C^{α}-СВОЙСТВО МЕТОДОВ ЧЕЗАРО СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ И ТЕОРЕМЫ ТАУБЕРОВА ТИПА

Н. А. Давыдов

Доказано одно свойство методов Чезаро суммирования рядов, с помощью которого получены теоремы тауберова типа для этих методов и метода Абеля-Пуассона, обобщающие известные классические тауберовы теоремы.

1. C^{α}-свойство методов Чезаро

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ с комплексными членами a_n $(n = 0, 1, \ldots)$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad C_n^{\alpha} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_k}{A_n^{\alpha}} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

где

$$A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}, \quad A_0^{\alpha} = 1, \alpha > -1.$$

Числа C_n^{α} называются средними Чезаро порядка α ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^\alpha = S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу S методом Чезаро порядка $\alpha > -1$ или (C, α)-методом и записывают $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S(C, \alpha)$. Если $C_n^{(\alpha)} = 0(1)$ $(n \to \infty)$, то записывают $S_n = 0(1)(C, \alpha)$.

В работе [1] мы ввели понятие C-множества последовательности S_n и доказали следующее предложение.

Теорема А. *Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу S методом Чезаро порядка $\alpha > 0$ и если замкнутое выпуклое множество G в комплексной плоскости является C-множеством последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ частных сумм этого ряда, то $S \in G$. Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является C-точкой* последовательности $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, то для любого $\alpha > 0$*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |C_n^{(\alpha)}| = \infty,$$

где C_n^α — среднее Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Из этого предложения в качестве его следствий был получен целый ряд теорем тауберова типа [1, 2], обобщающих известные классические тауберовы теоремы.

В настоящей работе мы обобщим теорему А. Это позволит обобщить и тауберовы теоремы.

$C^{(\alpha)}$-свойством методов Чезаро суммирования рядов мы называем то их свойство, которое устанавливается следующим предложением.

Основная теорема. *Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу S методом Чезаро порядка $\beta > 0$ и если замкнутое выпуклое множество G в комлексной плоскости является C-множеством последовательности средних Чезаро C_n^α порядка $\alpha (0 \leqslant \alpha < \beta)$ этого ряда, то $S \in G$. Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является C-точкой последовательности средних Чезаро $C_n^{(\alpha)}$* порядка $\alpha \geqslant 0$, то для любого $\beta > \alpha$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \; C_n^{(\beta)} | = \infty.$$

Теорема А получается из основной теоремы при $\alpha = 0$.

---

* Определение бесконечно удаленной C-точки (см. [2], стр. 186).

Доказательство. Для доказательства основной теоремы нам потребуется теорема А, а также следующие две теоремы.

Теорема Б [3, теорема 1]. *Пусть $A = \|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная матрица, а $B = \|b_{nk}\|$ — нормальная матрица. Если $B \subset A$, то из ограниченности последовательности $\tau_n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} S_k$ следует ограниченность последовательности $t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k$.*

Теорема В [4, стр. 153]. *Соотношения $C_n^{(\alpha)} \{C^{(\beta)}(s)\} \to S \ (n \to \infty)$ и $C^{(\alpha+\beta)}(s) \to S \ (n \to \infty)$ равносильны.*

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу $S\,(C, \beta)$-методом и пусть G есть C-множество последовательности $C_n^{(\alpha)}$ $0 \leqslant \alpha < \beta$.
По теореме В утверждения

$$C_n^{(\beta-\alpha)} \{C^{(\alpha)}(s)\} \to S \ (n \to \infty) \text{ и } C_n^{(\beta-\alpha+\alpha)}(s) = C_n^{(\beta)} \to S \ (n \to \infty)$$

равносильны. Поэтому последовательность $C_n^{(\alpha)}$ будет суммироваться к числу $S\,(C, \beta - \alpha)$-методом. По теореме А число $S \in G$. Первая честь теоремы доказана.

Пусть бесконечно удаленная точка является C-точкой последовательности $C_n^{(\alpha)}$, $\alpha \geqslant 0$. Тогда по теореме А средние $C_n^{(\beta-\alpha)} \{C^{(\alpha)}(s)\}$ не ограничены при любом $\beta > \alpha$. Заметим, что (C, β)-метод нормален, а метод Q, определяемый последовательностью $C_n^{(\beta-\alpha)} \{C^{(\alpha)}(s)\}$, является нижним треугольним. По теореме В имеем $(C, \beta) \subset Q$, отсюда в силу теоремы Б последовательность C_n^{β} не ограничена при любом $\beta > \alpha$. Этим доказано утверждение второй части теоремы.

2. Теоремы тауберова типа для методов Чезаро

Из $C^{(\alpha)}$-свойства методов Чезаро следует целый ряд теорем тауберова типа. Мы сформулируем три наиболее общие из них.

Теорема 1. *Пусть дан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, и пусть каждый частичный предел, конечный или бесконечный, последовательности средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ этого ряда является C-точкой этой последовательности.*

Если $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0\,(1)\,(C, \beta)\,(n \to \infty)$ при каком-нибудь $\beta > \alpha$, то $S_n = 0\,(1)\,(C, \alpha)\,(n \to \infty)$.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(C, \beta)$ при каком-нибудь $\beta > \alpha$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S\,(C, \alpha)$.

Теорема 2. *Пусть даны ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и возрастающая последо-*

ательность натуральных чисел n_k, и пусть средние Чезаро порядка $\alpha > 0$ этого ряда удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}\left| C_m^{(\alpha)} - C_{n_k}^{(\alpha)} \right| = r < \infty \ (r \geqslant 0) \left(1 < \frac{m}{n_k} \to 1 \ (k \to \infty)\right)$$

или условию

$$\overline{\lim}\left| C_{n_k}^{(\alpha)} - C_m^{(\alpha)} \right| = r < \infty \ (r \geqslant 0) \left(1 < \frac{n_k}{m} \to 1 \ (k \to \infty)\right).$$

Если $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = O(1)\ (C, \beta)\ (n \to \infty)$ при каком-нибудь $\beta > \alpha$, то $C_{n_k}^{(\alpha)} = O(1)\ (k \to \infty)$.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S\ (C, \beta)$ при каком-нибудь $\beta > \alpha$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left| C_{n_k}^{(\alpha)} - S \right| \leqslant r.$$

Теорема 3. *Пусть даны ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ с действительными членами и возрастающая последовательность натуральных чисел n_k, и пусть средние Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ этого ряда удовлетворяют двум условиям:*

1) $\lim\left(C_m^{(\alpha)} - C_{n_k}^{(\alpha)}\right) \geqslant -r_1 > -\infty \ (r_1 \geqslant 0) \left(1 < \frac{m}{n_k} \to 1 \ (k \to \infty)\right);$

2) $\lim\left(C_{n_k}^{(\alpha)} - C_m^{(\alpha)}\right) \geqslant -r_2 > -\infty \ (r_2 \geqslant 0) \left(1 < \frac{n_k}{m} \to 1 \ (k \to \infty)\right).$

Если $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = O(1)\ (C, \beta)\ (n \to \infty)$ при каком-нибудь $\beta > \alpha$, то $C_n^{(\alpha)} = O(1)\ (k \to \infty)$.

Если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S\ (C, \beta)$ при каком-нибудь $\beta > \alpha$, то

$$S - r_2 \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\, C_{n_k}^{(\alpha)} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, C_{n_k}^{(\alpha)} \leqslant S + r_1.$$

Доказательства теорем 1—3 проводятся совершенно аналогично доказательствам соответственно теорем 1, 3 и 4 работы [2] (вместо C-свойства методов Чезаро, которое использовалось в работе [2] при доказательстве теорем 1, 3 и 4, здесь придется пользоваться C^α-свойством этих методов), поэтому мы доказательства здесь опускаем.

3. Теоремы тауберова типа для метода Абеля-Пуассона

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится для $0 < x < 1$ и если

$\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{0=0}^{\infty} a_n x^n = S$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к числу

S методом Абеля-Пуассона и записывают $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(A)$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится для $0 \leqslant x < 1$ и если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0(1)\,(x \to 1-0)$, то записывают $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = O(1)\,(A)\,(n \to \infty)$.

$C^{(\alpha)}$-свойство методов Чезаро, доказанное в п. 1, как и теоремы 1—3, вообще говоря, не переносятся на метод Абеля-Пуассона. Однако частные случаи теорем 2 и 3 при $n_k = k$ остаются справедливыми и для метода Абеля-Пуассона.

Теорема 4. *Пусть дан ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *и пусть его средние Чезаро порядка* $\alpha \geqslant 0$ *удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim}\,|C_m^{(\alpha)} - C_n^{(\alpha)}| = r < \infty\ (r \geqslant 0)\left(1 < \frac{m}{n} \to 1\ (n \to \infty)\right). \tag{1}$$

Если $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0(1)\,(A)\,(n \to \infty)$, *то* $S_n = 0(1)\,(C, \alpha)\,(n \to \infty)$.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(A)$, *то* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|C_n^{(\alpha)} - S| \leqslant r$.

Теорема 5. *Пусть дан ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *с действительными членами и пусть его средние Чезаро порядка* $\alpha \geqslant 0$ *удовлетворяют условию*

$$\underline{\lim}\,(C_m^{(\alpha)} - C_n^{(\alpha)}) \geqslant -r > -\infty\ (r \geqslant 0)\left(1 < \frac{m}{n} \to 1\ (n \to \infty)\right). \tag{2}$$

Если $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 0(1)\,(A)\,(n \to \infty)$, *то* $S_n = 0(1)\,(C, \alpha)\,(n \to \infty)$.

Если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(A)$, *то* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|C_n^{(\alpha)} - S| \leqslant r$.

Для доказательства теорем 4 и 5 нам достаточно доказать первую часть теоремы 5. Действительно, если первая часть теоремы 5 доказана, то справедливость второй ее части следует из теоремы 3 и известной теоремы Литтльвуда (если последовательность средних Чезаро порядка $\alpha \geqslant 0$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ограничена, то из равенства $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(A)$ следует равенство $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S(C, \beta)$ при любом $\beta > \alpha$). Если последовательность $C_n^{(\alpha)}$ удовлетворяет условию (1), то последовательности $\operatorname{Re} C_n^{(\alpha)}$ и $\operatorname{Im} C_n^{\alpha}$ будут удовлетворять условию (2). Поэтому первая часть теоремы 4 следует из первой части теоремы 5. Вторая часть теоремы 4 теперь следует из упомянутой выше теоремы Литтльвуда и теоремы 2. Итак, для доказательства теорем 4 и 5 достаточно доказать первую часть теорем 5, т. е. достаточно показать, что если последовательность действительных чисел $C_n^{(\alpha)}$ $(\alpha \geqslant 0)$ удовлетворяет условию (2) и если сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящегося в промежутке $0 \leqslant x < 1$, ограничена, то $C_n^{(\alpha)}$ есть ограниченная последовательность.

Так как [5, стр. 130]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} C_n^{\alpha} x^n,$$

то для доказательства первой части теоремы 5 достаточно проверить выполнимость условия II теоремы 238 [4] для функции $\varphi(u) = u$. Заметим, что условие III этой теоремы — функция $S(t) = S_n$ для $n \leqslant t < n+1$ такова, что $\underline{\lim}\{S(t) - S(u)\} \geqslant 0$, когда $1 < \frac{t}{u} \to 1$ $(u \to \infty)$, можно заменить условием — функция $S(t) = S_n$ для $n \leqslant t < n+1$ такова, что

$$\underline{\lim}\{S(t) - S(u)\} \geqslant -r > -\infty \; (r \geqslant 0), \tag{3}$$

когда

$$1 < \frac{t}{u} \to 1 \; (u \to \infty),$$

при сохранении справедливости утверждения этой теоремы.

В самом деле, при доказательстве теоремы 238 условие III было использовано только в виде

$$S(q) - S(p) \geqslant -a(\ln q - \ln p) - b \tag{4}$$

для $q \geqslant p \geqslant 1$ [4, теорема 239, стр. 379].

Но условие (4) справедливо и при выполнении условия (3) [2, стр. 192].

Итак, для доказательства первой части теоремы 5 достаточно проверить выполнимость условия II упомянутой выше теоремы 238. Это условие II для нашего случая имеет следующий вид:

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\alpha+1} \sum_{n=0}^{M} e^{-\frac{n}{x}} A_n^{\alpha} \to 0, \text{ когда } M \to +\infty, x \to +\infty, \frac{M}{x} \to 0, \tag{5}$$

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\alpha+1} \sum^{\infty} e^{-\frac{n}{x}} A_n^{\alpha} \to 0, \tag{6}$$

когда

$$x \to +\infty, \; N \to +\infty, \; \frac{N}{x} \to +\infty,$$

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)^{\alpha+1} \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{n}{x}} A_n^{\alpha} \ln \frac{n}{N} \to 0, \tag{7}$$

когда

$$x \to +\infty; \; N \to +\infty; \; \frac{N}{x} \to +\infty,$$

где

$$A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}, \quad A_0^\alpha = 1; \quad \alpha \geqslant 0.$$

Соотношения (5) — (7) для $\alpha = 0$ справедливы [4, стр. 383—384] Докажем справедливость их для $\alpha > 0$. Сначала покажем справедливость неравенства

$$\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^\alpha \, dy < C_1 N^{\alpha+1} e^{-\frac{N}{x}}, \tag{8}$$

где C_1 — постоянная, зависящая только от $\alpha > 0$; $0 < x \leqslant N$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int_N^B e^{-\frac{y}{x}} y^\alpha \, dy = -x \left(y^\alpha e^{-\frac{y}{x}} \Big|_N^b \right) + \alpha x \int_N^b e^{-\frac{y}{x}} y^{\alpha-1} \, dy,$$

отсюда

$$\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^\alpha \, dy = x N^\alpha e^{-\frac{N}{x}} + \alpha x \int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^{\alpha-1} \, dy. \tag{9}$$

Если α — целое положительное число, то, используя (9), получим

$$\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^\alpha \, dy = x N^\alpha e^{-\frac{N}{x}} + \alpha x^2 N^{\alpha-1} e^{-\frac{N}{x}} +$$

$$+ \alpha(\alpha-1) x^3 N^{\alpha-2} e^{-\frac{N}{x}} + \cdots + \alpha! \, x^\alpha N e^{-\frac{N}{x}} +$$

$$+ \alpha! \, x^\alpha \int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} \, dy = e^{-\frac{N}{x}} [x N^\alpha + \alpha x^2 N^{\alpha-1} +$$

$$+ \alpha(\alpha-1) x^3 N^{\alpha-2} + \cdots + \alpha! \, x^\alpha N + \alpha! \, x^{\alpha+1}] \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{N}{x}} N^{\alpha+1} [1 + \alpha + \alpha(\alpha-1) + \cdots + \alpha! + \alpha!] =$$

$$= C N^{\alpha+1} e^{-\frac{N}{x}},$$

где

$$C = 1 + \alpha + \alpha(\alpha-1) + \cdots + \alpha! + \alpha!$$

В этом случае неравенство (8) доказано.

Если α — нецелое положительное число, то из (9) имеем ($[\alpha]$ — целая часть числа α)

$$\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^\alpha \, dy = e^{-\frac{N}{x}} \Big[x N^\alpha + \alpha x^2 N^{\alpha-1} +$$

$$+\alpha(\alpha-1)x^3N^{\alpha-2}+\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha]+1)x^{[\alpha]+1}N^{\alpha-[\alpha]}+$$
$$+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha])x^{[\alpha]+1}\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}}y^{\alpha-[\alpha]-1}dy\Big].$$

Так как $\alpha-[\alpha]-1<0$, то

$$\int_N^\infty y^{\alpha-[\alpha]-1}e^{-\frac{y}{x}}dy<N^{\alpha-[\alpha]-1}\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}}dy=xN^{\alpha-[\alpha]-1}e^{-\frac{N}{x}}.$$

Поэтому

$$\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}}y^\alpha dy<e^{-\frac{N}{x}}[xN^\alpha+\alpha x^2N^{\alpha-1}+\alpha(\alpha-1)x^3N^{\alpha-2}+$$
$$+\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha]+1)x^{[\alpha]+1}N^{\alpha-[\alpha]}+$$
$$+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha])x^{[\alpha]+2}N^{\alpha-[\alpha]-1}]\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\frac{N}{x}}N^{\alpha+1}[1+\alpha+\alpha(\alpha-1)+\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha])]=$$
$$=C'N^{\alpha-1}e^{-\frac{N}{x}},$$

где $C'=1+\alpha+\alpha(\alpha-1)+\cdots+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha])$,

Неравенство (8) доказано.

Заметим, что [5, стр. 131]

$$A_n^\alpha=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}=\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{10}$$

и $1-e^{-\frac{1}{x}}<\frac{1}{x}$ для $x>1$. (11)

Используем тот факт, что функция $\psi(y)=y^\alpha e^{-\frac{y}{x}}$ $(x>0,\ \alpha>0)$ возрастает на отрезке $0\leqslant y\leqslant\alpha x$ и убывает в промежутке $\alpha x\leqslant\leqslant y<+\infty$.

Если $x>1$ и $M<\alpha x$, то из (10) и (11) имеем

$$(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{n=0}^M e^{-\frac{n}{x}}A_n^\alpha=(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}+$$
$$+\frac{(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{n=1}^M e^{-\frac{n}{x}}n^\alpha\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]<$$
$$<\frac{1}{x^{\alpha+1}}+\frac{C_2}{x^{\alpha+1}}\sum_{n=1}^M e^{-\frac{n}{x}}n^\alpha<\frac{1}{x^{\alpha+1}}+\frac{C_2}{x^{\alpha+1}}Me^{-\frac{M}{x}}M^\alpha=$$
$$=\frac{1}{x^{\alpha+1}}+C_2\left(\frac{M}{x}\right)^{\alpha+1}e^{-\frac{M}{x}}\to 0,$$

когда $x\to+\infty$, $M\to+\infty$, $\frac{M}{x}\to 0$.

Соотношение (5) доказано.

В силу (8), (10) и (11) при $1 < x \leqslant N$, $\alpha x \leqslant N$ получаем

$$(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{n}{x}} A_n^{\alpha} = (1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{x}}n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right] <$$

$$< \frac{C_2}{x^{\alpha+1}}\sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{n}{x}} n^{\alpha} < \frac{C_2}{x^{\alpha+1}} e^{-\frac{N}{x}} N^{\alpha} + \frac{C_2}{x^{\alpha+1}}\int_N^{\infty} e^{-\frac{y}{x}} y^{\alpha}\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{x}\left(\frac{N}{x}\right)^{\alpha} e^{-\frac{N}{x}} + C_1C_2\left(\frac{N}{x}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{N}{x}} \to 0,$$

когда $x\to\infty$, $N\to\infty$, $\frac{N}{x}\to\infty$, и соотношение (6) доказано.

В силу (8), (10) и (11) при $1 < x \leqslant N$, $(\alpha+1)x \leqslant N$ имеем

$$(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{n}{x}} A_n^{\alpha}\ln\frac{n}{N} =$$

$$= (1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n}{x}}n^{\alpha}\ln\frac{n}{N}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_2(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{n=N}^{\infty} e^{-\frac{n}{x}} n^{\alpha}\ln\frac{n}{N} =$$

$$= C_2(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(N+\nu)^{\alpha} e^{-\frac{N+\nu}{x}}\ln\left(1+\frac{\nu}{N}\right) =$$

$$= C_2(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}N^{\alpha}e^{-\frac{N}{x}}\left[\sum_{\nu=0}^{N-1}\left(1+\frac{\nu}{N}\right)^{\alpha} e^{-\frac{\nu}{x}}\ln\left(1+\frac{\nu}{N}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=N}^{\infty}\left(1+\frac{\nu}{N}\right)^{\alpha} e^{-\frac{\nu}{x}}\ln\left(1+\frac{\nu}{N}\right)\right] <$$

$$< C_2(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}N^{\alpha}e^{-\frac{N}{x}}\left[2^{\alpha}\ln 2\sum_{\nu=0}^{N-1} e^{-\frac{\nu}{x}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{\alpha+1}}{N^{\alpha+1}}\sum_{\nu=N}^{\infty}\nu^{\alpha+1}e^{-\frac{\nu}{x}}\right] < C_2 2^{\alpha}\ln 2\, N^{\alpha} e^{-\frac{N}{x}}(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1} +$$

$$+ C_2 2^{\alpha+1} e^{-\frac{N}{x}} N^{\alpha} e^{-\frac{N}{x}}(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1} +$$

$$+\frac{C_2 2^{\alpha+1} e^{-\frac{N}{x}}(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}}{N}\int_N^\infty e^{-\frac{y}{x}} y^{\alpha+1}\,dy <$$

$$< C_2 2^\alpha \ln 2\left(\frac{N}{x}\right)^\alpha e^{-\frac{N}{x}} + C_2 2^{\alpha+1}\frac{1}{x}\left(\frac{N}{x}\right)^\alpha e^{-\frac{N}{x}} +$$

$$+ C_1 C_2 2^{\alpha+1}\left(\frac{N}{x}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{N}{x}} \to 0\left(x\to\infty,\ N\to\infty,\ \frac{N}{x}\to\infty\right),$$

соотношение (7) доказано. Этим доказаны и теоремы 4 и 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. «Матем. сб.», 38 (80): 4, 1956, 509—524.
2. Н. А. Давыдов. (C)-свойство методов Чезаро и Абеля — Пуассона и теоремы тауберова типа. «Матем. сб.», 60 (102) : 2, 1963, 185—206.
3. Н. А. Давыдов. Об одном свойстве включения методов суммирования, определяемых нормальными матрицами. «Укр. матем. журн.», т. 22, 5, 1970, 685—690.
4. Г. Харди. Расходящиеся ряды. М., ИЛ, 1951.
5. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. 1, М., «Мир», 1965.

Поступила 4 января 1971 г.