ТРЕУГОЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ВЕЙЛЕВСКИХ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРНЫХ УЗЛОВ

В. К. Дубовой

В работах [1, 2] изучаются треугольные модели различных классов операторов. Настоящая статья посвящена описанию треугольных моделей вейлевского семейства узлов.

Пусть $\tau(p) = \begin{pmatrix} N(p)+A & K & J \\ H_{\widetilde{u},\,u} & & E_v \end{pmatrix}$ вейлевское семейство узлов [1]. Как показано в [7], х. о.-ф. $W_\tau(p)$ допускает в каноническом базисе пространства E мультипликативное представление в виде

$$W_\tau(p) = \prod_{k=1}^{\overset{\omega}{\rightarrow}} (I - iq_k(\sigma^{(1)}(p) + A_k)^{-1} q_k^* J) \times$$
$$\times \int_0^{\overset{a'}{\rightarrow}} \exp\left(-\frac{i}{l^2(p)} q(t)\,\sigma'(sp,\,t)\, q^*(t)\, J\right) dt \times$$
$$\times \int_{a'}^{\overset{a}{\frown}} \exp(-iq(t)\,(\sigma^{(m)}(p) + Z(t))^{-1} q^*(t)\, J)\, d\nu(t).$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\widetilde{H} = \widetilde{H}^{(1)} \oplus \widetilde{H}^{(2)}$, где $\widetilde{H}^{(1)}$ состоит из последовательности матриц-столбцов четвертого порядка:

$$f = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\omega\},$$

а элементами $\widetilde{H}^{(2)}$ являются определенные на сегменте $[0, a]$ вектор-функции $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & 0 \leqslant x < a', \\ f_2(x), & a' \leqslant x \leqslant a, \end{cases}$$

где $f_1(x)$ — матрица-столбец порядка $2m$, элементы которой принадлежат $L^2[0, a']$, а $f_2(x)$ — матрица-столбец порядка $4m$, элементы

[1] Для чтения статьи необходимо познакомиться с работами [3—7].

которой принадлежат $L^2_\nu[a', a]$. Определим скалярное произведение элементов $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_\omega; f(x)\}$ и $\tilde{h}(x) = \{h_1, h_2, \ldots, h_\omega, h(x)\}$ пространства $\tilde{H}$ формулой

$$(\tilde{f}, \tilde{h}) = \sum_{k=1}^{\omega} h_k^* f_k + \int_{[0, a]} h^*(t) f(t)\, d\nu(t).$$

При этом будем предполагать, что $d\nu(t) = dt$, если $t < a'$. Зададим в $\tilde{H}$ оператор $\tilde{A}\tilde{f} = \tilde{h}$, полагая

$$h_k = A_k f_k + i \sum_{s=k+1}^{\omega} q_k^* J q_s f_s + i \int_{[0, a]} q_k^* J q(t) f(t)\, d\nu(t),$$

$$h(x) = Z(x) f(x) + i \int_{(x, a]} q^*(x) J q(t) f(t)\, d\nu(t),$$

при этом будем считать $Z(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant a'$. Кроме того, определим оператор $\tilde{K}$, действующий из $\tilde{H}$ в E, положив в каноническом базисе пространства E

$$\tilde{K}\tilde{f} = \sum_{k=1}^{\omega} q_k f_k + \int_{[0, a]} q(t) f(t)\, d\nu(t).$$

Можно показать, что операторы $\tilde{A}$ и $\tilde{K}$ ограничены.

Так как

$$\frac{1}{i}(A_k - A_k^*) = q_k^* J q_k \quad (k = 1, 2, \ldots, \omega),$$

$$\frac{1}{i}(Z(x) - Z^*(x)) = \int_{[x]} q^*(t) J q(t)\, d\nu(t),$$

то, применяя обычные рассуждения (см. [1]), получим, что совокупность

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{K} & J \\ \tilde{H} & & E \end{pmatrix}$$

образует операторный узел.

Рассмотрим в $\tilde{H}$ представление $g \to U_g$ собственной группы Лоренца, определенное следующим образом. Если $\tilde{h} = U_g \tilde{f}$, то

$$h_k = \begin{pmatrix} c_g & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \end{pmatrix} f_k;$$

$$h_1(x) = U_g'(x) f_1(x),$$

$$U_g'(x) = \begin{cases} c_g \otimes I_m, & x \in [0, a') \setminus M, \\ c_g^{*-1} \otimes I_m, & x \in M; \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{pmatrix} c_g \otimes I_m & 0 \\ 0 & c_g^{*-1} \otimes I_m \end{pmatrix} f_2(x).$$

Отметим, что множество M, входящее в определение операторов $U'_g(x)$, вводится в (7) при определении мультипликативного представления х. о.-ф. $W_\tau(p)$.

Пусть $\tilde{U}_g = U_g^{*-1}$. Очевидно, представления $g \to \tilde{U}_g$ и $g \to U_g$ нормальны и их инвариантные подпространства совпадают.

Из вида матриц A_k, q_k, $Z(x)$, $q(x)$ непосредственно следует

$$\tilde{U}_g\tilde{A} = \tilde{A}U_g,$$

$$v_g\tilde{K} = \tilde{K}U_g,$$

$$\tilde{U}_g\tilde{K}^*J = \tilde{K}Jv_g.$$

Таким образом, совокупность $\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{K} \; J \\ \tilde{H}_{\tilde{U},\,U} & E_v \end{pmatrix}$ является инвариантным узлом.

Пусть $\frac{1}{2}\tilde{N}_1$, $-\frac{1}{2}\tilde{N}_2$, $\frac{1}{2}\tilde{N}_3$ инфинитезимальные операторы представления $g \to U_g$, отвечающие гиперболическим вращениям в плоскостях $(p_0, p_1, 0, 0)$, $(p_0, 0, p_2, 0)$, $(p_0, 0, 0, p_3)$ соответственно и $\tilde{N}(p) = -Ip_0 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \tilde{N}_\alpha p_\alpha$.

Нетрудно видеть, что совокупность $\tilde{\tau}(p) = \begin{pmatrix} \tilde{N}(p) + \tilde{A} & \tilde{K} \; J \\ \tilde{H}_{\tilde{U},\,U} & E_v \end{pmatrix}$ является вейлевским семейством узлов.

Определение. *Вейлевское семейство узлов $\tilde{\tau}(p)$ будем называть треугольной моделью вейлевского семейства узлов $\tau(p)$.*

Заметим, что семейство узлов $\tilde{\tau}(p)$ может не быть простым. В этом случае рассмотрим главное подпространство $\tilde{H}_{\tilde{\theta}}$ узла $\tilde{\theta}$ *. Оно, очевидно, инвариантно относительно операторов $\tilde{U}_g$ и U_g. Поэтому, можно рассмотреть вейлевские семейства узлов $\tilde{\tau}'(p) = \mathrm{pr}_{\tilde{H}_{\tilde{\theta}}}\tilde{\tau}(p)$ и $\tilde{\tau}''(p) = \mathrm{pr}_{\tilde{H}\ominus\tilde{H}_{\tilde{\theta}}}\tilde{\tau}(p)$. Семейство узлов $\tilde{\tau}'(p)$ будем называть ядром, а семейство узлов $\tilde{\tau}''(p)$ дополнительной компонентной треугольной модели $\tilde{\tau}(p)$.

Теорема. *Вейлевское семейство узлов $\tau(p)$ унитарно эквивалентно ядру треугольной модели $\tilde{\tau}(p)$.*

Доказательство. Можно показать, что $W_{\tilde{\tau}}(p) = W_\tau(p)$. С другой стороны $W_{\tilde{\tau}}(p) = W_{\tilde{\tau}'}(p)\,W_{\tilde{\tau}''}(p)$. Так как $W_{\tilde{\tau}''}(p) \equiv I$, то $W_{\tilde{\tau}'}(p) = W_\tau(p)$. Поэтому, доказываемое утверждение следует из теоремы об унитарной эквивалентности семейств узлов (см. [6]).

Автор выражает благодарность М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание к работе.

---

* Определение главного подпространства смотрите в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский, М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. УМН, 13, № 1 (79), 1958.
2. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», 1969.
3. В. К. Дубовой. Инвариантные операторные узлы. «Вестн. Харьковск. ун-та», т. 36. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.
4. В. К. Дубовой. Вейлевские семейства операторных узлов и соответствующие им открытые поля. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 14. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.
5. В. К. Дубовой. О характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 15. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
6. В. К. Дубовой. Об основных свойствах характеристических оператор-функций вейлевских семейств узлов. «Вестн. Харьковск. ун-та», т. 37. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
7. В. К. Дубовой. Мультипликативное представление характеристической оператор-функции вейлевского семейства узлов. «Вестн. Харьковск. ун-та», т. 37. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.
8. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. «Наука», 1966.
9. М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Изд-во Харьковск. ун-та, 1971.
10. М. А. Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
11. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1955.

Поступила 24 февраля 1971 г.