О РАЗЛОЖЕНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В. И. Мацаев

Рассматривается вопрос о разложении целой функции по собственным и присоединенным функциям некоторой обобщенной краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора, коэффициенты которого являются целыми функциями. Результаты этой работы содержатся в диссертации автора [1], но до сих пор не были опубликованы.

Чтобы разъяснить постановку вопроса, рассмотрим простой пример: оператор $Ly = iy'$ с краевым условием $y(0) = y(2\pi)$. Хорошо известно, что для разложимости аналитической функции $y(z)$ в ряд по собственным значениям этой задачи в некоторой области комплексной плоскости, содержащей сегмент $[0, 2\pi]$, нужна периодичность $y(z)$. Условие периодичности функции $y(z)$ может быть записано в виде $L^k y(0) = L^k y(2\pi)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Это простое соображение приводит к обобщенной постановке краевой задачи для одномерного оператора с аналитическими коэффициентами. Будет обнаружена связь такой постановки краевой задачи с теорией дифференциальных уравнений бесконечного порядка, а именно, мы получим из нашей теоремы как частный случай теорему А. О. Гельфонда о разложении целого решения дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами по его экспоненциальным решениям. В заключение остановимся на связи излагаемых результатов с теорией периодических в среднем функций.

Интересно отметить, что наша теорема не требует от оператора свойств, которыми он обычно должен обладать для того, чтобы существовало разложение для функций вещественного переменного (самосопряженность оператора, регулярность краевых условий и т. д.). Это объясняется тем, что разлагаемые функции являются аналитическими относительно оператора. Эту операторную аналитичность мы получаем с помощью найденного Л. А. Сахновичем оператора преобразования для уравнения с аналитическими коэффициентами.

§ 1. Функция Грина дифференциального оператора

Рассмотрим одномерный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$Ly = y^{(n)} + p_1(z)\, y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(z)\, y$$

(если $n = 1$, то $Ly = y'$), коэффициенты которого являются целыми функциями z.

Пусть $\{y_k(z, z_0, \lambda)\}_{k=0}^{n-1}$ — нормальная система решений уравнения $Ly = \lambda^n y$:

$$\frac{d^i}{dz^i} y_k(z, z_0, \lambda)\Big|_{z=z_0} = \delta_{ik} \quad (k, i = 0, 1, \ldots\ n-1).$$

Возьмем n функций $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{n}$, аналитических вне некоторого компакта, от которых потребуем, чтобы

$$\Delta(\lambda, z_0) = \det \| \varphi_j(y_{k-1}) \|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0,$$

где

$$\varphi_j(y_k) = \int\limits_C \varphi_j(z)\, y_k(z, z_0, \lambda)\, dz, \tag{1.1}$$

а C — спрямляемый контур, охватывающий компакт, вне которого аналитичны функции φ_j.

Легко видеть, что при $n > 1$ на самом деле $\Delta(\lambda, z_0)$ от z_0 не зависит. Если же $n = 1$, то

$$e^{\lambda z_0} \Delta(\lambda, z_0) = e^{\lambda z_0'} \Delta(\lambda, z_0'). \tag{1.2}$$

На множестве $D_{\tilde{L}}$ целых функций $f(z)$, таких что

$$\int\limits_C \varphi_j(\xi)\, f(\xi)\, d\xi = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

определим оператор $\widetilde{L}$, полагая $\widetilde{L}f = Lf$. Через L^* будем обозначать сопряженное к L дифференциальное выражение.

Построим резольвенту оператора $\widetilde{L}$. Если $\Delta(\lambda_0, z_0) \neq 0$, то уравнение

$$(\widetilde{L} - \lambda_0^n I) f = g$$

разрешимо и притом однозначно. Действительно, пусть $F(z)$ — какое-нибудь решение уравнения $LF(z) - \lambda_0^n F(z) = g(z)$. В силу того что $\Delta(\lambda_0, z_0) \neq 0$, найдутся константы C_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), такие что

$$F(z) + \sum_{k=0}^{n-1} C_k y_k(z, \lambda_0) \in D_{\widetilde{L}}.$$

Однозначность очевидна.

Для отыскания интегрального представления резольвенты $(\widetilde{L} - \lambda I)^{-1}$ рассмотрим уравнение

$$(L^* - \lambda^n I)_\xi \psi(\xi, z, \lambda) = \psi_1(\xi, z, \lambda), \tag{1,3}$$

где

$$\psi_1(\xi, z, \lambda) = \frac{1}{\xi - z} - \frac{2\pi i}{\Delta(\lambda, z)} \sum_{j=1} F_j(\lambda, z) \varphi_j(\xi),$$

а $F_j(\lambda, z)$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца $\Delta(\lambda, z)$. Легко проверить, что

$$\int_C \psi_1(\xi, z, \lambda) y_k(\xi, z)\, d\xi = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

для любого замкнутого контура C, охватывающего все особенности функций $\varphi_j(\xi)$ и точку z. Одно из решений уравнения $L_\xi^* y = \lambda^n y$ дается интегралом

$$\int_{z_0}^{\xi} y_{n-1}^*(\xi, \zeta, \lambda) \psi_1(\zeta, z, \lambda)\, d\zeta,$$

где $y_{n-1}^*(\xi, \zeta, \lambda)$ — решение уравнения $L_\xi^* y = \lambda^n y$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\frac{d^k}{d\xi^k} y_{n-1}^*(\xi, z, \lambda)\right|_{\xi = z} = \delta_{k, n-1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Покажем, что $\psi(\xi, z, \lambda)$ голоморфна по ξ вне любого контура Γ, внутри которого заключены все особенности функций $\varphi_j(\xi)$ и точка z. Можем считать, что z_0 лежит вне Γ. Во внешности кривой Γ проведем прямолинейный разрез J от какой-нибудь ее точки через z_0 до бесконечности. В получившейся области D функция $\psi(\xi, z, \lambda)$ голоморфна по ξ. Возьмем какую-нибудь точку ξ_1 на J и покажем, что предельные значения $\psi(\xi, z, \lambda)$ в точке ξ_1 совпадают. Действительно, $y_{n-1}^*(\xi, z, \lambda)$ по z есть решение уравнения $L_z y = \lambda^n y$. Поэтому

$$y_{n-1}^*(\xi, \zeta, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\xi, \lambda) y_k(\zeta, z, \lambda),$$

где функции $\alpha_k(\xi, \lambda)$ голоморфны по ξ в D. Из (1.4) получаем

$$\int_{C_1} \psi_1(\zeta, z, \lambda) y_{n-1}^*(\xi, \zeta, \lambda)\, d\zeta = 0$$

для любого контура C_1, который охватывает Γ и проходит через ξ_1. Следовательно, предельные значения ψ в точке ξ_1 совпадают. Так как ξ_1 произвольна, то разрез J можно убрать и функция $\psi(\xi, z, \lambda)$ голоморфна по ξ при ξ вне Γ.

Пусть $g(\zeta)$ — целая функция. По доказанному выше, существует решение уравнения $(\tilde{L} - \lambda^n I) f = g$ $(f \in D_{\tilde{L}})$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\zeta)\, \psi_1(\zeta, z, \lambda)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} f(\xi)\,(L^* - \lambda^n I)_\zeta\, \psi(\zeta, z, \lambda)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} (L - \lambda^n I)\, f(\zeta)\, \psi(\zeta, z, \lambda)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} g(\zeta)\, \psi(\zeta, z, \lambda)\, d\zeta,$$

где C_1 — произвольный контур, охватывающий особенности функций $\varphi_j(\zeta)$ и точку z.

Таким образом, функция $\psi(\zeta, z, \lambda)$ является интегральным ядром резольвенты и выполняет роль функции Грина.

Лемма. *Пусть $f(z)$ голоморфна в круге $|z - z_0| < r$. Тогда*

$$|L^k f(z)|_{z=z_0} \leqslant C(r, z_0)\, M_f(r, z_0)\, \frac{(nk)!}{r^{nk}},$$

где $M_f(r, z_0) = \max\limits_{|z-z_0|\leqslant r} |f(z)|$, а $C(r, z_0)$ — константа, не зависящая от f.

Доказательство. Мы воспользуемся тем, что, как показал Л. А. Сахнович [2], для операции L с целыми коэффициентами существует вольтеров оператор преобразования K:

$$Kf(z) = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} f(z_0 + \varepsilon^p (z - z_0)) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n-1} \int\limits_{z_0}^{z_0+\varepsilon^p (z-z_0)} K_p(z, \zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}\right),$$

$$KLK^{-1}y = D^n y, \text{ где } Dy = y'.$$

Ядра $K_p(z, \zeta)$ — целые функции переменных z, ζ.

В силу неравенства Коши для производных

$$|K^k f|_{z=z_0} = |(K^{-1}D^{nk}Kf)(z_0)| \leqslant C\, \frac{M_f(r)\,(nk)!}{r^{nk}}.$$

Лемма доказана.

§ 2. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора в комплексной области

Теперь мы можем доказать основную теорему:

Теорема. *Для рассматриваемого оператора $\tilde{L}$ существует последовательность чисел R_k, растущая медленнее некоторой геометрической прогрессии и такая, что если целая функция $f \in D_{\tilde{L}^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, т. е.*

$$\int_C (L^k f)(\zeta)\,\varphi_j(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

то имеет место разложение

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{R_{k-1} < |\lambda_j| < R_k} C_j y(z, \lambda_j), \tag{2.1}$$

где $y(z, \lambda_j)$ — *система собственных и присоединенных функций уравнения* $\widetilde{L}y = \lambda^n y$. *Ряд в* (2.1) *сходится равномерно на каждом компакте комплексной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} (\lambda I - \widetilde{L})^{-1} f(z)\,d\lambda$$

и предположим, что на окружности $|\lambda| = R$ нет полюсов подынтегрального выражения. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} (\lambda I - \widetilde{L})^{-1} f(z)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\widetilde{L}^k f(z)}{\lambda^{k+1}} + \right.$$

$$\left. + (\lambda I - \widetilde{L})^{-1} \frac{\widetilde{L}^m f(z)}{\lambda^m}\right] d\lambda = f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=R} \frac{(\lambda I - \widetilde{L})^{-1}\, \widetilde{L}^m f(z)}{\lambda^m}\,d\lambda. \tag{2.2}$$

Пусть

$$F_\lambda(z, \zeta, f) = \int_z^\zeta y_{n-1}(\zeta, \xi, \lambda)\, f(\xi)\,d\xi.$$

Тогда

$$(\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)\,\psi(\zeta, z, \lambda)\,d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (L - \lambda^n I)_\xi F_\lambda(z, \zeta, f)\,\psi(\zeta, z, \lambda)\,d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_\lambda(z, \zeta, f)\,(L^* - \lambda^n I)_\zeta\, \psi(\zeta, z, \lambda)\,d\zeta = \tag{2.3}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F_\lambda(z, \zeta, f) \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{2\pi i}{\Delta(z, \lambda)} \sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda, z)\,\varphi_j(\zeta)\right] d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\Delta(z, \lambda)} \sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda, z) \int_\Gamma F_\lambda(z, \zeta, f)\,\varphi_j(\zeta)\,d\zeta = \frac{\Delta_1(z, \lambda, f)}{\Delta(z, \lambda)},$$

где

$$\Delta_1(z, \lambda, f) = \sum_{j=1}^{n} F_j(\lambda, z) \int_\Gamma F_\lambda(z, \zeta, f)\,\varphi_j(\zeta)\,d\zeta;$$

Γ — контур, охватывающий особенности функции $\varphi_j(\zeta)$ и точку z. Формула (2.3) представляет резольвенту оператора (точнее, вектор-функцию $(\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} f)$ в виде отношения двух целых функций.

Пусть D — фиксированный компакт комплексной плоскости, содержащий множество особенностей функций $\varphi_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, D_r — окрестность D.

По лемме § 1 при любом $r > 0$ выполняется неравенство

$$|\widetilde{L}^m f(z)| \leqslant C_2 \frac{(nm)!}{r^{nm}} \quad (z \in D_1,\ m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.4}$$

где константа C_2 не зависит от $z \in D_1$ и m. Используя выражение (2.3) для оператора $(\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} \widetilde{L}^m f(z)$, оценим теперь $|(\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} \widetilde{L}^m f(z)|$ при $z \in D$. Выберем в (2.3) контур интегрирования Γ, охватывающий D и содержащийся в D_1. Очевидно, что $\Delta_1(z, \lambda, f)$ — целая функция от λ конечной степени, причем ее тип равномерно ограничен, когда $z \in D$. Так как $\Delta(z, \lambda)$ — целая функция от λ конечной степени, не зависящая от z при $n > 1$ и преобразующаяся по формуле (1.2), если $n = 1$, то найдется последовательность R_k, растущая не быстрее некоторой геометрической прогрессии и такая, что

$$\left| \frac{\Delta_1(z, \lambda, f)}{\Delta(z, \lambda)} \right| \leqslant C_1 \sup_{z \in D_1} |f(z)|\, e^{CR_k} \tag{2.5}$$

при $|\lambda| = R_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ и $z \in D$, где константы C и C_1 не зависят от z, R_k и f. Согласно (2.3)

$$(\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} L^m f(z) = \frac{\Delta_1(z, \lambda, L^m f)}{\Delta(z, \lambda)}.$$

Поэтому из (2.4) и (2.5) следует, что

$$|(\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} L^m f(z)| \leqslant C_3 \frac{(nm)!}{r^{nm}} e^{CR_k}$$

при $z \in D$, $|\lambda| = R_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ и произвольном $r > 0$. Константа C здесь не зависит от $z \in D$, R_k, f, m, r, а C_1 от z, R_k, m.

Пусть $m_k = \left[\dfrac{rR_k}{n}\right]$. Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = R_k^n} (\lambda I - \widetilde{L})^{-1} \frac{L^{m_k} f(z)}{\lambda^{m_k}} d\lambda \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = R_k} (\lambda^n I - \widetilde{L})^{-1} \frac{\widetilde{L}^{m_k} f(z)}{\lambda^{m_k n}} \lambda^{n-1} d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \frac{R_k^n}{R_k^{rR_k - n}} e^{CR_k} \frac{(rR_k)^{rR_k + \frac{1}{2}}}{e^{rR_k - n} r^{rR_k - n}} = C_4 e^{CR_k} e^{-rR_k} R_k^n (R_k r)^{n + \frac{1}{2}}.$$

Из этой оценки следует, что если выбрать $r > C$, то при $m_k = \left[\dfrac{rR_k}{n}\right]$

$$\left| \int\limits_{|\lambda| = R_k^n} (\lambda I - \widetilde{L})^{-1} \frac{\widetilde{L}^{m_k} f(z)}{\lambda^{m_k}} d\lambda \right| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = R_k^n} (\lambda I - \widetilde{L})^{-1} f(z)\, d\lambda \to f(z) \quad (k \to \infty)$$

равномерно при $z \in D$.

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=R_k^n}(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f(z)\,d\lambda=\sum_{|\lambda_m|<R^n}\operatorname{Res}(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f\Big|_{\lambda_m}.$$

Пусть при $\lambda=\lambda_m$ функция $\Delta\left(\lambda^{\frac{1}{n}},z\right)$ имеет корень кратности p_m. Тогда в этой точке функция $(\lambda I-L)^{-1}f$ имеет полюс порядка не выше p_m и

$$(\tilde{L}-\lambda_m I)^{p_m}[\operatorname{Res}(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f]=(\tilde{L}-\lambda_m I)^{p_m}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_m|<\delta}(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f\,d\lambda\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_m|<\delta}[(\tilde{L}-\lambda I)+(\lambda-\lambda_m)I]^{p_m}(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f\,d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_m|<\delta}\sum_{k=1}^{p_m}C_{p_m}^k(\lambda-\lambda_m)^{p_m-k}(\tilde{L}-\lambda I)^{k-1}f(z)\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda_m|<\delta}(\lambda-\lambda_m)^{p_m}(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f(z)\,d\lambda=0.$$

Поэтому вычет функции $(\lambda I-\tilde{L})^{-1}f(z)$ в точке $\lambda=\lambda_m$ есть линейная комбинация собственных и присоединенных функций $y(z,\lambda_m)$ оператора $\tilde{L}$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что в качестве последовательности R_k годится любая последовательность, для которой при некоторых константах C, C_1 выполняется неравенство

$$|\Delta(\lambda,z_0)|>C_1e^{-CR_k}\quad(|\lambda|\,R_k,\ k=1,2,3,\ldots).$$

Из доказанной теоремы получается одна теорема А. О. Гельфонда [3, глава V, § 7].

А. О. Гельфонд рассматривал дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$L[F]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}F^{(n)}(z)=0,$$

где $\Phi(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n$ — целая функция конечной степени. Это уравнение имеет решения вида $z^{j+1}e^{\lambda_k z}$, где λ_k — корень $\Phi(\lambda)$ кратности $j+1$. Обозначив

$$\varphi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^{n+1}},$$

имеем

$$L[F]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}},$$

где контур Γ_1 охватывает все особенности функции $\varphi(\zeta)$ и точку z.

Если $L[F] = 0$, то выполняются равенства

$$\int_{\Gamma_1} F^{(n)}(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = 0. \qquad (2.6)$$

Поэтому согласно нашей теореме функция $F(\zeta)$ может быть разложена по собственным и присоединенным функциям уравнения $y' = \lambda y$, ортогональным функции φ. Но эти решения как раз имеют вид $z^{j+1}e^{\lambda z}$, где $\Phi(\lambda) = 0$, причем λ — корень $\Phi(\lambda)$ кратности $\geqslant j+1$.

Таким образом, справедливо разложение

$$F(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{R_l < |\lambda_k| < R_{l+1}} c_{jk} z^{j+1} e^{\lambda z}, \qquad (2.7)$$

что и составляет утверждение теоремы А. О. Гельфонда.

Перейдем теперь к проблеме синтеза целых периодических в среднем (ц. п. в. с.) функций. По определению Л. Шварца [4], так называется целая функция $f(z)$, для которой существует такой нетривиальный аналитический функционал Φ, что при всех z

$$\Phi[f(u+z)] = 0. \qquad (2.8)$$

Обозначим через T_f линейное пространство целых функций, каждая из которых есть предел (в смысле равномерной сходимости на любом компакте) последовательности линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^{n} C_{in} f(z+u_i)$. Л. Шварцу принадлежит теорема: всякую ц. п. в. с. функцию можно равномерно приблизить на каждом компакте конечными линейными комбинациями экспоненциальных полиномов, содержащихся в T_f. Впоследствии Д. Г. Диксон ([5], см. также [6]) доказал, что формальное разложение ц. п. в. с. функции в ряд по экспоненциальным многочленам, входящим в T_f, сходится к этой функции равномерно на каждом компакте. Покажем, что теорему Диксона можно получить в рамках изложенной выше общей теории дифференциальных операторов[1].

Действительно, из (2.8) следует, что ц. п. в. с. функция удовлетворяет равенствам (2.6), в которых $\varphi(\zeta)$ — преобразование Бореля характеристической функции $\Phi[e^{uz}]$. Поэтому, как и в задаче А. О. Гельфонда, ц. п. в. с. разлагается в ряд по корневым функциям краевой задачи

$$y' = \lambda y,$$
$$\int_{\Gamma_1} y(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta = 0, \qquad (2.9)$$

т. е. в ряд вида (2.7). Нам остается лишь проверить, что каждый член этого ряда входит в пространство T_f.

Резольвенту задачи (2.9) можно представить в виде

$$(R_\lambda \psi)(z) = \varphi^{-1}(\lambda)\,\Phi\left[\int_z^u e^{\lambda v}\psi(u+z-v)\,dv\right].$$

В силу (2.8)

$$\Phi\left[\int_0^z e^{\lambda v} f(u+z-v)\,dv\right] = 0.$$

[1] На эту возможность обратил наше внимание В. А. Ткаченко.

Поэтому

$$(R_\lambda f)(z) = \varphi^{-1}(\lambda)\, \Phi\left[\int_0^u e^{\lambda v} f(u \dotplus z - v)\, dv.\right.$$

Если положить

$$E_k(v) = \operatorname{Res} \frac{e^{\lambda v}}{\varphi(\lambda)}\bigg|_{\lambda_k}; \quad l_k(z) = \operatorname{Res}\,(R_\lambda f)(z)\,|_{\lambda_k},$$

получим

$$l_k(z) = \Phi\left[\int_0^u E_k(v)\, f(u \dotplus z - v)\, dv\right] = \Phi\left[\int_0^u E_k(u - v)\, f(v \dotplus z)\, dv\right].$$

Таким образом, $l_k(z) \in T_f$, откуда следует теорема Диксона.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Мацаев. Теоремы единственности, полноты и компактности, связанные с классической квазианалитичностью. Канд. дисс. Харьков, 1964.
2. Л. А. Сахнович. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 1$ с аналитическими коэффициентами. Матем. сб. т. 46:1. 1958.
3. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М., Физматиздат, 1959.
4. L. Schwartz. Theorie generale des fonctions moyenne — periodiques. Ann. of Math., 48 (1947).
5. D. G. Dickson. Analytic mean periodic functions. Trans. Amer. math. soc., v. 110, № 2 (1964).
6. А. Ф. Леонтьев. О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле. Матем. сб. т. 70, 1966.

Поступила 8 мая 1971 г.