1 |x|\}, \tag{19}$$

что соответствует случаю $\alpha(r) \equiv A_1 > 0$.

С другой стороны, эти классы заведомо не могут быть шире, чем класс функций, описываемых при достаточно больших значениях $|x|$ оценкой

$$\|\bar{u}(x, t)\| \leqslant C_1 \exp\{A_2 |x| \ln |x|\} \tag{20}$$

с некоторой зависящей от H постоянной $A_2 > 0$, что соответствует случаю $a(|x|) \equiv \mathrm{const}$.

Однако, если отказаться от условия (3), ситуация в корне меняется подобно изученному ранее [7] случаю, когда оператор L в (1) является дифференциальным: в зависимости от соотношений между скоростью роста при $|x| \to \infty$ элементов матриц $A_k(x)$ при различных k классы единственности решения задачи Коши (1)—(1′) могут оказаться как существенно шире класса (20), так и у́же класса (19). В частности, может случиться, что единственность не будет наблюдаться даже в классе функций, стремящихся к нулю при $|x| \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Камынин. Различие теорем единственности для уравнения теплопроводности и систем конечноразностных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 82, 1952, стр. 13—16.
2. Л. И. Камынин. О единственности решения задачи Коши в классе быстро растущих функций для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 103, 1955, стр. 545—548.
3. Б. Л. Гуревич. Новые типы пространств основных и обобщенных функций и задача Коши для систем дифференциально-разностных уравнений. ДАН СССР, 108, 1956, стр. 1001—1003.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Обобщенные функции, вып. 3.
5. В. М. Борок. Классы единственности решения задачи Коши для разностного аналога уравнений типа Соболева — Гальперна. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.

6. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. М., ИЛ, 1955.
7. Я. И. Житомирский. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с быстро растущими коэффициентами. Изв. АН СССР, т. 31, вып. 5, 1967.

Поступила 2 марта 1972 г.