О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКАХ И НЕКАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А. Г. Руткас, Н. И. Радбель

I. Пусть H и E — гильбертовы пространства, $R(H)$ — множество линейных ограниченных операторов в H, J — самосопряженный унитарный оператор в E.

Совокупность $L = [HTKJE]$ называется *узлом класса* $\Lambda_0(H, E)$ (неограниченным, см. [5]), если K — линейный оператор из E в H, T — линейный оператор в H, такие что* $\overline{D}_K = E$,

$$\overline{D}_T = H, \quad D_T \subset D_{T^*} \tag{1}$$

и при любом $f \in D_T$

$$(T - T^*) f = iKJK^*f. \tag{2}$$

В частности, если $T \in R(H)$ и $D_T = H$, мы приходим к понятию ограниченного операторного узла, изученного в [1,3].

Для всякого оператора T, *удовлетворяющего* (1), *и любого* пространства E достаточно большой размерности можно получить представление (2), т. е. включить оператор в узел класса $\Lambda_0(H, E)$. Доказательство этого утверждения можно получить с помощью теоремы Наймарка о самосопряженном расширении симметрического оператора $-i(T - T^*)$ с выходом из пространства H.

Действующий в пространстве E оператор

$$S(L, \lambda) = I - iJK^*(T - \lambda I)^{-1} K \tag{3}$$

называется *характеристическим оператором узла* L. В [5] изучались свойства оператора $S(L, \lambda)$; оказалось, что они во многом аналогичны свойствам характеристического оператора ограниченного узла [1,3]. При этом вместо обычного требования $\lambda \in \rho(T)$ в [5] предполагалось лишь, что $\lambda \overline{\in} P\sigma T$ (ср. ниже задачи п. III), где $\rho(T)$ — резольвентное множество, $P\sigma T$ — чисто точечный спектр оператора T. В дополнение к [5] здесь обобщается теорема об унитарной эквивалентности узлов класса Λ_0.

---

* Через D_K обозначена область определения оператора A.

Узел $L = \{HTKJE\}$ называется *простым*, если существует такая открытая область $G \subset \rho(T)$, что линейная замкнутая оболочка векторов вида $(T - \lambda I)^{-1} K\varphi$ $(\forall \varphi \in D_K, \ \forall \lambda \in G)$ совпадает с H. Используя разложение резольвенты $(T - \lambda I)^{-1}$ в окрестности регулярной точки $\lambda_0 \in G$ по степеням оператора $(T - \lambda_0 I)^{-1} \in R(H)$, получим лемму.

Лемма 1. *Узел $M \in \Lambda_0(H, E)$ прост тогда и только тогда, когда найдется такая точка $\lambda_0 \in \rho(T)$, что линейная замкнутая оболочка векторов вида*

$$(T - \lambda_0 I)^{-n} K\varphi \quad (\forall \varphi \in D_K, \ n = 1, 2, \ldots)$$

совпадает с H.

Тем же свойством обладает всякая точка, попадающая одновременно с λ_0 в соответствующую связную компоненту резольвентного множества $\rho(T)$.

Узлы

$$L_k = \{H_k T_k K_k J E\} \in \Lambda_0(H_k, E) \ /k = 1, 2/ \tag{4}$$

называются *унитарно эквивалентными*, если существует изометрический оператор U, отображающий H_1 на H_2 так, что $T_2 U = U T_1$, $K_2 = U K_1$.

Теорема 1. *Пусть узлы (4) унитарно эквивалентны, тогда их характеристические операторы равны при всех λ, не являющихся собственными числами операторов T_k:*

$$S(L_1, \lambda) = S(L_2, \lambda). \tag{5}$$

Обратно, если операторы T_k замкнуты, узлы L_k просты одновременно на некоторой области G и (5) справедливо при любом λ из G, то L_1 и L_2 унитарно эквивалентны.

Приведем основные моменты доказательства обратного утверждения, опуская выкладки. Из (1) и (2) вытекает равенство $D_S = D_K$ для (3), и потому из (5) следует $D_{K_1} = D_{K_2}$. При любых $\varphi_1, \varphi_2 \in D_{K_1}$ и $\lambda, \mu \in G$ можно проверить тождество

$$((T_1 - \lambda I)^{-1} K_1 \varphi_1, \ (T_1 - \mu I)^{-1} K_1 \varphi_2) = ((T_2 - \lambda I)^{-1} K_2 \varphi_1, \ (T_2 - \mu I)^{-1} K_2 \varphi_2),$$

из которого после разложения резольвент в ряды в окрестности точки $\lambda_0 \in G \subset \rho(T_k)$ получается, что при $j, k = 1, 2, \ldots$

$$((T_1 - \lambda_0 I)^{-j} K_1 \varphi_1, \ (T_1 - \lambda_0 I)^{-k} K_1 \varphi_2) = ((T_2 - \lambda_0 I)^{-j} K_2 \varphi_1, \ (T_2 - \lambda_0 I)^{-k} K_2 \varphi_2).$$

Отсюда (с учетом простоты узлов и леммы 1) следует изометричность линейного оператора $U: H_1 \to H_2$, определенного в начале по правилу

$$U(T_1 - \lambda_0 I)^{-n} K_1 \varphi = (T_2 - \lambda_0 I)^{-n} K_2 \varphi, \quad \varphi \in D_{K_1} = D_{K_2}, \ n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Из равенства (6) теперь легко получается унитарная эквивалентность узлов L_1 и L_2 (по-прежнему с использованием их простоты).

II. Ниже (в п. III, IV) рассматриваются две задачи, в которых для ограниченного операторного узла $M = [HTKJE]$ и некоторого оператора $C \in R(H)$ приходится изучать оператор

$$S(M, C, \lambda) = I - iJK^*(T - \lambda C)^{-1}K \tag{7}$$

при всяком значении λ из комплексной плоскости, не являющийся характеристическим числом пучка $(T - \lambda C)$. Оператор $S(M, C, \lambda)$ из (7) будем называть *C-характеристикой** узла M.

В важном для приложений частном случае узел M и оператор C подчинены условию

$$\Delta_T \subset \Delta_{\sqrt{C}}, \quad \Delta_K \subset \Delta_{\sqrt{C}}, \quad C > 0, \tag{8}$$

где через Δ_A обозначается область значений оператора A.

Лемма 2. *При условии (8) C-характеристика ограниченного узла M совпадает с характеристическим оператором некоторого узла класса* Λ_0.

Обозначим через Θ гильбертово пространство, которым становится многообразие $\Delta_{\sqrt{C}}$ из H по введению на нем скалярного произведения $[f, g] = \left(\sqrt{C}^{-1} f, \sqrt{C}^{-1} g\right)$. Многообразие Δ_C лежит в Θ и плотно в Θ по норме $[f, f]$. Оператор $\tau = TC^{-1}$ определен на Δ_C, $\Delta_\tau \subset \Delta_{\sqrt{C}} = \Theta$. В пространстве Θ существует сопряженный оператор τ^+, так что $D_{\tau^+} \supset D_\tau = \Delta_C$ и $\tau^+ g = T^* C^{-1} g$ при любом $g \in \Delta_C$. Для оператора K: $E \to \Theta$ получаем $K^+ g = K^* C^{-1} g$ при $g \in \Delta_C$. Из (1) при $f = C^{-1}g$ вытекает равенство $(\tau - \tau^+) g = iKJK^+ g$, $g \in D_\tau$. Следовательно, $L = [\Theta \tau K J E]$ есть узел (вообще говоря, неограниченный) класса $\Lambda_0(\Theta, E)$. Очевидно, что множества характеристических чисел пучка $(T - \lambda C)$ в пространстве H и оператора τ в пространстве Θ совпадают и при всех λ, не принадлежащих этим множествам, $S(M, C, \lambda) = S(L, \lambda)$. Лемма доказана.

Замечание. Иногда вместо условий (8) выполняются более сильные условия

$$\Delta_T \subset \Delta_C, \quad \Delta_K \subset \Delta_C, \quad C > 0. \tag{9}$$

В этом случае переход от C-характеристики (7) к характеристическому оператору узла класса Λ_0 можно осуществить, вводя в H скалярное произведение $\langle f, g \rangle = (Cf, g)$ с помощью ограниченного оператора $C > 0$. Если $\widehat{H}$ — естественное пополнение H по норме $\langle f, f \rangle$, то при $\widehat{T} = C^{-1}T$, $\widehat{K} = C^{-1}K$ совокупность $\widehat{L} = [\widehat{H}\widehat{T}\widehat{K}JE]$ есть узел класса $\Lambda_0(\widehat{H}, E)$ и $S(M, C, \lambda) = S(\widehat{L}, \lambda)$.

---

* Для случая конечномерного пространства H оператор (7) и связанные с ним прикладные задачи изучались в работах [6, 7].

Для изучения C-характеристики узла M в общем случае необходимо знать свойства оператора $F(\lambda) = (T - \lambda C)^{-1}$, зависящего от комплексного параметра λ. Для линейного пучка $(T - \lambda C)$ $(T, C \in R(H))$ введем следующие обозначения: $\rho(C, T)$ — множество *регулярных точек пучка* ($\lambda \in \rho(C, T)$, если оператор $F(\lambda)$ ограничен и определен на всем пространстве H): $\sigma(C, T)$ — *спектр пучка* (дополнение к $\rho(C, T)$ в комплексной плоскости); $P\sigma(C, T)$ — множество *характеристических чисел пучка;* $\tilde{\rho}(C, T)$ — множество *точек регулярного типа пучка* ($\lambda \in \rho(C, T)$, если оператор $F(\lambda)$ ограничен). Ясно, что при $\lambda \in \tilde{\rho}(C, T)$ область значений оператора $F(\lambda)$ замкнута. Точка $\lambda = \infty$ считается регулярной для пучка $T - \lambda C$, если оператор-функция $F\left(\frac{1}{z}\right)$ голоморфна в точке $z = 0$.

Условия $C^{-1} \in R(H)$ достаточно, чтобы $\infty \in \rho(C, T)$; оно же будет и необходимым, если $\bar{\Delta}_C = H$ или $\operatorname{Ker} C = 0$.

Пусть оператор C невырожден, тогда

$$P\sigma(C, T) = P\sigma A, \quad \rho(C, T) \subset \rho(A),$$

где $A = TC^{-1}$, причем подпространство $\operatorname{Ker}(T - \lambda C)$ и многообразие $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ имеют одинаковую размерность: $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) = C \operatorname{Ker}(T - \lambda C)$. Если T, C — вполне непрерывные операторы и C — полный самосопряженный оператор ($\operatorname{Ker} C = 0$ см. [2]), то $0, \infty \in P\sigma(C, T)$.

Для произвольного пучка $T - \lambda C$ множество $\rho(C, T)$ открыто, оператор-функция $F(\lambda) = (T - \lambda C)^{-1}$ — голоморфна на $\rho(C, T)$ и при $\lambda_0 \in \rho(C, T)$ в пространстве $R(H)$ сходится ряд

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n [F(\lambda_0) C]^n F(\lambda_0) \tag{10}$$

в круге $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\| F(\lambda_0) C \|}$.

При $\lambda, \mu \in \rho(C, T)$ справедливо следующее обобщение тождества Гильберта:

$$F(\lambda) - F(\mu) = (\lambda - \mu) F(\lambda) CF(\mu). \tag{11}$$

Множество $\tilde{\rho}(C, T)$ открыто, для всякой точки λ_0 регулярного типа существует окрестность $\varepsilon(\lambda_0)$ и голоморфная на $\varepsilon(\lambda_0)$ оператор-функция $v(\lambda)$ такая, что

$$(T - \lambda I)^{-1} = F(\lambda) \subset v(\lambda), \quad \forall \lambda \in \varepsilon(\lambda_0).$$

Эти утверждения позволяют вывести следующие две леммы, касающиеся C-характеристики $S(M, C, \lambda)$ ограниченного узла $M = [HTKJE]$, где от оператора $C \in R(H)$ не требуется положительности.

Лемма 3. *Если $\lambda_0 \in \bar{\rho}(C, T)$ и в окрестности точки λ_0 выполняется включение $\Delta_k \subset \Delta_{T - \lambda C}$, то $S(M, C, \lambda)$ — голоморфная оператор-функция в некоторой окрестности точки λ_0.*

Лемма 4. Пусть $\lambda_0 \overline{\in} P\sigma(C, T)$ и соотношение

$$\overline{\Delta}_K \subset \Delta_{T-\lambda C} \tag{12}$$

справедливо при всяком λ из некоторой окрестности $\varepsilon(\lambda_0)$ точки λ_0. Если при этом окрестность $\varepsilon(\lambda_0)$ свободна от характеристических чисел пучка $T - \lambda C$ и векторнозначная функция $g(\lambda) = (T - \lambda C)^{-1} f$ непрерывна в точке λ_0 при всяком f из подпространства $\overline{\Delta}_K$, то $S(M, C, \lambda)$ — голоморфная в точке λ_0 оператор-функция.

Пусть теперь $C > 0$ и $S(\lambda) = S(M, C, \lambda)$ суть C-характеристика (7) ограниченного узла $M = [HTKJE]$. По аналогии с [5] можно установить, что при $\lambda \overline{\in} P\sigma(C, T)$ и $\varphi \in D_{S(\lambda)}$ справедливо равенство $(JS(\lambda)\varphi, \ S(\lambda)\varphi) - (J\varphi, \ \varphi) = 2\,\mathrm{Im}\,\lambda\,(Cf, f)$, где $f = (T - \lambda C)^{-1} K\varphi$. Отсюда следует

Теорема 2. *Оператор $S(M, C, \lambda)$, является J-несжимающим в верхней полуплоскости λ, J-нерастягивающим в нижней и J-унитарным на вещественной оси.*

III. C-характеристика операторного узла (7) встречается в задачах анализа и синтеза различных линейных систем: электромеханических цепей [6], периодических структур, моделей неоднородных сред и др. (см. п. III, IV). Пусть линейная физическая система характеризуется состоянием $\Psi(t)$, удовлетворяющим уравнению $A\frac{d\Psi}{dt} + B\Psi = f(t)$ в гильбертовом пространстве H ($f \in H$; $A, B \in R(H)$). Уравнение и саму систему мы будем называть **неканоническими**, если оператор A вырожден.

Рассмотрим периодическую структуру, электрическая модель которой получается, если в дискретной модели длинной линии каждый элемент заменить осциллятором (такая структура приведена в [4] под номером 10). Осциллятор, заменивший емкость, назовем поперечным, а заменивший индуктивность — продольным. Пусть наша структура бесконечна лишь в одном направлении и требуется изучить задачу отражения волн от ее начала. Если U, I — напряжение и ток в начале модели, то величины

$$\varphi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(U + I); \quad \varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(-U + I) \tag{13}$$

могут считаться амплитудами падающей и отраженной от начала структуры волны с частотой λ [3], а отношение $\frac{\varphi^+}{\varphi^-} = S_\lambda$ — коэффициентом отражения волны.

Элементарному звену структуры соответствуют восемь комплексных переменных, которые на модели имеют смысл токов и напряжений и связаны уравнениями

$$\begin{aligned} U_{L_n} &= L_n \frac{d}{dt} I_{L_n}, \quad U_{\Lambda_n} = \Lambda_n \frac{d}{dt} I_{\Lambda_n}, \\ I_{S_n} &= S_n \frac{d}{dt} U_{S_n}, \quad I_{C_n} = C_n \frac{d}{dt} U_{C_n}, \end{aligned} \tag{14}$$

где n — номер звена от начала структуры; L_n, S_n — коэффициенты индуктивности и емкости продольного осциллятора; Λ_n, C_n — коэффициенты индуктивности и емкости поперечного осциллятора в звене.

Внутренним состоянием структуры считается вектор

$$\Psi = (\sqrt{L_n}\, I_{L_n}, \quad \sqrt{\Lambda_n}\, I_{\Lambda_n}, \quad \sqrt{S_n}\, U_{S_n}, \quad \sqrt{C_n}\, U_{C_n})_{n=1}^{\infty}. \tag{15}$$

Подстановка в алгебраические уравнения связей (уравнения Кирхгофа) на место величин U_{L_n}, I_{C_n}, U_{Λ_n}, I_{S_n} их выражений из (14) с использованием (13) приводит к бесконечной системе уравнений, преобразование Лапласа которой имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l}
-iU_{S_1} - \lambda L_1 I_{L_1} = 0; \\
-iU_{C_1} - \lambda \Lambda_1 I_{\Lambda_1} = 0; \\
-iI_{L_1} + iI_{\Lambda_1} + iI_{L_2} + \lambda S_1 U_{S_1} - \lambda C_1 U_{C_1} - \lambda S_2 U_{S_2} = 0; \\
\quad iI_{L_1} + iU_{S_1} + iU_{C_1} - \lambda S_1 U_{S_1} = i\sqrt{2}\varphi^-; \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
-iU_{S_n} - \lambda L_n I_{L_n} = 0; \\
-iU_{C_n} - \lambda \Lambda_n I_{\Lambda_n} = 0; \\
-iI_{L_n} + iI_{\Lambda_n} + iI_{L_{n+1}} + \lambda S_n U_{S_n} - \lambda C_n U_{C_n} - \lambda S_{n+1} U_{S_{n+1}} = 0; \\
-U_{C_{n-1}} + U_{S_n} + U_{C_n} = 0; \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{16}$$

($n = 2, 3, \ldots$). Используя обозначение (15), легко переписать систему (16) в матричной форме

$$B\Psi - \lambda A\Psi = \Gamma\varphi^-. \tag{17}$$

Матрицы A, B являются обобщенными якобиевыми, при условии

$$0 < m \leqslant L_i,\ C_i,\ S_i,\ \Lambda_i \leqslant N < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

они задают в пространстве l_2 ограниченные операторы ($\Psi \in l_2$). Пусть E — одномерное комплексное евклидово пространство ($\varphi^-, \varphi^+ \in E$); тогда матрица-столбец Γ задает линейный ограниченный оператор из E в l_2. Поскольку оператор A в (17) вырожден, то рассматриваемая физическая система с внутренним состоянием (15) неканонична. Непосредственно проверяется, что операторы A, B, Γ связаны соотношением

$$BA^* - AB^* = i\Gamma J\Gamma^*, \tag{19}$$

а в силу уравнений (16)

$$\Psi \in \Delta_{A^*}, \tag{20}$$

лишь только Ψ удовлетворяет (17).

В уравнении (17) произведем замену $\Psi = A^*g$, $g \in \overline{\Delta}_A$:

$$(T - \lambda C)\, g = K\varphi^-, \tag{21}$$

$$\Gamma = K, \quad BA^* = T, \quad AA^* = C. \tag{22}$$

Легко проверить, что $\varphi^+ = \varphi^- - iJ\Gamma^* g$; если $\lambda \overline{\in} P\sigma(C, T)$ и $K\varphi^- \in \Delta_{T-\lambda C}$, то $\varphi^+ = \varphi^- - iJK^*(T - \lambda C)^{-1} K\varphi^-$.

Таким образом, коэффициент отражения S_λ совпадает с C-характеристикой $S(M, C, \lambda)$ узла

$$M = [HTKJE], \text{ где } J = 1, \ H = \overline{\Delta}_A.$$

Отсюда, в частности, следует, что оператор S_λ обладает J-метрическими свойствами в соответствии с теоремой 2, и что S_λ — регулярная функция от λ на множестве $\rho(C, T)$.

Исследуем подробнее структуру, у которой параметры подчинены условиям

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_{i+1} = \frac{1}{4}; \quad S_{i+1} = \frac{1}{2}; \\ L_i = \frac{1}{S_i}; \quad \Lambda_i = \frac{1}{C_i} \quad (i = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{23}$$

Подпространство H_1 векторов вида $(f_1, f_2, 0, 0; f_5, f_6, 0, 0; \ldots)$ $|H_1 \subset H \subset l_2|$ приводит оператор C; индуцированные в H_1 и $H_2 = H \ominus H_1$ операторы обозначим через C_1 и C_2 соответственно. Оператор C_1 имеет ограниченный обратный (это сразу вытекает из диагональности его матрицы).

Приведем систему уравнений $C_2 x = y$ к эквивалентной треугольной системе, которую можно записать в виде $(I - Q)\, x = g$, где $\|Q\| = \frac{1}{2}$. Следовательно, оператор C в H имеет ограниченный обратный C^{-1}.

Кроме того, $\|C^{-1}\| \leqslant \max\left\{\frac{1}{L_1}, \sqrt{\frac{128}{3} + 2L_1^2}\right\}$. В силу уравнений (16) операторы K, T, C удовлетворяют условиям (9), и в соответствии с замечанием к лемме 2 можно перейти к узлу $\widehat{L}$ класса Λ_0. Таким образом, коэффициент отражения $S_\lambda = S(M, C, \lambda)$ при условиях (23) на параметры является характеристической функцией ограниченного операторного узла $\widehat{L}$ из замечания к лемме 2:

$$S_\lambda = S(\widehat{L}, \lambda) = I - iJ\widehat{K}^+ (\widehat{T} - \lambda I)^{-1} \widehat{K}. \tag{24}$$

Поэтому функция S_λ голоморфна при

$$|\lambda| > 5 \max\left\{\frac{1}{L_1}, \sqrt{\frac{128}{3} + 2L_1^2}\right\} \geqslant \|\widehat{T}\|.$$

Исследуя соответствующую бесконечную систему уравнений, можно показать, что операторное уравнение (21) имеет единственное решение при всех λ из комплексной плоскости за исключением конечного множества $P\sigma(C, T)$, состоящего из точек 0, 1, —1 и корней уравнения

$$\omega^2 - i\omega\left(L_1 + \frac{4}{3}\right) - 1 = 0.$$

Итак, коэффициент отражения S_λ представляет собой комплекснозначную функцию от λ, определенную формулами (7), (24) при всех $\lambda \overline{\in} P\sigma(c, T)$.

IV. Пусть П — линейная система, представляющая собой континуальный аналог предыдущей дискретной структуры. Систему П можно считать обобщением двухпроводной длинной линии в том смысле, что бесконечно малый по длине элемент линии П обладает не только поперечной, но и продольной емкостью и соответственно поперечной и продольной индуктивностью.

Электромагнитное состояние такой линии П в сечении x $(0 < x < l)$ характеризуется следующими величинами:

$U(x, t)$ — поперечный потенциал (в случае обычной линии — это разность потенциалов между проводами);

$I(x, t)$ — индуктивный продольный ток в линии (в случае обычной линии это ток в проводе);

$V(x, t)$ — потенциал продольного заряжания единицы длины линии П в точке x;

$\tilde{I}(x, t)$ — поперечный индуктивный ток.

Исходя из структуры дискретной модели бесконечно малого элемента линии нетрудно получить следующую систему четырех дифференциальных уравнений, описывающих колебания в линии П

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\widehat{C}(x)\frac{\partial V(x, t)}{\partial t}\right] + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -C(x)\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \tilde{I}(x, t),$$

$$U(x, t) = \tilde{L}(x)\frac{\partial \tilde{I}(x, t)}{\partial t}; \quad V(x, t) = \frac{-\partial U(x, t)}{\partial x}; \tag{25}$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -L(x)\frac{\partial I(x, t)}{\partial t}.$$

Коэффициенты $C(x)$, $\widehat{C}(x)$, $L(x)$, $\tilde{L}(x)$ $(0 < x < l)$ в уравнениях (25) имеют следующий физический смысл: $C(x)$ — поперечная емкость, $L(x)$ — продольная индуктивность, $\widehat{C}(x)$ — продольная емкость, $\tilde{L}(x)$ — поперечная индуктивность, отнесенные соответственно к единице длины линии П в точке x.

Пусть $0 < m \leqslant C(x)$, $\widehat{C}(x)$, $L(x)$, $\tilde{L}(x) \leqslant M < \infty$, и к началу линии П подключена однородная двухпроводная линия Π_0 $(-\infty < x \leqslant 0)$, с помощью которой возбуждаются гармонические колебания в линии П:

$$U(x, t) = U(x)e^{i\lambda t}, \ \ldots, \ \tilde{I}(x, t) = \tilde{I}(x)e^{i\lambda t}. \tag{26}$$

Тогда прямая и обратная волны в линии II_0 имеют в точке $x = 0$ амплитуды соответственно

$$\varphi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[U(0, t) + \widehat{C}(0)\frac{\partial V(0, t)}{\partial t} + I(0, t)\right],$$
$$\varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-U(0, t) + \widehat{C}(0)\frac{\partial V(0, t)}{\partial t} + I(0, t)\right],$$

так что отношение $\frac{\varphi^+}{\varphi^-} = S_\lambda$ есть волновой коэффициент отражения от начала линии II. Вектор-функцию $\Psi = (I(x), \tilde{I}(x), V(x), U(x))$, $0 \leqslant x \leqslant l$ будем называть внутренним состоянием линии II.

С учетом (26) система (25) может быть приведена к виду:

$$i\lambda \frac{d}{dx}[\widehat{C}(x) V(x)] + \frac{dI(x)}{dx} + \tilde{I}(x) + i\lambda C(x) U(x) = 0;$$
$$U(x) - i\lambda \tilde{L}(x)\tilde{I}(x) = 0; \quad \frac{dU(x)}{dx} + V(x) = 0; \tag{27}$$
$$\frac{dU(x)}{dx} + i\lambda L(x) I(x) = 0.$$

Решение системы (27) будем искать среди вектор-функций $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x), \Psi_4(x)) = (I(x), \tilde{I}(x), V(x), U(x))$ из гильбертового пространства $[L_{2[0,l]} \times L_{2[0,l]} \times L_{2[0,l]} \times L_{2[0,l]}]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^l [L(x) f_1(x)\overline{g_1(x)} + \tilde{L}(x) f_2(x) \times \times \overline{g_2(x)} + \widehat{C}(x) f_3(x)\overline{g_3(x)} + C(x) f_4(x)\overline{g_4(x)}]\,dx$, причем $\Psi(x)$ подчиним граничным условиям:

$$1)\ I(l) = 0; \quad 2)\ i\lambda\widehat{C}(0) V(0) + I(0) + U(0) = \sqrt{2}\varphi^-. \tag{28}$$

Заметим, что в силу уравнений (27) удовлетворяется еще граничное условие $V(l) = 0$.

Интегрируя первое из уравнений системы (27) от 0 до x, а третье и четвертое от x до l и учитывая граничные условия, получаем

$$-iI(x) + i\int\limits_x^l \tilde{I}(\xi)\,d\xi - \lambda\left[\int\limits_x^l C(\xi) U(\xi)\,d\xi - \widehat{C}(x) V(x)\right] = 0;$$
$$iU(x) + \lambda\tilde{L}(x)\tilde{I}(x) = 0;$$
$$i\int\limits_0^x V(\xi)\,d\xi + iU(x) + i\int\limits_0^l \tilde{I}(\xi)\,d\xi - \lambda\int\limits_0^l C(\xi) U(\xi)\,d\xi = i\sqrt{2}\varphi^-; \tag{29}$$
$$iU(x) + i\int\limits_0^l \tilde{I}(\xi)\,d\xi - \lambda\left[\int\limits_0^x L(\xi) I(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^l C(\xi) U(\xi)\,d\xi\right] = i\sqrt{2}\varphi^-$$

Эта система может быть записана в виде (17), где

$$A\Psi = \Big(-\widehat{C}(x)\,V(x) + \int\limits_x^l C(\xi)\,U(\xi)\,d\xi;\quad -\tilde{L}(x)\,\tilde{I}(x);$$

$$\int\limits_0^l C(\xi)\,U(\xi)\,d\xi;\quad \int\limits_0^x L(\xi)\,I(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^l C(\xi)\,U(\xi)\,d\xi\Big);$$

$$B\Psi = \Big(-iV(x) + i\int\limits_x^l \tilde{I}(\xi)\,d\xi;\quad iU(x);\quad i\int\limits_0^x V(\xi)\,d\xi + iU(x) +$$

$$+ i\int\limits_0^l \tilde{I}(\xi)\,d\xi;\quad i\int\limits_0^l \tilde{I}(\xi)\,d\xi + iU(x)\Big);$$

$$\Gamma\varphi^- = \left(0;\ 0;\ i\sqrt{2}\varphi^-;\ i\sqrt{2}\varphi^-\right).$$

Отметим, что физическая система II с внутренним состоянием $\Psi(t)$ и граничными условиями (28) неканонична (оператор A не имеет обратного) и при $J = 1$ выполнено условие (19) на операторы A, B, Γ. Если Ψ — решение (17) при граничных условиях (28), то в силу самих уравнений (29) $\Psi \in A^*\vartheta$, где ϑ — линейное многообразие векторов $g(x) = (g_1(x),\ g_2(x),\ \alpha,\ g_4(x))$, у которых $g_1(x)$ — абсолютно непрерывная функция; $\frac{dg_1(x)}{dx}$, $g_2(x)$, $g_4(x) \in L_{2\,[0,\,l]}$; α — const. Ясно, что $\vartheta \in \overline{\Delta}_A$.

Если выполнить замену $\Psi = A^*g$ и ввести операторы T, C, K, как в (22), мы придем к уравнению (21): $(T - \lambda C)\,g = K\varphi^-$, где $g \in \vartheta$, а $M = [\overline{\Delta}_A TKJE]$ — ограниченный операторный узел.

Можно показать, что, когда функция $\widehat{C}(x)\,L(x)$ абсолютно непрерывна, характеристические числа пучка $(T - \lambda C)$ покрывают всю комплексную плоскость, за исключением, быть может, ограниченного множества точек вещественной оси. При этом совокупность решений g уравнения (21), соответствующих фиксированному $\lambda \in P\sigma(C, T)$, образует нетривиальную одномерную гиперплоскость в пространстве $H = \overline{\Delta}_A$.

Если же $L(x)$ — функция, для которой начало координат является точкой сгущения скачков, $\widehat{C}(x)$ — непрерывная функция, то множество характеристических чисел $P\sigma(C, T)$ состоит из 0 и, возможно, некоторых отрезков вещественной оси, при этом для $\lambda \in P\sigma(C, T)$ уравнение (21) имеет решения. Во всех остальных точках λ комплексной плоскости уравнение (21) оказывается противоречивым.

При замене граничных условий (28) условиями

$$U(l) = 0;\quad i\lambda\widehat{C}(0)\,V(0) + I(0) + U(0) = \sqrt{2}\varphi^- \qquad (30)$$

исходная система (25) приводится к виду (17), где

$$A\Psi = \Big(\int_0^l L(t)\, I(t)\, dt + \widehat{C}(x)\, V(x) + \int_0^x C(t)\, U(t)\, dt;\quad \tilde{L}(x)\, \tilde{I}(x);$$

$$\int_x^l L(t)\, I(t)\, dt;\quad \int_0^l L(t)\, I(t)\, dt\Big);\quad B\Psi = \Big(iI(x) + i\int_0^x \tilde{I}(t)\, dt; -iU(x);$$

$$-iU(x);\quad -i\int_0^x V(t)\, dt - iU(x)\Big);\quad \Gamma\varphi^- = \big(i\sqrt{2}\,\varphi^-;\ 0;\ 0;\ 0\big).$$

Здесь, как и при граничных условиях (28), оператор A не имеет обратного, при $J = 1$ выполнено (19). Но если Ψ — решение уравнения (17) при граничных условиях (30), то $\Psi = A^*\vartheta_1$, где ϑ_1 — линейное многообразие векторов $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), \alpha)$, у которых $g_1(x)$ — абсолютно непрерывная функция, $\frac{dg_1(x)}{dx}$, $g_2(x)$, $g_3(x) \in L_2[0, l]$, α — const, так что $\vartheta_1 \subset \overline{\Delta}_A$.

Итак, снова путем замены $\Psi = A^*g$ $(g \in \overline{\Delta_A})$ можно получить из (17) уравнение (21) и ограниченный операторный узел $M = [\overline{\Delta_A} T K J E]$, где $\Gamma = K$, $T = BA^*$. Кроме того, $\varphi^+ = \varphi^- - iJK^*g$ лишь только g есть такое решение уравнения (21), что вектор-функция $\Psi = A^*g$ удовлетворяет граничным условиям (30). Но такое решение существует и единственно по крайней мере в следующих двух случаях

$$1\quad M^2 > m^2 > M^2l^2$$

и
$$|\lambda > \frac{Ml + \sqrt{M^2l^2 + 4\left(\frac{Ml^2}{m} + 1\right)(-M^2l^2 + m^2)}}{2(m^2 - M^2l^2)};$$

$$2)\quad Ml^2 < m < M$$

и
$$|\lambda| < \frac{-Ml + \sqrt{M^2l^2 + 4(M^2l^2 + m^2)\left(1 - \frac{Ml^2}{m}\right)}}{2(M^2l^2 + m^2)}.$$

Поэтому в обоих случаях коэффициент отражения S_λ существует и совпадает с C-характеристикой $S(M, C, \lambda)$ узла M, где $C = AA^*$.

Описанное выше многообразие ϑ_1 является максимальным многообразием, удовлетворяющим условию $BA^*\vartheta_1 \subset \Delta_{AA^*}$, или в обозначениях (22) $T\vartheta_1 \subset \Delta_C$. Пусть $\widehat{H}$ — гильбертово пространство, полученное из $\overline{\Delta}_A$ введением скалярного произведения $\langle f, g\rangle = (Cf, g)$ и соответствующим пополнением.

Тогда совокупность $\widehat{L} = [\widehat{H}\widehat{T}\widehat{K}JE)$ суть узел класса $\Lambda_0(\widehat{H}, E)$, где $\widehat{T} = C^{-1}T$, $\widehat{K} = C^{-1}K$, $D_{\widehat{T}} = \vartheta_1$, $D_K = E$ (ср. с замечанием к лемме 2). Поскольку в этом случае оператор C^{-1} неограничен, то $\widehat{L}$ — неограниченный узел, и так как $S(M, C, \lambda) = S(\widehat{L}, \lambda)$, то коэффициент отражения S_λ совпадает с характеристическим оператором неограниченного узла $\widehat{L}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. «Наука», М., 1969.

2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. «Наука», М., 1965.

3. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. «Наука», М., 1966.

4. П. Е. Краснушкин. О методах моделирования волновых процессов. Вестник МГУ, № 11, 89, 1949.

5. А. Г. Руткас. О характеристических функциях неограниченных операторов. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, В. 12, 1970.

6. А. Г. Руткас, Д. М. Чаусовский. Об одном классе линейных автоматов на графах. «Кибернетика», 1969, № 3.

7. А. Г. Руткас. Пары несамосопряженных операторов и операторные гиперузлы. «Укр. матем. журн.», т. 22, № 1. Киев, 1970.

Поступила 12 сентября 1970 г.