УСТОЙЧИВОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ (I)

Т. И. Рябушко

Мы будем рассматривать операторы Штурма—Лиувилля

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

заданные на отрезке $(0, \pi)$. Функции $q(x)$ предполагаются вещественными и дифференцируемыми на отрезке $(0, \pi)$.

Обозначим через K_1 и $Л_1$ граничные задачи, порождаемые уравнением

$$l_1 y = -\frac{d^2 y}{dx^2} + q_1(x)\, y = \lambda^2 y$$

и краевыми условиями

$$y'(0)=0, \quad y(\pi)=0, \tag{К}$$

$$y'(0)=0, \quad y'(\pi)=0. \tag{Л}$$

Пусть $\{\lambda^2_{1,\,m}\}$ и $\{\mu^2_{1,\,m}\}$ — собственные значения этих краевых задач*. Как известно [1], по этим двум спектрам оператор может быть восстановлен однозначно. Метод восстановления оператора изложен в работе Б. М. Левитана, М. Г. Гасымова [2].

Изучим вопрос о том, с какой точностью может быть восстановлен оператор Штурма—Лиувилля, если известны только первые $N+1$ собственных значений этих краевых задач. Для этого необходимо, очевидно, выяснить, насколько сильно могут отличаться друг от друга два оператора Штурма—Лиувилля, у которых первые $N+1$ собственных значений краевых задач K и $Л$ совпадают.

Аналогичный вопрос был рассмотрен в работе В. А. Марченко, К. В. Маслова [3], где предполагалось, что совпадают спектральные функции рассматриваемых краевых задач на заданном конечном интервале. Для того чтобы воспользоваться результатами этой работы, нам нужно прежде всего оценить разность спектральных функций в предположении, что первые $N+1$ собственных значений краевых задач K и $Л$ совпадают.

Спектральная функция $\rho_1(\mu)$ краевой задачи K_1 равна

$$\rho_1(\mu)=\sum_{\lambda^2_{1,\,k}<\mu}\frac{1}{\alpha_{1,\,k}},$$

где $\lambda^2_{1,\,k}$ — собственные значения краевой задачи;

$$\alpha_{1,\,k}=\int\limits_0^\pi \omega^2(\lambda_{1,\,k},\ x)\,dx;$$

$\omega(\lambda,\ x)$ — решение уравнения

$$-\omega''(\lambda,\ x)+q(x)\,\omega(\lambda,\ x)=\lambda^2\omega(\lambda,\ x)$$

при начальных данных $\omega(\lambda,\ 0)=1$, $\omega'(\lambda,\ 0)=0$.

Как известно, коэффициенты $\alpha_{1,\,k}$ выражаются через собственные значения $\{\lambda^2_{1,\,m}\}$, $\{\mu^2_{1,\,m}\}$ по формуле

$$\alpha_{1,\,k}=\frac{4\pi(\lambda^2_{1,\,k}-\mu^2_{1,\,k})}{k^2\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2}\prod_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{(\mu^2_{1,\,n}-\mu^2_{1,\,k})(\lambda^2_{1,\,n}-\mu^2_{1,\,k})}{n^2\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2},$$

где штрих означает, что пропущен множитель с $n=k$.

Пусть $\{\lambda^2_{2,\,m}\}$, $\{\mu^2_{2,\,m}\}$ — собственные значения краевых задач K_2 и $Л_2$, порождаемых оператором

$$l_2=-\frac{d^2}{dx^2}+q_2(x),$$

а $\rho_2(\mu)$ — спектральная функция краевой задачи K_2 для этого оператора.

Тогда

$$\rho_2(\mu)=\sum_{\lambda^2_{2,\,k}<\mu}\frac{1}{\alpha_{2,\,k}},$$

* В дальнейшем для простоты будем предполагать, что все собственные значения рассматриваемой краевой задачи неотрицательны.

$$\alpha_{2,k} = \frac{4\pi(\lambda_{2,k}^2 - \mu_{2,k}^2)}{k^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} \prod_{n=1}^{\infty}{}' \frac{(\mu_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2)(\lambda_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2)}{n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Если первые $N+1$ собственных значений рассматриваемых краевых задач для операторов l_1 и l_2 совпадают, то при $\mu < \lambda_{N+2}^2$

$$\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu) = \sum_{\lambda_k^2 < \mu} \left(\frac{1}{\alpha_{1,k}} - \frac{1}{\alpha_{2,k}}\right) = \sum_{\lambda_k^2 < \mu} \frac{1}{\alpha_{1,k}}\left(1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right),$$

причем

$$1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}} = 1 - \prod_{n=N+2}^{\infty} \frac{(\mu_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2)(\lambda_{1,n}^2 - \mu_{1,k}^2)}{(\mu_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2)(\lambda_{2,n}^2 - \mu_{2,k}^2)}. \tag{1}$$

Поэтому при $\mu_0 < \lambda_{N+2}^2$

$$\operatorname*{Var}_{-\infty<\mu<\mu_0} \{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\} \leqslant \max_{\lambda_k^2 < \mu_0} \left|1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right| \cdot \sum_{\lambda_k^2 < \mu_0} \frac{1}{\alpha_{1,k}} =$$

$$= \rho_1(\mu_0) \cdot \max_{\lambda_k^2 < \mu_0} \left|1 - \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right|. \tag{2}$$

Таким образом, вопрос об оценке разности спектральных функций при $\mu < \lambda_{N+2}^2$ сводится к оценке абсолютной величины правой части формулы (2).

Для того чтобы получить нужные оценки, нам понадобится несколько лемм о поведении собственных функций и собственных значений рассматриваемых краевых задач.

Лемма 1. Если $q'(x) \in L_1(0, \pi)$, $|\lambda| > \sigma(x)$ и $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, то имеют место следующие неравенства:

$$|(\omega(\lambda, x) - \cos\lambda x)e^{i\lambda x}| \leqslant \frac{\sigma(x)}{|\lambda| - \sigma(x)}, \tag{3}$$

$$\left|\left\{\omega(\lambda, x) - \cos\lambda x - \frac{\sin\lambda x}{2\lambda}\int_0^x q(t)\,dt\right\} e^{i\lambda x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|^2}\left\{\frac{1}{2}\sigma_{-1}(x) + \frac{\sigma^2(x)}{1 - \frac{\sigma(x)}{|\lambda|}}\right\}, \tag{4}$$

где

$$\sigma(x) = \int_0^x |q(t)|\,dt; \quad \sigma_{-1}(x) = \int_0^x |q'(t)|\,dt.$$

Доказательство. Как известно, функции $\omega(\lambda, x)$ являются решениями интегрального уравнения

$$\omega(\lambda, x) = \cos\lambda x + \int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t)\,\omega(\lambda, t)\,dt.$$

Поэтому функции

$$z(\lambda, x) = [\omega(\lambda, x) - \cos \lambda x] e^{i\lambda x} (\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0)$$

удовлетворяют интегральному уравнению

$$z(\lambda, x) = \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} e^{i\lambda(x-t)} \cos \lambda t e^{i\lambda t} \cdot q(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} e^{i\lambda(x-t)} q(t) z(\lambda, t)\, dt. \tag{5}$$

Пусть

$$m(\lambda, x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant x} |z(\lambda, t)|.$$

Тогда, учитывая, что

$$\left| \frac{\sin \lambda (x-t) e^{i\lambda(x-t)}}{\lambda} \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} (\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0,\ x \geqslant t \geqslant 0),$$

$$|\cos \lambda t \cdot e^{i\lambda t}| \leqslant 1 \ (\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0,\ t \geqslant 0),$$

получаем

$$m(\lambda, x) \leqslant \frac{\int_0^x |q(t)|\, dt}{|\lambda|} + m(\lambda, x) \frac{\int_0^x |q(t)|\, dt}{|\lambda|}.$$

Следовательно, если $|\lambda| > \sigma(x)$, то

$$m(\lambda, x) \leqslant \frac{\sigma(x)}{|\lambda| - \sigma(x)},$$

что эквивалентно неравенству (3).

Имеем далее

$$\int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} \cos \lambda t \cdot q(t)\, dt =$$

$$= \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q(t)\, dt + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x \sin \lambda (x-2t)\, q(t)\, dt =$$

$$= \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q(t)\, dt + \frac{1}{4\lambda^2} \left\{ \cos \lambda (x-2t)\, q(t) \Big|_0^x - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \cos \lambda (x-2t)\, q'(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q(t)\, dt + \frac{1}{4\lambda^2} \int_0^x [\cos \lambda x - \cos \lambda (x-2t)]\, q'(t)\, dt.$$

Из этого равенства и уравнения (5) следует

$$\left| z(\lambda, x) - e^{i\lambda x} \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^x q(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2|\lambda|^2} \int_0^x |q'(t)|\, dt + \frac{\int_0^x |q(t)|\, dt}{|\lambda|} \cdot m(\lambda, x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|^2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x |q'(t)|\, dt + \frac{\left[\int_0^x |q(t)|\, dt\right]^2}{1 - \frac{\int_0^x |q(t)|\, dt}{|\lambda|}} \right\}.$$

Поэтому, если $|\lambda| > \sigma(x)$, то

$$\left| \left\{ \omega(\lambda, x) - \cos \lambda x - \frac{\sin \lambda x}{2\lambda} \int_0^\lambda q(t)\, dt \right\} e^{i\lambda x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|^2} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{-1}(x) + \frac{\sigma^2(x)}{1 - \frac{\sigma(x)}{|\lambda|}} \right\}$$

и лемма доказана полностью.

Лемма 2. При $n > 3\sigma(\pi)$

$$\lambda_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{q}{(2n+1)\pi} + \frac{M_n}{n^2},$$

где

$$q = \int_0^\pi q(t)\, dt;$$

$$|M_n| \leqslant \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{-1}(\pi) + 5\sigma^2(\pi) \right\}.$$

Доказательство. Докажем прежде всего, что в каждой полосе $n < \operatorname{Re} \lambda < n + 1$ при $n > 3\sigma(\pi)$ лежит только один нуль функции $\omega(\lambda, \pi)$.

Имеем

$$\omega(\lambda, \pi) = \cos \lambda\pi + [\omega(\lambda, \pi) - \cos \lambda\pi],$$

причем согласно предыдущей лемме на границе рассматриваемой полосы выполняется неравенство

$$|\omega(\lambda, \pi) - \cos \lambda\pi| \leqslant e^{|\operatorname{Im} \lambda\pi|} \cdot \frac{\sigma(\pi)}{|\lambda| - \sigma(\pi)}.$$

С другой стороны, на прямых $\operatorname{Re} \lambda = m$

$$|\cos \lambda\pi| = \frac{1}{2} |e^{i\lambda\pi} + e^{-i\lambda\pi}| = \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda\pi|}}{2} \cdot \{1 + e^{-2|\operatorname{Im} \lambda\pi|}\} \geqslant \frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda\pi|}}{2}.$$

Так как

$$\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|}}{2} > e^{|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \cdot \frac{\sigma(\pi)}{|\lambda| - \sigma(\pi)},$$

если $|\lambda| > 3\sigma(\pi)$, то на границе рассматриваемой полосы

$$|\cos\lambda\pi| > |\omega(\lambda, \pi) - \cos\lambda\pi|.$$

Из этого неравенства согласно теореме Руше следует, что функция $\omega(\lambda, \pi)$ в рассматриваемой полосе имеет столько же нулей, сколько $\cos\lambda\pi$, т. е. ровно один нуль, а в полосе $-(n+1) < \operatorname{Re}\lambda < n+1$ она имеет $2(n+1)$ нулей.

Так как функция $\omega(\lambda, \pi)$ — четная, то ее нули можно занумеровать так: $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \ldots, \pm\lambda_n, \ldots$ Числа $\nu_k = \lambda_k^2$ должны быть вещественными в силу самосопряженности задачи.

Учитывая все это, приходим к заключению, что при $n > 3\sigma(\pi)$

$$n < \lambda_{n+1} < n+1 \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\lambda_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \delta_{n+1},$$

$$\text{где } |\delta_{n+1}| < \frac{1}{2}, \text{ если } n > 3\sigma(\pi).$$

Подставляя λ_{n+1} в неравенство (3), получаем

$$|\cos\lambda_{n+1}\pi| = |\sin\delta_{n+1}\pi| \leqslant \frac{\sigma(\pi)}{\lambda_{n+1} - \sigma(\pi)} < \frac{\sigma(\pi)}{n - \sigma(\pi)},$$

откуда следует, что

$$\frac{2}{\pi}|\delta_{n+1}\pi| \leqslant |\sin\delta_{n+1}\pi| < \frac{\sigma(\pi)}{n - \sigma(\pi)}$$

и

$$|\delta_{n+1}| < \frac{\sigma(\pi)}{2[n - \sigma(\pi)]}, \tag{7}$$

если $n > 3\sigma(\pi)$.

Согласно неравенству (2)

$$\omega(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi + \frac{\sin\lambda\pi}{2\lambda} q + r(\lambda, \pi),$$

где при $n < \lambda < n+1$ и $n > 3\sigma(\pi)$

$$r(\lambda, \pi) < \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}\sigma_{-1}(\pi) + \frac{\sigma^2(\pi)}{1 - \frac{\sigma(\pi)}{n}}\right\}. \tag{8}$$

Отсюда, полагая $\lambda = \lambda_{n+1}$, имеем

$$0 = -(-1)^n \sin\delta_{n+1}\pi + (-1)^n \frac{\cos\delta_{n+1}\pi}{2\lambda_{n+1}} \cdot q + r(\lambda_{n+1}, \pi)$$

и

$$\sin\delta_{n+1}\pi - \frac{q}{2n+1} = (-1)^n r(\lambda_{n+1}, \pi) - \frac{\cos\delta_{n+1}\pi}{2\lambda_{n+1}} \cdot q - \frac{q}{2n+1}.$$

Так как

$$\sin\delta_{n+1}\pi = \delta_{n+1}\pi + \frac{(\delta_{n+1}\pi)^2\,\theta}{2},$$

где $|\theta| < 1$, то

$$\left|\delta_{n+1}\pi - \frac{q}{2n+1}\right| \leqslant |r(\lambda_{n+1}, \pi)| + \frac{(\delta_{n+1}\pi)^2}{2} + $$
$$+ \sigma(\pi) \frac{(2n+1)(1-\cos\delta_n\pi) + 2|\delta_{n+1}|}{2\lambda_{n+1}(2n+1)}.$$

Воспользовавшись неравенствами (8), (7), находим

$$\left|\delta_{n+1}\pi - \frac{q}{2n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}\sigma_{-1}(\pi) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^2(\pi)}{1-\frac{\sigma(\pi)}{n}}\right\} + \frac{\pi^2\sigma^2(\pi)}{8n^2\left(1-\frac{\sigma(\pi)}{n}\right)^2} +$$
$$+ \frac{\pi^2\sigma^3(\pi)}{16n^3\left(1-\frac{\sigma(\pi)}{n}\right)^2} + \frac{\sigma^2(\pi)}{4n^3\left(1-\frac{\sigma(\pi)}{n}\right)}$$

и при $n > 3\sigma(\pi)$

$$\left|\delta_{n+1} - \frac{q}{(2n+1)\pi}\right| < \frac{1}{3n^2}\left\{\frac{1}{2}\sigma_{-1}(\pi) + 5\sigma^2(\pi)\right\}.$$

Следовательно, при $n > 3\sigma(\pi)$

$$\lambda_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{q}{(2n+1)\pi} + \frac{M_n}{n^2},$$

где

$$|M_n| < \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\sigma_{-1}(\pi) + 5\sigma^2(\pi)\right\}.$$

Замечание. Аналогично доказывается, что при $n > 3\sigma(\pi)$

$$\mu_{n+1} = n + \frac{q}{2\pi n} + \frac{\widehat{M}_n}{n^2},$$

где

$$|\widehat{M}_n| < \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}\sigma_{-1}(\pi) + \frac{1}{4}q_0 + 5\sigma^2(\pi)\right\};$$
$$q_0 = \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |q(x)|.$$

Кроме того,

$$n - \frac{1}{2} < \mu_{n+1} < n + \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Пусть теперь $\beta(x)$ и $\beta_{-1}(x)$ — две произвольные неубывающие непрерывные функции. Обозначим через $V(x)$ множество всех краевых задач K, $Л$, у которых

$$\int_0^x |q(t)|\,dt \leqslant \beta(x),$$

$$\int_0^x |q'(t)|\,dt \leqslant \beta_{-1}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

Лемма 3. Пусть собственные значения $\{\lambda_{j,k}^2\}$ $(j=1, 2)$ двух краевых задач K_1, K_2, принадлежащих множеству $V(x)$, совпадают при $k=1, 2, \ldots$ $N+1$ и $N>3\beta(\pi)$. Тогда при $k>N+1$ выполняются неравенства

$$|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|<\frac{5M}{N(k-1)}, \tag{10}$$

где

$$M=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\beta_{-1}(\pi)+5\beta^2(\pi)\right\}.$$

Доказательство. Согласно лемме 2

$$\lambda_{j,k}=k-\frac{1}{2}+\frac{q_j}{(2k-1)\pi}+\frac{M_{j,k-1}}{(k-1)^2},$$

где

$$q_j=\int_0^\pi q_j(t)\,dt;$$

$$|M_{j,k-1}|\leqslant M=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\beta_{-1}(\pi)+5\beta^2(\pi)\right\}.$$

Отсюда при $k=N+1$ следует

$$0=\lambda_{1,N+1}-\lambda_{2,N+1}=\frac{q_1-q_2}{(2N+1)\pi}+\frac{M_{1,N}-M_{2,N}}{N^2},$$

$$\left|\frac{q_1-q_2}{\pi}\right|=|M_{1,N}-M_{2,N}|\frac{2N+1}{N^2}\leqslant\frac{2M}{N}\left(2+\frac{1}{N}\right).$$

Поэтому при $k>N+1$

$$|\lambda_{1,k}-\lambda_{2,k}|=\left|\frac{q_1-q_2}{(2k-1)\pi}+\frac{M_{1,k-1}-M_{2,k-1}}{(k-1)^2}\right|\leqslant\frac{|q_1-q_2|}{\pi(2k-1)}+\frac{2M}{(k-1)^2}<$$

$$<\frac{4M}{(k-1)N}\left(1+\frac{1}{4N}\right)<\frac{5M}{N(k-1)}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Если собственные значения $\{\mu_{j,k}^2\}$ $(j=1, 2)$ двух краевых задач $Л_1$, $Л_2$, принадлежащих множеству $V(x)$, совпадают при $k=1, 2, \ldots,$ $N+1$ и $N>3\beta(\pi)$, то при $k>N+1$ выполняются неравенства

$$|\mu_{1,k}-\mu_{2,k}|<\frac{4\widehat{M}}{N(k-1)}, \tag{11}$$

где

$$\widehat{M}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}\beta_{-1}(\pi)+\frac{1}{4}q_0+5\beta^2(\pi)\right\};$$

$$q_0=\max_{j=1,2}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|q_j(x)|.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы 3 и* $N\geqslant 7\sqrt{\widehat{M}}$, *то имеют место неравенства*

$$\max_{k<\frac{N}{2}}\left|1-\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right|<\frac{65\widehat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{2N^2}e^{\frac{33\widehat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{N^8}}$$

и

$$\operatorname*{Var}_{-\infty<\mu<\left(\frac{N}{2}\right)^2}\{\rho_1(\mu)-\rho_2(\mu)\}<$$

$$<\frac{65\widehat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{2N^2}\cdot e^{\frac{33\widehat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{N^2}}\cdot\rho_1\left(\frac{N^2}{4}\right),$$

где

$$\widehat{M}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}\beta_{-1}(\pi)+\frac{1}{4}q_0+5\beta^2(\pi)\right\};$$

$$q_0=\max_{j=1,2}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}|q_j(x)|.$$

Доказательство. Согласно формуле (1)

$$\max_{k<\frac{N}{2}}\left|1-\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right|=$$

$$=\max_{<\frac{N}{2}}\left|1-\prod_{n=N+2}^{\infty}\frac{(\mu_{1,n}^2-\mu_{1,k}^2)(\lambda_{1,n}^2-\mu_{1,k}^2)}{(\mu_{2,n}^2-\mu_{2,k}^2)(\lambda_{2,n}^2-\mu_{2,k}^2)}\right|. \tag{12}$$

Рассмотрим сначала бесконечное произведение

$$\psi(\mu_k)=\prod_{n=N+2}^{\infty}\frac{(\mu_{1,n}^2-\mu_{1,k}^2)(\lambda_{1,n}^2-\mu_{1,k}^2)}{(\mu_{2,n}^2-\mu_{2,k}^2)(\lambda_{2,n}^2-\mu_{2,k}^2)}.$$

Очевидно, что

$$|\ln\psi(\mu_k)|\leqslant\sum_{n=N+2}^{\infty}\left|\ln\left(1-\frac{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right)\right|+$$

$$+\sum_{n=N+2}^{\infty}\left|\ln\left(1-\frac{\lambda_{2,n}^2-\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right)\right|.$$

При $n>N+1$ и $k<\frac{N}{2}$

$$\left|\frac{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right|<1,$$

$$\left|\frac{\lambda_{2,n}^2-\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right|<1,$$

поэтому

$$|\ln\psi(\mu_k)| < \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{\left|\dfrac{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right|}{1-\left|\dfrac{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right|} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{\left|\dfrac{\lambda_{2,n}^2-\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right|}{1-\left|\dfrac{\lambda_{2,n}^2-\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right|}.$$

Учитывая оценки (6), (9), (10), (11), получаем для $n > N+1$, $k < \frac{N}{2}$ и $N > 3\beta(\pi)$

$$\left|\frac{\lambda_{2,n}^2-\lambda_{1,n}^2}{\lambda_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right| = \left|\frac{(\lambda_{2,n}-\lambda_{1,n})(\lambda_{2,n}+\lambda_{1,n})}{\lambda_{2,n}^2\left(1-\dfrac{\mu_{1,k}^2}{\lambda_{2,n}^2}\right)}\right| <$$

$$< \frac{\dfrac{5M}{N(n-1)}\cdot 2n}{(n-1)^2\left(1-\dfrac{\mu^2_{1,\left[\frac{N}{2}\right]}}{\lambda^2_{1,N+2}}\right)} <$$

$$< \frac{\dfrac{10M}{N}\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}{(n-1)^2\left[1-\dfrac{\left(\dfrac{N}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}{(N+1)^2}\right]} < \frac{40M\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}{3N(n-1)^2},$$

$$\left|\frac{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,n}^2}{\mu_{2,n}^2-\mu_{1,k}^2}\right| = \left|\frac{(\mu_{2,n}-\mu_{1,n})(\mu_{2,n}+\mu_{1,n})}{\mu_{2,n}^2\left(1-\dfrac{\mu_{1,k}^2}{\mu_{2,n}^2}\right)}\right| <$$

$$< \frac{\dfrac{4\hat{M}}{N(n-1)}\cdot 2\left(n-\dfrac{1}{2}\right)}{\left(n-\dfrac{3}{2}\right)^2\left[1-\dfrac{\left(\dfrac{N}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(N+\dfrac{1}{2}\right)^2}\right]} < \frac{32\hat{M}\left(1+\dfrac{1}{2N}\right)}{3N\left(n-\dfrac{3}{2}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что при $N \geqslant 7\sqrt{\hat{M}}$

$$|\ln\psi(\mu_k)| < \frac{\dfrac{40\hat{M}\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}{3N^2}}{1-\dfrac{40\hat{M}}{3N^2}} + \frac{\dfrac{32\hat{M}\left(1+\dfrac{2}{N}\right)}{3N^2}}{1-\dfrac{32\hat{M}}{3N^2}} <$$

$$< \frac{\dfrac{40\hat{M}\left(1+\dfrac{1}{N}\right)}{3N^2}}{1-\dfrac{40\hat{M}}{3\cdot 49\hat{M}}} + \frac{\dfrac{32\hat{M}\left(1+\dfrac{2}{N}\right)}{3N^2}}{1-\dfrac{32\hat{M}}{3\cdot 49\hat{M}}} < \frac{65\hat{M}\left(1+\dfrac{2}{N}\right)}{2N^2}.$$

Из полученного неравенства и формулы (12) вытекает, что для $N \geqslant 7\sqrt{\hat{M}}$

$$\max_{k<\frac{N}{2}} \left|1-\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right| < e^{\frac{65\hat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{2N^2}} - 1 <$$

$$< \frac{65\hat{M}\left(1+\dfrac{2}{N}\right)}{2N^2} e^{\frac{33\hat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{N^2}}.$$

Учитывая формулу (2) и полученное неравенство, имеем при $N \geqslant 7\sqrt{\hat{M}}$

$$\operatorname*{Var}_{-\infty<\mu<\left(\frac{N}{2}\right)^2} \{\rho_1(\mu)-\rho_2(\mu)\} <$$

$$< \rho_1\left(\frac{N^2}{4}\right)\cdot \max_{k<\frac{N}{2}} \left|1-\frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{2,k}}\right| <$$

$$< \rho_1\left(\frac{N^2}{4}\right)\cdot \frac{65\hat{M}\left(1+\dfrac{2}{N}\right)}{2N^2}\cdot e^{\frac{33\hat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{N^2}}.$$

Теорема доказана полностью.

Перейдем теперь к решению основной задачи работы.

Теорема 2. Пусть собственные значения $\{\lambda_{j,k}^2\}$ $(j=1,2)$ краевых задач K_1, K_2 и собственные значения $\{\mu_{j,k}^2\}$ $(j=1,2)$ краевых задач $Л_1$, $Л_2$, принадлежащих множеству $V(x)$, совпадают при $k=1, 2, \ldots, N+1$.

Тогда при $N \geqslant 7\sqrt{\hat{M}}$ решения соответствующих дифференциальных уравнений для всех $0 \leqslant \lambda^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N}{2}\right)^2$ удовлетворяют неравенству

$$|\omega_1(\lambda, x)-\omega_2(\lambda, x)|^2 < \frac{1}{N}\left[1+\frac{2}{N}\beta\left(\frac{2}{N}\right)\exp\left\{2\beta_1\left(\frac{2}{N}\right)\right\}\right]\times$$

$$\times \exp\left\{2\left[\beta_1(x)-\beta_1\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{49x\hat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)\exp\left\{\frac{33\hat{M}\left(1+\dfrac{2}{N}\right)}{N^2}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{2\beta_1(x)\}+48\beta(x)\exp\left\{\frac{4\beta(x)}{N}\right\}\right\},$$

где

$$\beta_1(x) = \int_0^x \beta(t)\,dt;$$

$$\hat{M} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}\beta_{-1}(\pi) + \frac{1}{4}q_0 + 5\beta^2(\pi)\right\};$$

$$q_0 = \max_{j=1,2}\ \max_{0 \leqslant x \leqslant \pi} |q_j(x)|.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.11) из [3], где в качестве интервала $I = (a, b)$ выберем интервал $\left(0, \frac{N^2}{4}\right)$. Тогда

$$[\omega_1(\lambda, x) - \omega_2(\lambda, x)]^2 =$$

$$= \omega_2(\lambda, x)\int_0^{\frac{N^2}{4}} \omega_2(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x \omega_1(\mu, t)\,\omega_1(\lambda, t)\,dt -$$

$$- \omega_1(\lambda, x)\int_0^{\frac{N^2}{4}} \omega_1(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x \omega_2(\mu, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,dt +$$

$$+ \int_0^x q_{1,2}(t)\,dt\int_{\frac{N^2}{4}}^{\infty} \frac{\omega_1(\lambda, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,\omega_1(\mu, x)\,\omega_2(\mu, x) - \omega_1(\lambda, x)\,\omega_2(\lambda, x)\,\omega_1(\mu, t)\,\omega_2(\mu, t)}{\mu^2 - \lambda^2}\,d\rho_{1,2}(\mu),$$

где $q_{1,2}(t) = q_1(t) - q_2(t)$;

$$\rho_{1,2}(\mu) = \rho_1(\mu) - \rho_2(\mu).$$

Первые два слагаемых оценим, используя теорему 1 и неравенство (3.21) из [3]. Тогда

$$\left|\omega_2(\lambda, x)\int_0^{\frac{N^2}{4}} \omega_2(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x \omega_1(\mu, t)\,\omega_1(\lambda, t)\,dt -\right.$$

$$\left.- \omega_1(\lambda, x)\int_0^{\frac{N^2}{4}} \omega_1(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x \omega_2(\mu, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2x\exp\left\{2\beta_1(x) + 2\left[\beta_1(x) - \beta_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times \rho_1\left(\frac{N^2}{4}\right) e^{\frac{33\hat{M}\left(1 + \frac{2}{N}\right)}{N^2}} \cdot \frac{65\hat{M}\left(1 + \frac{2}{N}\right)}{2N^2}.$$

Применяя для оценки $\rho_1\left(\frac{N^2}{4}\right)$ неравенство (3.25) из [3], получаем

$$\left|\omega_2(\lambda, x)\int_0^{\frac{N^2}{4}}\omega_2(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x\omega_1(\mu, t)\,\omega_1(\lambda, t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \omega_1(\lambda, x)\int_0^{\frac{N^2}{4}}\omega_1(\mu, x)\,d\rho_{1,2}(\mu)\int_0^x\omega_2(\mu, t)\,\omega_2(\lambda, t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2x\exp\left\{2\beta_1(x) + 2\left[\beta_1(x) - \beta_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\frac{3}{2}\left[\frac{N}{2} + \beta\left(\frac{2}{N}\right)\exp\left\{2\beta_1\left(\frac{2}{N}\right)\right\}\times\right.$$

$$\times\frac{65\hat{M}\left(1 + \frac{2}{N}\right)}{2N^2}\cdot e^{\frac{33\hat{M}\left(1+\frac{2}{N}\right)}{N^2}} \leqslant$$

$$\leqslant\frac{49xM\left(1 + \frac{2}{N}\right)}{N}\exp\left\{\frac{33\hat{M}\left(1 + \frac{2}{N}\right)}{N^2}\right\}\times$$

$$\times\left[1 + \frac{2}{N}\beta\left(\frac{2}{N}\right)\exp\left\{2\beta_1\left(\frac{2}{N}\right)\right\}\right]\times$$

$$\times\exp\left\{2\beta_1(x) + 2\left[\beta_1(x) - \beta_1\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)\right]\right\}.$$

Третий интеграл оценивается согласно теореме 1 из [3]. Из этих оценок и следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Borg. Eine Umkehrung der Sturm — Liouvillschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerke. Acta Math., 78, № 2 (1945).

2. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. «Усп. матем. наук», 19, вып. 2, 1964.

3. В. А. Марченко, К, В. Маслов. Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма — Лиувилля по спектральной функции. «Матем. сб.», т. 81 (124): 4, 1970.

Поступила 5 апреля 1971 г.