БЕЗГРАНИЧНАЯ ДЕЛИМОСТЬ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

С. Г. Малошевский

Рассматривается семейство распределений, имеющих плотности вида

$$p(x) = C \exp\{\beta x - Ae^{\alpha x}\}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где

$$A > 0, \ \alpha\beta > 0. \tag{2}$$

Условия (2) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция вида (1) могла быть плотностью некоторого распределения на вещественной прямой при подходящем выборе постоянной C.

А. М. Каган, Ю. В. Линник, А. Л. Рухин и И. В. Романовский [1], рассматривая статистическую задачу оценивания параметра сдвига, обнаружили специальное свойство семейства (1), названное ими самоуправляемостью.

Как будет показано, все распределения названного семейства безгранично делимы. Кроме того, будет получена удобная формула для вычисления моментов этих распределений.

В рассуждениях будем считать параметры α и β положительными, имея в виду, что переход к противоположным значениям этих параметров соответствует переходу от распределения случайной величины X к распределению величины $-X$.

1. Обозначим $\varphi(t)$ — характеристическую функцию распределения (1) и положим $h(t) = \varphi(-\alpha t)$. Для доказательства безграничной делимости $\varphi(t)$ или, что то же самое, $h(t)$ достаточно получить представление [2, стр. 640]:

$$\ln h(t) = \int \frac{e^{itx} - 1 - it\sin x}{x^2} M(dx) + iat, \tag{3}$$

где a — некоторое вещественное число, а M — каноническая мера на прямой.

Вычисляя $\varphi(t)$, находим

$$\varphi(t) = C \int \exp\{itx + \beta x - Ae^{\alpha x}\}\, dx =$$

$$= C\alpha^{-1} \int_0^\infty u^{\frac{it+\beta}{\alpha} - 1} \exp\{-Au\}\, du.$$

Воспользовавшись известным интегральным представлением для гамма-функции, запишем последнее соотношение в виде

$$\varphi(t) = C\alpha^{-1} A^{-\frac{it+\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{it+\beta}{\alpha}\right). \tag{4}$$

Так как $\varphi(0) = 1$, то из (4), в частности, следует

$$C = \alpha A^{\frac{\beta}{\alpha}} \Big/ \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{5}$$

Поэтому

$$h(t) = A^{it}\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha} - it\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{6}$$

Для $\ln\Gamma(z)$ известно [3, стр. 36] представление

$$\ln\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[(z-1) - \frac{1 - e^{-(z-1)x}}{1 - e^{-x}}\right] \frac{e^{-x}}{x}\, dx \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

согласно которому

$$\ln\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha} - it\right) = \int_0^\infty \frac{e^{itx} - 1 - it\sin x}{x^2} M(dx) + iat + b, \tag{7}$$

где a и b — некоторые вещественные постоянные, причем $b = \ln\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, а M — каноническая мера, определяемая формулами

$$M(dx) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x\exp\left\{-\dfrac{\beta}{\alpha}x\right\}}{1 - \exp\{-x\}}\, dx, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Теперь справедливость формулы (3) немедленно следует из (6) и (7).

2. По-прежнему считаем α и β положительными. Для моментов целого положительного порядка случайной величины X, имеющей плотность (1), можем написать

$$EX^n = C \int x^n \exp\{\beta x - Ae^{\alpha x}\}\, dx =$$
$$= C \frac{d^n}{d\beta^n} \int \exp\{\beta x - Ae^{\alpha x}\}\, dx.$$

Воспользовавшись, как и при вычислении $\varphi(t)$, представлением для гамма-функции, получим

$$EX^n = C\alpha^{-1} \frac{d^n}{d\beta^n} \left\{ A^{-\frac{\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\}. \tag{8}$$

3. Из ранее сказанного ясно, что в общем случае, если отказаться от требования положительности параметров α и β, формулы (5) и (8) дают возможность написать

$$EX^n = \frac{A^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \frac{d^n}{d\beta^n} \left\{ A^{-\frac{\beta}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Каган, Ю. В. Линник, А. Л. Рухин, И. В. Романовский. Self governing family of distributions, Sankhya, Series A, V. 33, 1971.

2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т, 2, Изд-во «Мир», 1967.

3. Г. Бейтмен и А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. I. Физматгиз, 1965.

Поступила 7 апреля 1971 г.