ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

З. Г. Габович

Рассмотрим последовательность функций

$$P_k(z) = \sum_{\nu=1}^{n_k} a_{k\nu} e^{-\langle \lambda^{(\nu)}, z \rangle}, \ k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\langle \lambda^{(\nu)}, z \rangle = \lambda_1^{(\nu)} z_1 + \cdots + \lambda_p^{(\nu)} z_p —$$

скалярное произведение векторов $\lambda^{(\nu)} = (\lambda_1^{(\nu)}, \ldots, \lambda_p^{(\nu)}) \in C^p$, $z = (z_1, \ldots, z_p) \in C^p$.

Обозначим

$$|z| = |z_1| + \cdots + |z_p|.$$

Предположим, что

$$0 < |\lambda^{(1)}| \leqslant |\lambda^{(2)}| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda^{(\nu)}| \to \infty,$$

$$|\arg \lambda_j^{(\nu)}| \leqslant a_j, \ 0 < a_j < \frac{\pi}{2},$$

и N_j — множество значений последовательности $\{\lambda_j^{\nu}\}$, $j = 1, \cdots, p$,— имеет угловую плотность.

Занумеруем точки множества N в порядке неубывания модулей $\mu_j^{(1)}, \cdots, \mu_j^{(n)} \ldots$

Пусть

$$L_j(z_j) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{z_j}{\mu_j^n}\right)^2\right], \quad j = 1, \ldots, p.$$

Известно [3], что функция $L_j(z_j)$ является целой функцией экспоненциального типа, причем при $\alpha_j < |\theta_j| < \pi - \alpha_j$ выполняется равенство

$$\lim_{r_j \to \infty} \frac{\ln |L_j(r_j e^{i\theta_j})|}{r_j} = h_j(\theta_j), \tag{1}$$

где

$$h_j(\theta_j) = \pi \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} \sin|\theta_j - \varphi_j| \, d\Delta_j(\varphi_j),$$

$\Delta_j(\varphi_j)$ — функция распределения угловой плотности последовательности $\{\mu_j^n\}$ (стремление к пределу равномерно в любом интервале $\alpha_j + \eta \leqslant |\theta_j| \leqslant \pi - \alpha_j - \eta$, $\eta > 0$). Поэтому сопряженная диаграмма функции $L_j(z_j)$ содержится в замкнутом параллелограмме, определяемом неравенствами

$$|\operatorname{Re} z_j e^{-i\alpha_j}| \leqslant h_j(-\alpha_j),$$
$$|\operatorname{Re} z_j e^{i\alpha_j}| \leqslant h_j(\alpha_j).$$

Обозначим через $E_j(\zeta_j, \eta) = E_j(\zeta_j, \alpha_j, \eta)$ множество, полученное путем сдвига на вектор ζ_j замкнутого параллелограмма, определяемого неравенствами

$$|\operatorname{Re} z_j e^{-i\alpha_j}| \leqslant h_j(-\alpha_j) + 2\eta,$$
$$|\operatorname{Re} z_j e^{i\alpha_j}| \leqslant h_j(\alpha_j) + 2\eta,$$

и обозначим через $W(\zeta, \alpha)$ полиугол

$$\left\{z : |\arg(z_j - \zeta_j)| < \frac{\pi}{2} - \alpha_j, \ j = 1, \ldots p\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{P_k(z)\}$ равномерно сходится в полицилиндрической области*

$$O(z^0) = O_1(z_1^0) \times \cdots \times O_p(z_p^0),$$

где $O_j(z_j^0)$ — область в плоскости z_j, содержащая множество $E_j(z_j^0, 0)$. Тогда последовательность $\{P_k(z)\}$ равномерно сходится внутри некоторого полиугла $W(z^{(1)}, \alpha)$, содержащего $\overline{W(z^0, \alpha)}$ *.

---

* Условимся обозначать через $\overline{W(\zeta, \alpha)}$ замыкание полиугла $W(\zeta, \alpha)$ в C^p.

Доказательство. Заметим, что согласно [2], при всех $s_j \in C^1$, $\lambda_j \in C^1$, имеет место неравенство

$$\left| \frac{L_j(s_j) - L_j(\lambda_j)}{s_j - \lambda_j} \right| \leqslant \Psi_j(s_j) + |L_j(s_j)|, \tag{2}$$

где

$$\Psi_j(s_j) = 2 \max_{|\lambda_j - s_j| = 1} |L_j(\lambda_j)|.$$

Докажем, что при $\alpha_j < \theta_j < \pi - \alpha_j$ выполняется равенство

$$\lim_{r_j \to \infty} \frac{\ln \Psi_j(r_j e^{i\theta_j})}{r_j} = h_j(\theta_j). \tag{3}$$

Зададимся произвольным θ_j, $\alpha_j < |\theta_j| < \pi - \alpha_j$. Непосредственно видно, что

$$\lim_{r_j \to \infty} [r_j^{-1} \max_{|\lambda_j - r_j e^{i\theta_j}| = 1} |\lambda_j|] = 1,$$

$$\lim_{r_j \to \infty} \max_{|\lambda_j - r_j e^{i\theta_j}| = 1} |\arg \lambda_j - \theta_j| = 0.$$

Так как в соотношении (1) стремление к пределу равномерно в любом интервале $[\alpha_j + \eta, \pi - \alpha_j - \eta]$, $\eta > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{r_j \to \infty}} r_j^{-1} \ln \Psi_j(r_j e^{i\theta_j}) \leqslant \overline{\lim_{r_j \to \infty}} r_j^{-1} \ln \max_{|\lambda_j - r_j e^{i\theta_j}| = 1} \exp\left\{\left[h_j(\arg \lambda_j) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\varepsilon}{2}\right] |\lambda_j|\right\} \leqslant [h_j(\theta_j) + \varepsilon](1 + \varepsilon).$$

Отсюда при $\alpha_j < |\theta_j| < \pi - \alpha_j$ получаем

$$\overline{\lim_{r_j \to \infty}} \frac{\ln \Psi_j(r_j e^{i\theta_j})}{r_j} \leqslant h_j(\theta_j).$$

С другой стороны, непосредственно видно, что

$$\lim_{r_j \to \infty} \frac{\ln |L_j(r_j e^{i\theta_j})|}{r_j} \leqslant \lim_{r_j \to \infty} \frac{\ln \Psi_j(r_j e^{i\theta_j})}{r_j}.$$

Из двух последних неравенств и равенства (1) вытекает равенство (3).

Пусть $l_j(s_j, t_j)$ — преобразование Бореля функции

$$\frac{L_j(s_j) - L_j(\lambda_j)}{s_j - \lambda_j},$$

рассматриваемой как функция переменного λ_j. Все особенности функции $l_j(s_j, t_j)$ при любом фиксированном s_j содержатся в множестве $E_j(0, 0)$ в силу неравенства (2) и равенства (1). Кроме того, при $t_j \in CE_j(0, 0)$ функция $I_j(s_j, t_j)$ является целой функцией переменного s_j.

Зададимся произвольным $\eta > 0$. Покажем, что при $t_j \in \overline{CE_j(0, \eta)}$ и при всех комплексных s_j выполняется неравенство

$$|I_j(s_j, t_j)| \leqslant \frac{1}{2\eta}\Psi_j(s_j) + \frac{A_j(\eta)}{\eta}, \tag{4}$$

где $A_j(\eta)$ не зависит от s_j и t_j. Действительно, в силу (1) существует такая постоянная $A_j(\eta)$, что при всех $r_j > 0$

$$|L_j(r_j e^{\pm i\alpha_j})| \leqslant A_j(\eta)\exp\{[h_j(\pm\alpha_j) + \eta]r_j\}. \tag{5}$$

С помощью неравенств (2) и (5) при $\operatorname{Re} t_j e^{\pm i\alpha_j} \geqslant h_j(\pm\alpha_j) + 2\eta$ будем иметь

$$|I_j(s_j, t_j)| \leqslant \Psi_j(s_j)\int_0^{\infty e^{\pm i\alpha_j}} |e^{-\lambda_j t_j}|\cdot|d\lambda_j| +$$

$$+ \int_0^{\infty e^{\pm i\alpha_j}} |L_j(\lambda_j)|\cdot|e^{-\lambda_j t_j}|\cdot|d\lambda_j| \leqslant$$

$$\leqslant \Psi_j(s_j)\int_0^{\infty}\exp\{-[h_j(\pm\alpha_j) + 2\eta]r_j\}\,dr_j +$$

$$+ A_j(\eta)\int_0^{\infty}\exp\{[h_j(\pm\alpha_j) + \eta]r_j - [h_j(\pm\alpha_j) +$$

$$+ 2\eta]r_j\}\,dr_j \leqslant \frac{1}{2\eta}\Psi_j(s_j) + \frac{A_j(\eta)}{\eta}.$$

При $\operatorname{Re} t_j e^{\pm i(\pi-\alpha_j)} \geqslant h_j(\mp\alpha_j) + 2\eta$, учитывая, что $L_j(-\lambda_j) = L_j(\lambda_j)$, будем иметь

$$|I_j(s_j, t_j)| \leqslant \Psi_j(s_j)\int_0^{\infty e^{\pm i(\pi-\alpha_j)}} |e^{-\lambda_j t_j}|\cdot|d\lambda_j| +$$

$$+ \int_0^{\infty e^{\pm i(\pi-\alpha_j)}} |L_j(\lambda_j)|\cdot|e^{-\lambda_j t_j}|\cdot|d\lambda_j| \leqslant$$

$$\leqslant \Psi_j(s_j)\int_0^{\infty}\exp\{-[h_j(\mp\alpha_j) + 2\eta]r_j\}\,dr_j +$$

$$+ A_j(\eta)\int_0^{\infty}\exp\{[h_j(\mp\alpha_j) + \eta]r_j - [h_j(\mp\alpha_j) +$$

$$+ 2\eta]r_j\}\,dr_j \leqslant \frac{1}{2\eta}\Psi_j(s_j) + \frac{A_j(\eta)}{\eta}.$$

Воспользовавшись соотношениями (3), (4) и свойствами индикатрисы, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_j^0(\varepsilon) > 0$, что при $t_j \in \overline{CE_j(0, \eta)}$, $\alpha_j \leqslant |\theta_j| \leqslant \pi - \alpha_j$, $r_j > r_j^0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|I_j(-r_j e^{i\theta_j}, t_j)| < \exp\{[h_j(\theta_j) + \varepsilon] r_j\}. \qquad (6)$$

Выберем $\eta^0 > 0$ таким образом, чтобы при всех j

$$E_j(z_j^0, 2\eta^0) \subset O_j(z_j^0).$$

Зададимся произвольной фиксированной точкой ζ, принадлежащей поликругу $U(z^0, \eta^0)$ и рассмотрим функцию

$$u_k(s, \zeta) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^p \int\limits_{C_1(\zeta_1, \eta^0)} \cdots \int\limits_{C_p(\zeta_p, \eta^0)} \prod_{j=1}^{p} I_j(-s_j, z_j - \zeta_j) P_k(z)\, dz_1 \ldots dz_p, \qquad (7)$$

где $C_j(\zeta_j, \eta^0)$ — граница множества $E_j(\zeta_j, \eta^0)$, ориентированная в положительном направлении. Непосредственно видно, что $u_k(s, \zeta)$ есть целая функция переменного s.

С помощью формулы (7) получаем, что равномерная сходимость последовательности $\{P_k(z)\}$ в области $O(z^0)$ влечет равномерную сходимость последовательности $\{u_k(s, \zeta)\}$ в любом компактном множестве пространства C^p. Далее, из формулы (7), принимая во внимание неравенство (6), будем иметь при $s_j = r_j e^{i\theta_j}$, $r_j > r'(\varepsilon)$, $\alpha_j \leqslant |\theta_j| \leqslant \pi - \alpha_j$, $j = 1, \ldots, p$,

$$|u_k(s, \zeta)| < \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} [h_j(\theta_j) + \varepsilon] r_j\right\}, \qquad (8)$$

где $r'(\varepsilon)$ — одно и то же для всех k.

Докажем, что

$$u_k(s, \zeta) = \sum_{\nu=1}^{n_k} a_{k\nu} e^{-\langle \lambda^{(\nu)}, \zeta \rangle} \prod_{j=1}^{p} L_j(s_j)(s_j - \lambda_j^{(\nu)})^{-1}. \qquad (9)$$

В самом деле,

$$\frac{L_j(s_j) - L_j(\lambda_j)}{s_j - \lambda_j} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_j(0, \eta^0)} I_j(s_j, t_j) e^{\lambda_j t_j}\, dt_j.$$

Умножая обе части этой формулы на $e^{\lambda_j \zeta_j}$ и производя в интеграле замену переменного $t_j + \zeta_j = z_j$, получаем

$$\frac{L_j(s_j) - L_j(\lambda_j)}{s_j - \lambda_j} e^{\lambda_j \zeta_j} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_j(\zeta_j, \eta^0)} I_j(s_j, z_j - \zeta_j) e^{\lambda_j z_j}\, dz_j.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^p \int\limits_{C_1(\zeta_1, \eta^0)} \cdots \int\limits_{C_p(\zeta_p, \eta^0)} \prod_{j=1}^{p} I_j(-s_j, z_j - \zeta_j) e^{-\lambda_j^{(\nu)} z_j} \times \, dz_1 \ldots dz_p = e^{-\langle \lambda^{(\nu)}, \zeta \rangle} \prod_{j=1}^{p} L_j(s_j)(s_j - \lambda_j^{(\nu)})^{-1}. \qquad (10)$$

Из формул (7), (10) непосредственно вытекает формула (9).

Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$, где $0 < \beta_j < \frac{\pi}{2} - \alpha_j$, $j = 1, \ldots, p$. Согласно формуле (9)

$$u_k(s, \zeta) \prod_{j=1}^{p} [L_j(s_j)]^{-1} = \sum_{\nu=1}^{n_k} a_{k\nu} e^{-\langle \lambda^{(\nu)}, \zeta \rangle} \prod_{j=1}^{p} (s_j - \lambda_j^{(\nu)})^{-1}.$$

Поэтому при $z \in W(\zeta, \alpha + \beta)$ имеет место интегральное представление

$$P_k(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Gamma_1} \ldots \int_{\Gamma_p} u_k(s, \zeta) \prod_{j=1}^{p} [L_j(s_j)]^{-1} \times$$
$$\times \exp(-\langle s, z - \zeta \rangle)\, ds_1 \ldots ds_p, \tag{11}$$

где Γ_j — граница угла $\{|\arg s_j| < \alpha_j + \beta_j\}$.

Заметим, что интеграл

$$\int_{\Gamma_1} \ldots \int_{\Gamma_p} \max_k |u_k(s, \zeta)| \cdot \prod_{j=1}^{p} |L_j(s_j)|^{-1} \times$$
$$\times |\exp(-\langle s, z - \zeta \rangle)| \cdot |ds_1| \ldots |ds_p| \tag{12}$$

равномерно сходится в произвольной области Q, $\overline{Q} \subset W(\zeta, \alpha + \beta)$, так как существуют числа $\chi = \chi(Q, \zeta) > 0$, $c(\chi) > 0$ такие, что для всех $z \in Q$ и $s \in \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_p$

$$\mathrm{Re}\langle s, z - \zeta \rangle \geqslant 2\chi |s|,$$

$$|u_k(s, \zeta)| \prod_{j=1}^{p} |L_j(s_j)|^{-1} \leqslant c(\chi) e^{\chi |s|},$$

(в силу (1), (8)) и, следовательно, интеграл (12) мажорируется в области Q сходящимся интегралом

$$c(\chi) \int_{\Gamma_1} \ldots \int_{\Gamma_p} e^{-\chi |s|} |ds_1| \ldots |ds_p|.$$

Поэтому в силу формулы (11) из равномерной сходимости последовательности $\{u_k(s, \zeta)\}$ в любом компактном множестве пространства C^p следует равномерная сходимость последовательности $\{P_k(z)\}$ внутри $W(\zeta, \alpha + \beta)$. Ввиду того, что ζ является произвольной точкой поликруга $U(z^0, \eta^0)$, и ввиду произвольности чисел $\beta_1, \ldots, \beta_p$ можно выбрать точку $z^{(1)} \in U(z^0, \eta^0)$ таким образом, чтобы последовательность $\{P_k(z)\}$ равномерно сходилась внутри полиугла $W(z^{(1)}, \alpha)$, содержащего $\overline{W(z^0, \alpha)}$. Доказательство закончено.

Следствие. *Система*

$$\{e^{-\langle \lambda^{(\nu)}, z \rangle}\}$$

не полна ни в какой области голоморфности, содержащей $E(z^0, 0) = E_1(z_1^0, 0) \times \cdots \times E_p(z_p^0, 0)$ *и не содержащей* $\overline{W(z^0, \alpha)}$.

Доказательство. Допустим, что система

$$\{e^{-\langle\lambda^{(\nu)}, z\rangle}\}$$

полна в некоторой области голоморфности Ω, содержащей $E(z^0, \alpha)$ и не содержащей $\overline{W(z^0, \alpha)}$. Возьмем функцию $f(z)$, голоморфную в Ω и не продолжаемую голоморфно в более широкую область, чем Ω. Пусть последовательность

$$P_k(z) = \sum_{\nu=1}^{n_k} a_{k\nu} e^{-\langle\lambda^{(\nu)}, z\rangle}$$

равномерно сходится к $f(z)$ в области Ω. По теореме 1 последовательность $\{P_k(z)\}$ равномерно сходится внутри некоторого полиугла $W(z^{(1)}, \alpha)$, содержащего $\overline{W(z^0, \alpha)}$ и, следовательно, $f(z)$ голоморфно продолжается в $W(z^{(1)}, \alpha)$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пусть $P(z)$ — предельная функция последовательности $\{P_k(z)\}$. По теореме 1 функция $P(z)$ является голоморфной в полиугле $W(z^{(1)}, \alpha)$.

Теорема 2. *Если функция $P(z)$ голоморфно продолжается из полиугла $W(z^{(1)}, \alpha)$ в область $H \supset \bigcup_{t \in \Lambda(z^{(1)}, z^*)} E(t, 0)$, где $\Lambda(z^{(1)}, z^*)$ — кривая, имеющая началом точку $z^{(1)}$ и концом точку z^*, то $P(z)$ голоморфно продолжается в некоторый полиугол $W(z^{**}, \alpha)$, содержащий $\overline{W(z^*, \alpha)}$.*

Доказательство. Выберем $\eta_H > 0$ таким образом, чтобы $U(z^{(1)}, \eta_H) \subset U(z^0, \eta^0)$ и для всех $t \in \Lambda(z^{(1)}, z^*)$

$$E(t, 2\eta_H) \subset H.$$

Зададимся произвольными точками $t \in \Lambda(z^{(1)}, z^*)$ и $\zeta \in U(t, \eta_H)$ и рассмотрим функцию

$$u(s, \zeta) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^p \int_{C_1(\zeta_1, \eta_H)} \dots \int_{C_p(\zeta_p, \eta_H)} \prod_{j=1}^{p} I_j(-s_j, z_j - \zeta_j) P(z)\, dz_1 \dots dz_p. \tag{13}$$

Непосредственно видно, что $u(s, \zeta)$ есть целая функция переменного s. По определению функций $u(s, \zeta)$ и $u_k(s, \zeta)$, учитывая, что $\{P_k(z)\}$ равномерно сходится к $P(z)$ в области $O(z^0)$, получаем, что при любом $\zeta \in U(z^{(1)}, \eta_H)$ функция $u(s, \zeta)$ является предельной функцией последовательности $\{u_k(s, \zeta)\}$. Из формулы (13), пользуясь неравенством (6), получаем, что при $s_j = r_j e^{i\theta_j}$, $r_j > r''(\varepsilon)$, $\alpha_j \leqslant |\theta_j| \leqslant \pi - \alpha_j$, $j = 1, \dots, p$ выполняется неравенство

$$|u(s, \zeta)| < \exp\left\{\sum_{j=1}^{p} [h_j(\theta_j) + \varepsilon]\, r_j\right\}. \tag{14}$$

В силу неравенства (14) и формулы (1) интеграл

$$F_\Gamma(z, \zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\Gamma_1} \ldots \int\limits_{\Gamma_p} u(s, \zeta) \prod_{j=1}^{p} [L_j(s_j)]^{-1} \times$$
$$\times \exp(-\langle s, z-\zeta\rangle)\, ds_1 \ldots ds_p$$

сходится абсолютно и равномерно в любой области Q, $\overline{Q} \subset W(\zeta, \alpha+\beta)$ и, следовательно, представляет голоморфную функцию переменного z в полиугле $W(\zeta, \alpha+\beta)$.

Выберем точку $\zeta^0 \in C^p$ таким образом, чтобы при всех $\zeta \in \bigcup\limits_{t \in \Lambda(z^{(1)}, z^*)} U(t, \eta_H)$ имело место включение

$$\overline{W(\zeta^0, \alpha+\beta)} \subset W(\zeta, \alpha+\beta),$$

и зададимся произвольной точкой $z \in W(\zeta^0, \alpha+\beta)$. Функция $F_\Gamma(z, \zeta)$ является голоморфной функцией по ζ в области

$$G = \bigcup_{t \in \Lambda} U(t, \eta_H),$$

поскольку функции

$$\frac{\partial}{\partial \tau_j} l_j(s_j, \tau_j), \quad j = 1, \ldots, p$$

при $\tau_j \in \overline{CE_j(0, \eta_H)}$ удовлетворяют неравенствам вида (4), откуда вытекает, что функции

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j} u(s, \zeta), \quad j = 1, \ldots, p$$

при $\zeta \in G$ удовлетворяют неравенствам вида (14). В силу формулы (11) при $\zeta \in U(z^{(1)}, \eta_H)$

$$F_\Gamma(z, \zeta) = P(z).$$

По теореме единственности голоморфных функций это равенство должно выполняться для всех $\zeta \in G$, так что

$$F_\Gamma(z, \zeta) = P(z) \text{ при } \zeta \in U(z^*, \eta_H).$$

Выберем точку $z^{**} \in U(z^*, \eta_H)$, удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{Im} z_j^{**} = \operatorname{Im} z_j^* \text{ и } \operatorname{Re} z_j^{**} < \operatorname{Re} z_j^*, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Поскольку при всех $z \in W(\zeta^0, \alpha+\beta)$

$$F_\Gamma(z, z^{**}) = P(z),$$

то вследствие голоморфности функции $F_\Gamma(z, z^{**})$ при $z \in W(z^{**}, \alpha+\beta)$ заключаем, что формула

$$P(z) = F_\Gamma(z, z^{**})$$

позволяет продолжить функцию $P(z)$ в область $W(z^{**}, \alpha+\beta)$. Ввиду произвольности чисел $\beta_1, \ldots, \beta_p$ отсюда следует, что $P(z)$

может быть голоморфно продолжена в полиугол $W(z^{**}, \alpha)$. Теорема доказана.

Пусть M — множество всех точек z^* таких, что функция $P(z)$ голоморфно продолжается из полиугла $W(z^{(1)}, \alpha)$ в некоторую область H, содержащую

$$\bigcup_{t \in \Lambda(z^{(1)}, z^*)} E(t, 0).$$

Ясно, что M является областью. По теореме 2 для любой точки $z^* \in M$ найдется такая точка z^{**}, что функция $P(z)$ голоморфно продолжается в полиугол $W(z^{**}, \alpha) \supset \overline{W(z^*, \alpha)}$. С другой стороны, непосредственно видно, что каждое множество $E(\zeta, 0) \cap CM$, где $\zeta \in \partial M$ содержит по меньшей мере одну особую точку функции $P(z)$.

Таким образом, получена

Теорема 3. *Функция $P(z)$ голоморфна в области M, обладающей следующими свойствами:*

1) *для любой точки $z^* \in M$ функция $P(z)$ голоморфно продолжается в некоторый полиугол*

$$W(z^{**}, \alpha) \supset \overline{W(z^*, \alpha)};$$

2) *на любом множестве $E(\zeta, 0) \cap CM$, где $\zeta \in \partial M$, функция $P(z)$ имеет по меньшей мере одну особую точку.*

В частности, если

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu}{|\lambda_j^{(\nu)}|} = 0,\ j = 1, \ldots, p,$$

то все точки ∂M являются особыми.

Определение. *Назовем полиугол $W(\zeta, \alpha)$ полиуглом голоморфности функции $P(z)$, если $P(z)$ голоморфно продолжается в $W(\zeta, \alpha)$ и не может быть продолжена голоморфно ни в какой полиугол, содержащий $\overline{W(\zeta, \alpha)}$.*

Обозначим через $\tilde{\zeta}_j$ ту вершину параллелограмма $E_j(\zeta_j, 0)$, для которой

$$|\arg(\tilde{\zeta}_j - \zeta_j)| < \frac{\pi}{2} - \alpha_j.$$

Из теоремы 2 следует

Теорема 4. *Пусть $W(\zeta, \alpha)$ — полиугол голоморфности функции $P(z)$ и пусть $\Lambda(\tilde{\zeta}, \zeta)$ — произвольная кривая, имеющая началом точку ζ, а концом — точку $\tilde{\zeta}$. Тогда множество*

$$\bigcup_{t \in \Lambda(\tilde{\zeta}, \zeta)} E(t, 0)$$

содержит по меньшей мере одну особую точку функции $P(z)$.

В заключение заметим, что аналогичные вопросы для кратных последовательностей полиномов Дирихле с положительными показателями рассматривались в статье [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Леонтьев. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения Труды матем. ин-та В. А. Стеклова, 39, 1951.

2. А. Ф. Леонтьев. Новое доказательство одной теоремы о сходимости последовательности полиномов Дирихле. Усп. матем. наук, 12, вып. 3, 1957, 165—170.

3. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., Гостехиздат, 1956.

4. В. П. Громов. Кратные ряды полиномов Дирихле. Сибирск. матем. журн., 10, № 3, 1969, 522—536.

Поступила 4 января 1971 г.