НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ЗАКОНЫ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ

Л. С. Кудина

§ 1. Обозначения. Формулировки результатов

Будем обозначать через a, b, ..., x, y, z, ... точки (векторы) пространства R^n; $|a|$, $|b|$, ... — их длины, через o — начало координат в R^n, а через E — борелевское множество в R^n.

Напомним следующие определения.

Вероятностным законом в R^n называется счетно-аддитивная мера $P = P(E)$, определенная на классе борелевских множеств в R^n и нормированная условием $P(R^n) = 1$. Для кратности мы будем в дальнейшем говорить вместо «вероятностный закон» просто «закон».

Композицией законов P_1 и P_2 называется закон P, определенный равенством

$$P(E) = (P_1 * P_2)(E) = \int_{R^n} P_1(E - x)\, P_2(dx). \qquad (1)$$

Спектром закона P называется множество

$$S(P) = \{x : P(U_\varepsilon(x)) > 0, \ \forall \varepsilon > 0\},$$

где $U_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$. Очевидно, что $S(P)$ — непустое замкнутое множество.

Закон P называется неразложимым, если из представления его в виде $P = P_1 * P_2$ следует, что хотя бы один из законов P_1, P_2 имеет вид ε_a, где ε_a — закон, определенный равенством $\varepsilon_a(E) = 1$, $\forall E \ni a$.

Известно, что для любого замкнутого множества A существует закон P, для которого $S(P) = A$. Возникает вопрос, для любого ли наперед заданного замкнутого множества A существует неразложимый закон P такой, что $S(P) = A$.

П. Леви показал [3], что если A — ограниченное замкнутое множество в R^1, то ответ утвердителен. Кроме того, П. Леви, Д. Дюге и другие авторы [1, гл. 5, § 2] построили ряд примеров неразложимых законов, для которых $S(P)$ является неограниченным множеством в R^1; в частности, совпадает со всей прямой $(-\infty, \infty)$. Однако, насколько нам известно, в полной общности ответ на сформулированный выше вопрос до сих пор не был получен. Мы покажем, что этот ответ утвердителен.

Теорема 1. *Пусть A — любое замкнутое множество в R^n $(n \geqslant 1)$. Существует неразложимый закон P в R^n, для которого $S(P) = A$.*

В одномерном случае эту теорему можно дополнить таким утверждением.

Теорема 2. *Пусть A — любое замкнутое неограниченное множество в R^1, а $1 < \rho \leqslant \infty$ и $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$ — наперед заданные числа. Существует неразложимый закон P в R^1 такой, что $S(P) = A$, характеристическая функция которого является целой функцией порядка ρ и типа σ.*

При доказательстве теоремы 1 будем рассматривать отдельно случаи, когда множество A ограниченное и когда множество A неограниченное.

§ 2. Случай ограниченного множества

В силу результата П. Леви [3], мы можем ограничиться рассмотрением случая $n \geqslant 2$. Напомним некоторые определения и факты.

Множество A называется арифметической суммой множеств B и C, $A = B \dotplus C$, если

$$A = \{x : x = y \dotplus z,\ y \in B,\ z \in C\}.$$

Множество A называется разложимым, если его можно представить в виде арифметической суммы двух множеств, каждое из которых содержит не менее двух точек.

Известно [2], что опорные (гипер) плоскости к замкнутому ограниченному множеству A, ортогональные диаметру множества A, имеют только по одной общей точке с этим множеством. Отсюда легко вытекает справедливость следующей леммы.

***Лемма** 1. Пусть ограниченное замкнутое множество A представимо в виде $A = B \dotplus C$, где B и C замкнутые множества. Тогда B и C имеют только по одной общей точке с опорными к ним плоскостями, ортогональными диаметру множества A.*

Следствие 1. *Если $A = B \dotplus C$, где B и C — замкнутые и имеют не менее двух точек каждое, то множества B и C имеют по две различные опорные плоскости, ортогональные диаметру множества A.*

Следствие 2. *Пусть k и l — точки, общие для разложимого множества A и опорных к нему плоскостей, ортогональных диаметру. Тогда k и l единственным образом представляются в виде*

$$k = m \dotplus s, \quad m \in B, \quad s \in C,$$

$$l = n \dotplus t, \quad n \in B, \quad t \in C, \tag{2}$$

где $m \neq n$, $s \neq t$.

***Лемма** 2. Пусть имеем разложимый закон P с ограниченным спектром $S(P)$. Пусть k и l — точки спектра $S(P)$, общие с опорными к нему плоско-*

стями, ортогональными диаметру множества $S(P)$. Тогда существуют точки d и $f \in S(P)$ (возможно, $d = f$) такие, что $d \neq k$, l и $f \neq k$, l, а

$$P(\{d\})\,P(\{f\}) \geqslant P(\{k\})\,P(\{l\}). \tag{3}$$

Доказательство. Из того, что $P = P_1 * P_2$, как известно [4], следует, что $S(P)$ — разложимое множество и имеет место

$$S(P) = S(P_1) \dotplus S(P_2).$$

Нетрудно убедиться, что из $P = P_1 * P_2$ следует неравенство

$$P(\{x \dotplus y\}) \geqslant P_1(\{x\})\,P_2(\{y\}), \quad \forall x, y \in R^n. \tag{4}$$

Применяя следствие 2 из леммы 1, заключаем также, что

$$\begin{aligned} P(\{k\}) &= P_1(\{m\})\,P_2(\{s\}),\\ P(\{l\}) &= P_1(\{n\})\,P_2(\{t\}), \end{aligned} \tag{5}$$

где m, n, s, t взяты из (2).

Положив в (4) $x = m$, $y = t$, а затем $x = n$, $y = s$, получим неравенства

$$\begin{aligned} P(\{m \dotplus t\}) &\geqslant P_1(\{m\})\,P_2(\{t\}),\\ P(\{n \dotplus s\}) &\geqslant P_1(\{n\})\,P_2(\{s\}). \end{aligned}$$

Перемножив эти неравенства и учитывая (5), имеем

$$P(\{m \dotplus t\})\,P(\{n \dotplus s\}) \geqslant P(\{k\})\,P(\{l\}),$$

откуда и следует неравенство (3) с $d = m \dotplus t$, $f = n \dotplus s$.

Докажем теперь теорему 1 для случая ограниченного множества A, используя идею, примененную в одномерном случае П. Леви [3]. Рассмотрим закон

$$P(E) = (1 - \varepsilon)\,G(E) \dotplus \varepsilon H(E),$$

где $0 < \varepsilon < 1/3$, $H(E)$ — любой закон, для которого $S(H) = A$, а $G(E)$ — закон определенный равенством:

$$G(\{k\}) = G(\{l\}) = \frac{1}{2}$$

(k и l — точки, общие для множества A и опорными к нему плоскостями, ортогональными к диаметру). Очевидно, что $S(P) = A$.

Предположим, что закон P — разложимый, и применим к нему лемму 2. Так как

$$P(\{k\}) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2}, \quad P(\{l\}) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2},$$

$$P(E) \leqslant \varepsilon \text{ при } E \cap \{k, l\} = \varnothing,$$

то получим неравенство

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

которое невозможно при $0 < \varepsilon < 1/3$. Следовательно, закон P — неразложимый.

§ 3. Случай неограниченного множества

Не уменьшая общности, можно считать, что $0 \in A$. Возьмем последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset A$ такую, что $x_0 = 0$, $|x_k| \geqslant 2\,|x_{k-1}|$. Положим

$$c_k = 10^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\delta_k = (k \dotplus 3)^{-k-3}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_k \dotplus \delta_{k-1}) < \frac{1}{6}.$$

Обозначим через S_k множество

$$S_k = \{x : |x_k| < |x| \leqslant |x_{k+1}|\},\ k = 0,\ 1,\ \ldots .$$

Лемма 3. *Существует закон* P, *удовлетворяющий условиям:*
1) $S(P) = A$,
2) $P(\{x_k\}) = c_k$,
3) $P(S_k \setminus \{x_{k+1}\}) \leqslant \delta_k$,
4) *для любого* $x = 0$ *выполняется*

$$P(\{x\}) \leqslant (P(\{0\}))^2. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через P_k, $k = 0,\ 1,\ \ldots$, законы, для которых $S(P_k) = \overline{S}_k \cap A$. Положим

$$F_k = P_k - P_k(\{x_k\})\,\varepsilon_{x_k} - P_k(\{x_{k+1}\})\,\varepsilon_{x_{k+1}}.$$

Искомый закон можно задать формулой

$$P = \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\,\delta_k F_k \dotplus c_k \varepsilon_{x_k}\right\}, \tag{8}$$

где постоянная c_0 выбирается таким образом, чтобы выражение (8) было законом, т. е. чтобы $P(R^n) = 1$. В самом деле, то, что верны утверждения 1—3, очевидно. Для того чтобы получить 4, достаточно заметить, что $c_0 = P(\{0\})$, и поэтому из (6) следует, что $c_0 > 5/6$.

Пусть P — закон, существование которого обеспечено леммой 3. Покажем, что этот закон неразложимый. Предположим противное, тогда по определению разложимого закона имеет место представление

$$P = P_1 * P_2,$$

где P_1 и P_2 — законы, отличные от законов вида ε_a.

Из (1) следуют такие неравенства

$$P(\{x \dotplus y\}) \geqslant P_1(\{x\})\,P_2(\{y\}), \tag{9}$$

$$P(E \dotplus \{x\}) \geqslant P_1(E)\,P_2(\{x\}), \tag{10}$$

$$P(E \dotplus \{x\}) \geqslant P_1(\{x\})\,P_2(E), \tag{11}$$

где x, y — любые точки, а E — любое борелевское множество из R^n. Из (1) также вытекает, что

$$\max_{x \in R^n} P(\{x\}) \leqslant \max_{x \in R^n} P_j(\{x\}),\ j = 1,\ 2.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $\max P_1(\{x\})$ достигается при $x = 0$. (Этого можно добиться, заменяя P_1 на $P_1 * \varepsilon_{-c}$, P_2 — на $P_2 * \varepsilon_c$, где c — точка, в которой достигается $\max\limits_{x \in R^n} P_1(\{x\})$) Следовательно, имеем $P_1(\{0\}) \geqslant c_0$. Из (7) и (9) тогда следует, что $\max\limits_{x \in R^n} P_2(\{x\})$ достигается тоже при $x = 0$, поэтому $P_2(\{0\}) \geqslant c_0$.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Для всех достаточно больших k имеет место неравенство*

$$\frac{1}{2} c_k \leqslant P_1(\{x_k\}) + P_2(\{x_k\}).$$

Доказательство. Имеем

$$c_k = P(\{x_k\}) = \int\limits_{R^n} P_1(\{x_k - x\})\, P_2(dx) =$$

$$= \int\limits_{|x| \leqslant |x_k|} P_1(\{x_k - x\})\, P_2(dx) + \int\limits_{|x_k| < |x| < \infty} P_1(\{x_k - x\})\, P_2(dx) = I_1 + I_2.$$

Оценим интегралы I_1 и I_2.

$$I_1 = \int\limits_{|x| \leqslant |x_k|} = \int\limits_{\{0\}} + \int\limits_{0 < |x| \leqslant |x_{k-1}|} + \int\limits_{|x_{k-1}| < |x| < |x_k|} + \int\limits_{|x| = |x_k|} \leqslant$$

$$\leqslant P_1(\{x_k\}) + P_1(\{y : 0 < |y - x_k| \leqslant |x_{k-1}|\}) +$$

$$+ P_2(S_{k-1} \setminus \{x_k\}) + [P_2(S_{k-1} \setminus \{x_k\}) + P_2(\{x_k\})].$$

Учитывая, что $|x_k| > 2|x_{k-1}|$, получим

$$P_1(\{y : 0 < |y - x_k| \leqslant |x_{k-1}|\}) \leqslant P_1([S_{k-1} \setminus \{x_k\}] \cup [S_k \setminus \{x_{k+1}\}]).$$

Применяя неравенства (10) и (11) при $x = 0$, получим

$$I_1 \leqslant P_1(\{x_k\}) + \frac{1}{c_0} P([S_{k-1} \setminus \{x_k\}] \cup [S_k \setminus \{x_{k+1}\}]) +$$

$$+ \frac{2}{c_0} P(S_{k-1} \setminus \{x_k\}) + P_2(\{x_k\}) \leqslant$$

$$\leqslant P_1(\{x_k\}) + 3\delta_{k-1}/c_0 + \delta_k/c_0 + P_2(\{x_k\}).$$

Далее имеем

$$I_2 = \sum_{l=k}^{\infty} \int\limits_{S_l} P_1(\{x_k - x\})\, P_2(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=k}^{\infty} P_1(\{y : |x_l| < |y - x_l| \leqslant |x_{l+1}|\})\, P_2(S_l) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{k \leqslant l} P_2(S_l) \leqslant \frac{1}{c_0} \sup_{k \leqslant l} P(S_l) \leqslant \frac{1}{c_0} \sup_{k \leqslant l} (c_{l+1} + \delta_l).$$

Поскольку последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывающие, то

$$I_2 \leqslant \frac{1}{c_0}(c_{k+1} + \delta_k) = c_k/(10 c_0) + \delta_k/c_0.$$

Учитывая оценки для I_1 и I_2, приходим к неравенству

$$c_k \leqslant P_1(\{x_k\}) + P_2(\{x_k\}) + c_k/(10 c_0) + 3\delta_{k-1}/c_0 + 2\delta_k/c_0.$$

Отсюда следует утверждение леммы 4.

Вернемся к доказательству неразложимости закона (8).

Из леммы 4 вытекает, что для некоторой бесконечной подпоследовательности из $\{x_k\}$ и хотя бы для одного из значений $j = 1, 2$ выполняется

$$P_j(\{x_k\}) \geqslant \frac{1}{4} c_k.$$

Для определенности будем считать, что это имеет место при $j = 1$; соответствующую подпоследовательность из $\{x_k\}$ будем снова обозначать через $\{x_k\}$.

Так как закон P_2 не совпадает ни с каким законом вида ε_a, то множество $S(P_2)$ содержит, кроме точки 0, еще по меньшей мере одну точку $b \neq 0$. Возьмем N_1 настолько большим, чтобы для всех $N > N_1$ выполнялось

$$|x_N| + 2|b| < |x_{N+1}|.$$

Имеем $(0 < \varepsilon < |b|)$

$$\delta_{N-1} > P(U_\varepsilon(b) + \{x_N\}) \geqslant$$
$$\geqslant P_1(\{x_N\}) P_2(U_\varepsilon(b)) \geqslant \frac{1}{4} c_N P_2(U_\varepsilon(b)).$$

Вспоминая, что $\delta_{N-1} = (N+2)^{-N-2}$, имеем

$$(N+2)^{-N-2} > \frac{1}{4} 10^{-N} P_2(U_\varepsilon(b)), \quad N > N_1. \tag{12}$$

Неравенство (12) невозможно при достаточно большом N, так как при фиксированном ε величина $P_2(U_\varepsilon(b))$ есть положительная постоянная, не зависящая от N. Полученное противоречие доказывает неразложимость закона (8).

§ 4. Доказательство теоремы 2

Мы ограничимся доказательством теоремы при $1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$, так как случаи $\rho = \infty$, $\sigma = 0$, $\sigma = \infty$ рассматриваются с помощью близких рассуждений.

Положим

$$\alpha = \frac{\rho}{\rho - 1}, \quad \beta = \frac{\rho - 1}{\rho} (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho - 1}}. \tag{13}$$

Будем считать, что $0 \in A$ и построим последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset A$ такую, что

$$x_0 = 0, \quad |x_1| > (2/\beta)^{1/\alpha}, \quad |x_n| > 2|x_{n-1}|.$$

Введем величины

$$c_k = \exp\{-\beta |x_k|^\alpha\} - \exp\{-\beta |x_{k+1}|^\alpha\}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$\delta_k = c_{k+1} \exp\{-\beta |x_{k+1}|^\alpha\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим закон (F_k выбираются, как в § 3, $c_0 = P(\{0\})$)

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \delta_k F_k + c_k \varepsilon_{x_k}\right]. \tag{14}$$

Рассуждая, как в § 3, заключаем, что P — неразложимый закон.

Покажем, что характеристическая функция $\varphi(t; P)$ закона (14) имеет порядок ρ и тип σ. Для этого нам понадобится теорема Рамачандрана [5], дающая критерий того, что характеристическая функция закона является целой функцией и имеет порядок $1 < \rho \leqslant \infty$ и тип $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$. Чтобы сформулировать эту теорему для произвольного закона P, введем величину

$$W(x) = 1 - P([-x, x))$$

и положим

$$\varkappa = \varlimsup_{x \to \infty} (\ln x)^{-1} \ln^+ \ln^+ (1/W(x)),$$

$$\lambda = \varlimsup_{x \to \infty} x^{-\varkappa} \ln^+ (1/W(x)).$$

Теорема (Рамачандран [5]). *Для того чтобы характеристическая функция закона P была целой функцией порядка* $1 < \rho \leqslant \infty$ *и типа* $0 \leqslant \sigma \leqslant \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\varkappa} = 1, \quad \lambda = \frac{\rho}{\rho - 1} (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Чтобы применить эту теорему к построенному закону (14), нужно для него найти величины $\varkappa$, λ. Заметим, что для закона (14) имеют место очевидные соотношения

$$W(x_k) = (1 + 0(1)) \exp\{-\beta |x_k|^\alpha\},$$
$$(1/W(x_k)) - 2c_k < 1/W(x) \leqslant 1/W(x_k) \quad (|x_{k-1}| < |x| \leqslant |x_k|).$$

Отсюда легко следует, что для него справедливо

$$\varkappa = \alpha, \quad \lambda = \beta.$$

Вспоминая (13), заключаем, что характеристическая функция закона (14) имеет порядок ρ и тип σ.

Приношу благодарность И. В. Островскому за постановку задачи и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Л., Изд-во ЛГУ, 1960.
2. Л. А. Люстерник. Выпуклые фигуры и многогранники. Техтеоретиздат, 1956.
3. P. Lévy. L'arithmetique des lois de probabilité. J. math. pures et appl., 17 (1938), 17—40.
4. A. Wintner. On the addition of independent distributions. Amer. J. of Math., 56 (1934), 8—16.
5. B. Ramachandran. On the order and type of entire characteristic functions. Ann. Math. Stat., 33 (1962). 1238—1255.

Поступила 16 июня 1971 г.